Як і у попередньому випадку, жоден з ланцюжків не індукує швидкість сам на себе. Отже можна сказати, що верній ланцюжок рухається під дією нижнього, а нижній – під дією верхнього. Таким чином комплексна швидкість вихору в точці $z = -\frac{1}{2}ib$ нижнього ланцюжка буде визначатися співвідношенням:

$$u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \frac{\chi\pi}{a} cth \frac{\pi b}{a}.$$

Аналогічну формулу маємо для будь-якого вихору верхнього ланцюжка. Отже маємо, що уся система рухається зі швидкістю:

$$V = \frac{\chi\pi}{a} cth \frac{\pi b}{a}.$$

Також, аналогічно попередньому випадку, можна показати, що рух нестійкий, та вся система знаходиться у стані нестійкої рівноваги. При будь-якому зміщенні одного, кількох, чи всіх вихорів, їх відхилення будуть збільшуватися.

При дослідженні руху рідини будемо користуватися виразом (5) для знаходження функцій току. Співвідношення для функцій току можна подати у вигляді:

$$\psi = -\frac{\chi}{4\pi} \ln \frac{\cosh\left(2\pi y + \frac{b}{a}\pi\right) + \sin 2\pi x}{\cosh\left(2\pi y - \frac{b}{a}\pi\right) + \sin 2\pi x}$$

На рис. 4 за цим співвідношенням побудовано графічне зображення ліній току.

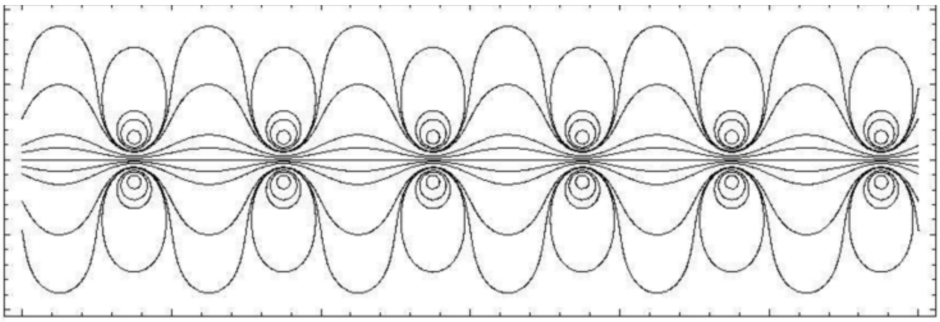

Рис 4. Лінії току для лінійної конфігурації

4. Висновки

Розглянуто дві нескінченні вихрові структури: лінійна та шахова конфігурації вихрових доріжок фон Кармана. Досліджено рух структур, отримано швидкості руху. Також розглянуто стійкість структур, показано, що задані системи вихорів знаходяться у стані нестійкої рівноваги. Розглянуто питання про рух рідини навколо даних структур. Отримано вирази для функцій току, та побудовані їх графічні портрети.

1. *Борисов А. В., Мамаев И. С., Рамоданов С. М.* Динамическая адвекция // Нелинейная динамика. – 2010. – № 3. – С. 521–530. 2. *Косткін К. К.* Стійкість вихрового ланцюжка // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченко. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – № 2. – С. 57–60. 3. *Мелешко В. В., Константинов М. Ю.* Динамика вихревых структур. – К., 1993. 4. *Aref H.* Vortices and polynomials // Fluid Dynamics Research. – 2007. – Vol. 39. – P. 5–23.

Надійшла до редколегії 20.12.2010 р.

УКД 517.9+531.19

І. Гап'як, асп.

ДИНАМІКА ВИДІЛЕНОЇ ЧАСТИНКИ В НЕСКІНЧЕННОЧАСТИНКОВІЙ СИСТЕМІ

На основі ієрархії рівнянь ББГКІ описано еволюцію станів системи нескінченного числа частинок з виділеною частинкою у випадку сингулярного потенціалу взаємодії пружних куль, колективна поведінка яких описується кінетичним рівнянням Фоккера-Планка. Доведено існування глобального розв'язку задачі Коші для сформульованих еволюційних рівнянь в просторі послідовностей обмежених функцій.

Evolution of states of a system of particles, which collective behavior governed by the Fokker-Plank kinetic equation, namely, an infinite-particle system with a tagged particle interacting as hard spheres, is described on the base of the BBGKY hierarchy. An existence of a global solution of the Cauchy problem for formulated evolution equations is proved in the space of sequences of bounded functions.

1. Вступ

Однією з фундаментальних проблем сучасної математичної фізики є проблема обґрунтування еволюційних рівнянь, якими описуються стохастичні процеси, на основі динаміки системи взаємодіючих частинок [1,4]. Вперше результати про стохастичну поведінку багаточастинкових систем були отримані у працях Боголюбова [1,4] за допомогою теорії збурень. В останні роки отримано низку нових строгих результатів з обґрунтування дифузійної динаміки одновимірної системи пружних куль з виділеною масивною кулею [5,7] і системи квантових частинок з виділеною частинкою для певних класів потенціалу взаємодії [9,10].

Однією з відкритих математичних задач, яка виникає при строгому дослідженні динаміки виділеної частинки в оточенні інших частинок, є побудова динаміки нескінченного числа частинок. У даній статті еволюція станів одновимірної системи, яка складається з виділеної частинки в оточенні нескінченного числа пружних куль описується задачею Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ. Для початкових станів з простору послідовностей обмежених функцій доведено існування глобального розв'язку сформульованих рівнянь. Розглянуто зв'язок побудованого розв'язку з кінетичним рівнянням Фоккера-Планка одновимірної системи пружних куль.

2. Динаміка виділеної частинки в системі частинок

Розглянемо багаточастинкову систему, яка складається із виділеної частинки та оточення – системи нефіксованого числа частинок. Зокрема, якщо частинки з оточення знаходяться в стані рівноваги, то еволюція такої системи частинок інтерпретується як динаміка частинки в термостаті [1]. Введемо необхідні попередні факти про динаміку одновимірної системи – виділеної частинки, яка взаємодіє з скінченним числом n_1+n_2 частинок як пружні кулі (стержні). Занумеруємо частинки числами із $\mathbb{Z}^1$. Будемо вважати, що під номером $i=0$ знаходиться масивна частинка маси m_0. За допомогою $m_i>0$ позначимо відповідну масу i-ї частинки, де $i\in(-n_2,\ldots-1,1\ldots,n_1)$. Також будемо вважати, що кожна із частинок має довжину $\sigma>0$. Кожна із частинок характеризується координатою центра кулі $q_i\in\mathbb{R}$ і швидкістю $\nu_i\in\mathbb{R}$; $(q_i,\nu_i)\equiv x_i$. Для такої системи частинок множина $W_n\equiv\Big\{\big(q_{-n_2},\ldots,q_{n_1}\big)\in\mathbb{R}\big|q_{i+1}-q_i<\sigma$ хоча б для однієї пари $(i,i+1)\in\big[(-n_2,-n_2+1),\ldots,(n_1-1,n_1)\big]\Big\}$ визначає множину заборонених конфігурацій.

Фазові траєкторії одновимірної системи пружних куль визначені майже скрізь на фазовому просторі $\mathbb{R}^n\times\big(\mathbb{R}^n\setminus W_n\big)$, крім множини M_n^0, лебегова міра якої дорівнює нулю [8]. Множині початкових даних M_n^0 належать значення $\big(x_{-n_2},\ldots x_{n_1}\big)\in\mathbb{R}^n\times\big(\mathbb{R}^n\setminus W_n\big)$, для яких при $t\in(-\infty,\infty)$ в системі виникають кратні (потрійні і т. д.) зіткнення куль та на скінченному інтервалі часу виникає нескінченне число зіткнень. Фазова траєкторія будується аналогічно багатовимірному випадку [6]. Функція $X(t,x)$ існує і єдина при $t\in(-\infty,\infty)$ для майже всіх початкових даних $x\notin M_n^0$, неперервно диференційована за x і t на будь-якому скінченному проміжку часу і задовольняє групову властивість [6].

Нехай $L_\alpha^1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{\substack{k_1,k_2\geq 0\\ k_1+k_2=k}}\oplus\alpha^{k+1}L^1\Big(\mathbb{R}^{k_1+k_2+1}\times\big(\mathbb{R}^{k_1+k_2+1}\setminus W_{k_1+k_2+1}\big)\Big)$ – банахів простір послідовностей вимірних функцій $f_n\big(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\big)$, що дорівнюють нулю на множині заборонених конфігураціях W_n з нормою

$$\|f\|=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_1,k_2\geq 0\\ k_1+k_2=k}}\alpha^{k+1}\int_{\mathbb{R}^{k+1}\times\mathbb{R}^{k+1}}dx_{-k_2}\ldots dx_{k_1}\Big|f_{k+1}\big(x_{-k_2},\ldots,x_{k_1}\big)\Big|,$$

де число $\alpha>1$. Через $L_{\alpha,0}^1$ позначимо множину фінітних послідовностей функцій $f_n\in L^1\Big(\mathbb{R}^n\times\big(\mathbb{R}^n\setminus W_n\big)\Big)$, зосереджених на компактах в $\mathbb{R}^n\times\big(\mathbb{R}^n\setminus W_n\big)$, неперервно диференційованих і рівних нулю в ε-околах заборонених конфігурацій W_n. Множина $L_{\alpha,0}^1$ є всюди щільною в L_α^1.

Для побудови розв'язків ієрархії рівнянь ББГКІ в просторі L_n^1 введемо оператор, який описує динаміку $n=n_1+n_2+1$ частинок:

$$\big(S_n(t)f_n\big)(x):=\begin{cases}f_n\big(X_{-n_2}(t,x),\ldots,X_{n_1}(t,x)\big), & x\in\mathbb{R}^n\times\big(\mathbb{R}^n\setminus W_n\big)\setminus M_n^0,\\ 0, & \big(q_{-n_2},\ldots,q_{n_1}\big)\in W_n,\end{cases}\tag{1}$$

де $x\equiv\big(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\big)$, $X_i(t)=X_i(t,x)$ – фазова траєкторія i-ї частинки. Оператор $S_n(t)$ — ізометричний, задовольняє групову властивість і є сильно неперервним за t [6].

Нехай $f_n\in L^1\Big(\mathbb{R}^n\times\big(\mathbb{R}^n\setminus W_n\big)\Big)$, $\varphi_n\in C_0^\infty\Big(\mathbb{R}^n\times\big(\mathbb{R}^n\setminus W_n\big)\Big)$, тоді існує функціонал

$$(f_n,\varphi_n)=\int_{\left(\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\right)^{n+1}}dx_{-n_2}\ldots dx_{n_1}f_n\big(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\big)\varphi_n\big(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\big),\tag{2}$$

і для еволюційного оператора (1) справедливий такий аналог рівняння Дюамеля:

$$\begin{aligned}&\left(\left(S_n\big(-t,x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\big)-\prod_{i=-n_2}^{n_1}S_1(-t,x_i)\right)f_n,\varphi_n\right)=\\ &=\int_{\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}}dx_{-n_2}\ldots dx_{n_1}\int_0^t d\tau\prod_{j=-n_2}^{n_1}S_1\big(-t+\tau,x_j\big)\sum_{i=-n_2}^{n_1-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x_i,x_{i+1})S_n\big(-\tau,x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\big)f_n\big(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\big)\varphi_n\big(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\big),\end{aligned}\tag{3}$$

де оператор $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x_i,x_{i+1})$ визначається рівністю

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x_i,x_{i+1})f_n\left(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\right)=\delta(q_i-q_{i+1}+\sigma)\Big[(\nu_{i+1}-\nu_i)\theta(\nu_{i+1}-\nu_i)f_n\left(x_{-n_2},\ldots,x_i^*,x_{i+1}^*,\ldots,x_{n_1}\right)-\\-(\nu_i-\nu_{i+1})\theta(\nu_i-\nu_{i+1})f_n\left(x_{-n_2},\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots,x_{n_1}\right)\Big],\qquad(4)$$

δ – дельта-функція Дірака, θ – функція Хевісайда, $x_i^*=\left(q_i,\nu_i^*\right)$, швидкості частинок після розсіяння ν_i^*,ν_{i+1}^* визначаються згідно співвідношень

$$\nu_i^*=\frac{2m_{i+1}\nu_{i+1}}{m_i+m_{i+1}}+\frac{(m_i-m_{i+1})\nu_i}{m_i+m_{i+1}},\qquad \nu_{i+1}^*=\frac{2m_i\nu_i}{m_i+m_{i+1}}+\frac{(m_{i+1}-m_i)\nu_{i+1}}{m_i+m_{i+1}}.$$

Нехай $\left(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\right)\equiv Y$, $\left(x_{-(n_2+k_2)},\ldots,x_{n_1+k_1}\right)\equiv X$. Множини X та Y є частково впорядкованими, оскільки $\sigma+q_i\le q_{i+1}$. Якщо підмножина Y множини X трактується як один елемент (кластер n_1+n_2+1 частинок) подібний до $\left(x_{-(n_2+k_2)},\ldots,x_{-(n_2+1)},x_{n_1+1},\ldots,x_{n_1+k_1}\right)$, то для такої частково впорядкованої множини використовується позначення X_Y. Символ $|Y|=n=n_1+n_2+1$ означає число елементів множини Y і отже $|X_Y|=k_1+k_2+1$. Кумулянт (k_1+k_2+1)-го порядку еволюційних операторів (1) визначається таким розкладом:

$$\mathfrak{A}_{1+k_1+k_2}(t,X_Y):=\sum_{P:X_Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|-1}\prod_{X_i\subset P}S_{|X_i|}(-t,X_i),\qquad k_1+k_2\ge 0,\qquad(5)$$

де $\sum_{p}$ – сума по всіх можливих впорядкованих розбиттях частково впорядкованої множини X_Y на $|P|$ не порожніх частково впорядкованих підмножин $X_i\subset X_Y$, що взаємно не перетинаються $X_i\cap X_j=\varnothing$, а множина Y цілком належить одній з підмножин X_i.

Використовуючи рівність (3) отримаємо, що кумулянт n-го порядку для еволюційного оператора (1) можна визначити через кумулянти нижчого порядку таким виразом:

$$\mathfrak{A}_n(t,Y)=\int_0^t d\tau\prod_{j=-n_2}^{n_1}S_1(-t+\tau,x_j)\sum_{i=-n_2}^{n_1-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x_i,x_{i+1})\mathfrak{A}_{n-1}\left(\tau,x_{-n_2},\ldots,x_{i-1},x_i\cup x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{n_1}\right),\qquad(6)$$

де позначення $x_i\cup x_{i+1}$ відображає ту обставину, що частинки x_i та x_{i+1} є кластером (зв'язною частиною) двох частинок.

3. Ієрархія ББГКІ для виділеної частинки в системі нефіксованого числа частинок

Якщо $F(0)=F^0=\left\{F_n^0\left(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\right)\right\}_{n=n_1+n_2+1\ge 1}\in L^1_\alpha$ – подвійна послідовність n-частинкових початкових функцій розподілу $F_n^0\left(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\right)$, то розв'язок $F(t)=\left\{F_n\left(t,x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\right)\right\}_{n\ge 1}$ початкової задачі для ієрархії ББГКІ системи нефіксованого числа частинок визначається такими розкладами по групах (кластерах) зростаючого числа частинок [3,11]:

$$F_1(t,x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_1,k_2\ge 0\\ k_1+k_2=k}}\int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k}dx_{-k_2}\ldots dx_{-1}dx_1\ldots dx_{k_1}\mathfrak{A}_{1+k}\left(t,x_{-k_2},\ldots,x_{k_1}\right)F^0_{1+k}\left(x_{-k_2},\ldots,x_{k_1}\right),\qquad(7.a)$$

$$F_n(t,Y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_1,k_2\ge 0\\ k_1+k_2=k}}\int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k}dx_{-(n_2+k_2)}\ldots dx_{-(n_2+1)}dx_{1+n_1}\ldots dx_{k_1+n_1}\mathfrak{A}_{1+k}\left(t,x_{-(n_2+k_2)},\ldots x_{-(n_2+1)},\{Y\},x_{1+n_1}\ldots,x_{k_1+n_1}\right)\times\\ \times F^0_{n+k}\left(x_{-(n_2+k_2)},\ldots,x_{k_1+n_2}\right),\qquad(7.b)$$

де $\mathfrak{A}_{1+k}(t)$ – кумулянт $(1+k)$-го порядку (5) груп операторів (1), $Y\equiv\left(x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}\right)$. Ряди (7.a), (7.b) збігаються за нормою простору L^1_α, за умови, що $\alpha>2$ і справедлива оцінка $\|F(t)\|_{L^1_\alpha}\le\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)^{-1}\|F^0\|_{L^1_\alpha}$.

Сформулюємо в просторі L^1_α рівняння еволюції станів виділеної частинки в оточенні нефіксованого числа частинок. Функції (7.a), (7.b) в сенсі поточкової збіжності при $t>0$ задовольняють таким співвідношенням:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_0)=-v_0\frac{\partial}{\partial q_0}F_1(t,x_0)+\int_0^\infty dVV\left(F_2\left(t,q_0,v_0^*(v_0,V),q_0+\sigma,v_1^*(v_0,V)\right)-\right.\\ \left.-F_2(t,q_0,v_0,q_0+\sigma,v_0-V)\right)+\int_0^\infty dVV\left(F_2\left(t,q_0-\sigma,v_{-1}^*(v_0,V),q_0,v_0^*(v_0,V)\right)-F_2(t,q_0-\sigma,V+v_0,q_0,v_0)\right),\qquad(8.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F_n\left(t,x_{-n_2},\dots,x_{n_1}\right)=\left(-\sum_{i=-n_2}^{n_1}v_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\sum_{i=-n_2}^{n_1-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(x_i,x_{i+1}\right)\right)F_n\left(t,x_{-n_2},\dots,x_{n_1}\right)+$$
$$+\int_0^\infty dVV\left(F_{n+1}\left(t,q_{-n_2},v_{-n_2},\dots,q_{n_1},v_{n_1}^*\left(v_{n_1},V\right),q_{n_1}+\sigma,v_{n_1+1}^*\left(v_{n_1},V\right)\right)-F_{n+1}\left(t,q_{-n_2},v_{-n_2},\dots,q_{n_1},v_{n_1},q_{n_1}+\sigma,v_{n_1}-V\right)\right)+ \quad (8.b)$$
$$+\int_0^\infty dVV\left(F_{n+1}\left(t,q_{-n_2}-\sigma,v_{-(n_2+1)}^*\left(v_{-n_2},V\right),q_{-n_2},v_{-n_2}^*\left(v_{-n_2},V\right),\dots,q_{n_1},v_{n_1}\right)-F_{n+1}\left(t,q_{-n_2}-\sigma,v_{-n_2}+V,q_{-n_2},v_{-n_2},\dots,q_{n_1},v_{n_1}\right)\right),$$

$$F(0)=F^0, \quad (9)$$

де оператор $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(x_i,x_{i+1}\right)$ визначається рівністю (4), $x_i\equiv\left(q_i,v_i\right)$, $i\in\left(-n_2,\dots,n_1\right)$ функції $v_i^*\left(v_i,V\right),v_{i+1}^*\left(v_i,V\right)$ визначаються виразами:

$$v_i^*\left(v_i,V\right)=v_i+\frac{2m_{i+1}}{m_i+m_{i+1}}V,\qquad v_{i+1}^*\left(v_i,V\right)=v_i+\frac{m_{i+1}-m_i}{m_i+m_{i+1}}V,$$

$$v_{-i}^*\left(v_{-i},V\right)=v_{-i}-\frac{2m_{-i-1}}{m_{-i}+m_{-i-1}}V,\quad v_{-i-1}^*\left(v_{-i},V\right)=v_{-i}-\frac{m_{-i-1}-m_{-i}}{m_{-i-1}+m_{-i}}V.$$

Оператор: $-\sum_{i=-n_2}^{n_1}v_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\sum_{i=-n_2}^{n_1-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(x_i,x_{i+1}\right)$ в рівнянні (8.b) на $F_n(t)\in L^1_{\alpha,0}$ співпадає з оператором: $-\sum_{i=-n_2}^{n_1}v_i\frac{\partial}{\partial q_i}$ з граничними умовами на ∂W_n [2,6]. Співвідношення (8) будемо тлумачити як еволюційні рівняння (ієрархія ББГКІ) системи виділеної частинки в багаточастинковій системі, якими описується еволюція n-частинкових (маргінальних) станів. Рівняння (8.a) описує еволюцію стану виділеної частинки, а (8.b) – еволюцію стану оточення. Відповідним чином визначаються ієрархія рівнянь ББГКІ при $t<0$.

Для початкових даних $F^0\in L^1_{\alpha,0}$ розкладами (7.a) та (7.b) зображується сильний розв'язок, а для $F^0\in L^1_\alpha$ – слабкий (узагальнений) розв'язок [6].

Зауважимо, що розв'язки з простору L^1_α описують стани системи виділена частинка в оточенні скінченного середнього числа частинок.

4. Існування розв'язку ієрархії ББГКІ для виділеної частинки в нескінченночастинковій системі

Розглянемо задачу Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (8), (9) в просторі послідовностей обмежених функцій, якому, зокрема, належать стани виділеної частинки в термостаті. Введемо банахів простір $L^\infty_{\xi,\beta}$ послідовностей $\left\{f_n\left(x_{-n_2},\dots,x_{n_1}\right)\right\}_{n=n_1+n_2+1\ge1}$ вимірних функцій $f_n\left(x_{-n_2},\dots,x_{n_1}\right)$, які дорівнюють нулю на множині заборонених конфігурацій W_n з нормою

$$\|f\|=\sup_{n\ge1}\xi^{-n}\sup_{\substack{n_1,n_2\ge0\\ n_1+n_2+1=n}}\sup_{x_{-n_2},\dots,x_{n_1}}\left|f_n\left(x_{-n_2},\dots,x_{n_1}\right)\right|\exp\left\{\beta\sum_{i=-n_2}^{n_1}\frac{m_iv_i^2}{2}\right\},$$

де числа $\xi,\beta\in\mathbb{R}^1_+$.

Доведемо, що для початкових даних $F^0\in L^\infty_{\xi,\beta}$ розв'язок задачі Коші для рівняння (8.a) існує. Нехай $F_{\Lambda,1}(t)$ – розв'язок ієрархії ББГКІ (8) для виділеної частинки, який зосереджений на скінченному відрізку $\Lambda\subset\mathbb{R}^1$. Будемо вважати, що частинки пружно відбиваються від границі $\partial\Lambda$ області Λ. Для $F^0_\Lambda\in L^\infty_{\xi,\beta}\cap L^1_{\alpha,0}$ розв'язок ієрархії ББГКІ (8) для виділеної частинки існує, $F_{\Lambda,1}(t)\in L^\infty_{\xi,\beta}\cap L^1_{\alpha,1}$, і зображається збіжним рядом

$$F_{\Lambda,1}\left(t,x_0\right)=\left(\mathfrak{A}(t)F^0_\Lambda\right)_1\left(x_0\right):=\sum_{k=0}^\infty\sum_{\substack{k_1,k_2\ge0\\ k_1+k_2=k}}\int_{\left(\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\right)^k}dx_{-k_2}\dots dx_{-1}dx_1\dots dx_{k_1}\mathfrak{A}_{1+k}\left(t,x_{-k_2},\dots,x_{k_1}\right)F^0_{\Lambda,1+k}\left(x_{-k_2},\dots,x_{k_1}\right). \quad (10)$$

Нехай $\varphi_n\left(x_0\right)\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\right)$. Тоді згідно аналогу рівняння Дюамеля (3), (6) справедлива така рівність:

$$\left(\left(\mathfrak{A}(t)F^0_\Lambda\right)_1,\varphi_1\right)=\left(\left(\widetilde{\mathfrak{A}}(t)F^0_\Lambda\right)_1,\varphi_1\right), \quad (11)$$

де використано позначення (2) для відповідних функціоналів та

$$\begin{aligned}&\left(\left(\widetilde{\mathfrak{A}}(t)F_{\Lambda}^{0}\right)_{1},\varphi_{1}\right):=\int_{\mathbb{R}^{1}\times\mathbb{R}^{1}}dx_{0}\varphi_{1}(x_{0})\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_1,k_2\geq 0\\ k_1+k_2=k}}\int_{\mathbb{R}^{k}\times\mathbb{R}^{k}}dx_{-k_2}\cdots dx_{-1}dx_{1}\ldots dx_{k_1}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{k-1}}dt_k\prod_{j_1=-k_2}^{k_1}S_1\left(-t+t_1,x_{j_1}\right)\times\\&\times\sum_{i=-k_2}^{k_1-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(x_{i_1},x_{i_1+1}\right)S_2\left(-t_1+t_2,x_{i_1},x_{i_1+1}\right)\prod_{\substack{j_2=-k_2\\ j_2\neq(i_1,i_1+1)}}^{k_1}S_1\left(-t_1+t_2,x_{j_2}\right)\sum_{\substack{i_2=-k_2\\ i_2\neq i_1}}^{k_1-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(x_{i_2},x_{i_2+1}\right)\ldots\sum_{\substack{i_l=-k_2\\ i_l\neq(i_1,\ldots,i_{l-1})}}^{k_1-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(x_{i_l},x_{i_l+1}\right)\times\\&\times S_{|Z|}\left(-t_l+t_{l+1},Z\right)\prod_{\substack{j_{l+1}=-k_2\\ j_{l+1}\neq((i_1,i_1+1),\ldots,(i_l,i_l+1))}}^{k_1}S_1\left(-t_l+t_{l+1},x_{j_{l+1}}\right)\ldots\sum_{\substack{i_k=-k_2\\ i_k\neq(i_1,\ldots,i_{k-1})}}^{k_1-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(x_{i_k},x_{i_k+1}\right)S_{1+k}\left(-t_k,x_{-k_2},\ldots,x_{k_1}\right)\times\\&\times F_{\Lambda,1+k}^{0}\left(x_{-k_2},\ldots,x_{k_1}\right),\end{aligned} \tag{12}$$

де $Z\equiv\left(\left\{x_{i_1},x_{i_1+1}\right\}\cup\left\{x_{i_2},x_{i_2+1}\right\}\cup\ldots\cup\left\{x_{i_l},x_{i_l+1}\right\}\right)$. Якщо $F_{\Lambda,1+k}^{0}\in L_{\xi,\beta}^{\infty}\cap L_0^1$, а φ_1 – неперервно диференційована функція з компактним носієм, то функціонал (12) існує, оскільки ряд $\left(\widetilde{\mathfrak{A}}(t)F_{\Lambda}^{0}\right)_{1}(x_0)$ є рівномірно збіжним за x_0 на кожному компакті при $t\in(-\infty,\infty)$. Дійсно для $F_{\Lambda,1+k}^{0}\in L_{\xi,\beta}^{\infty}\cap L_0^1$, згідно наслідку з теореми Ліувілля [8] для функціоналу (12) справедлива рівність

$$\left(\left(\widetilde{\mathfrak{A}}(t)F_{\Lambda}^{0}\right)_{1},\varphi_1\right)=\left(\left(U(t)F_{\Lambda}^{0}\right)_{1},\varphi_1\right), \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}&\left(U(t)F_{\Lambda}^{0}\right)_{1}(x_0):=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{k-1}}dt_k\sum_{m=0}^{k}\sum_{1\leq l_1<\ldots<l_m}^{k}(-1)^{k-m}\left(\mathcal{L}(t_1-t)\ldots\mathcal{L}\left(t_{l_1-1}-t_{l_1-2}\right)\times\right.\\&\left.\times\mathcal{L}^{*}\left(t_{l_1}-t_{l_1-1}\right)\mathcal{L}\left(t_{l_1+1}-t_{l_1}\right)\ldots\mathcal{L}\left(t_{l_m-1}-t_{l_m-2}\right)\mathcal{L}^{*}\left(t_{l_m}-t_{l_m-1}\right)\mathcal{L}\left(t_{l_m+1}-t_{l_m}\right)\ldots\mathcal{L}(t_k-t_{k-1})S_{1+k}(-t_k)F_{\Lambda}^{0}\right)_{1}(x_0)\end{aligned}. \tag{14}$$

В розкладі (14) використано такі позначення:

$$\mathcal{L}^{*}(t_i-t_{i-1}):=\mathcal{L}_{+}^{*}(t_i-t_{i-1})+\mathcal{L}_{-}^{*}(t_i-t_{i-1}),\qquad \mathcal{L}(t_i-t_{i-1}):=\mathcal{L}_{+}(t_i-t_{i-1})+\mathcal{L}_{-}(t_i-t_{i-1}),$$

$$\left(\mathcal{L}_{+}^{*}(t_i-t_{i-1})F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x):=S_s(t_i-t_{i-1},x)\left(\mathcal{L}_{+}^{*}(0)F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x),\qquad \left(\mathcal{L}_{-}^{*}(t_i-t_{i-1})F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x):=S_s(t_i-t_{i-1},x)\left(\mathcal{L}_{-}^{*}(0)F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x),$$

$$\left(\mathcal{L}_{+}(t_i-t_{i-1})F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x):=S_s(t_i-t_{i-1},x)\left(\mathcal{L}_{+}(0)F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x),\qquad \left(\mathcal{L}_{-}(t_i-t_{i-1})F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x):=S_s(t_i-t_{i-1},x)\left(\mathcal{L}_{-}(0)F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x),$$

де $i\in(1,\ldots,k)$, $x=\left(x_{-s_2},\ldots,x_{s_1}\right)$, $s=s_1+s_2+1\geq 1$. Оператори $\mathcal{L}_{\pm}^{*}(0)$, $\mathcal{L}_{\pm}(0)$ визначається такими виразами:

$$\left(\mathcal{L}_{+}(0)F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x):=\int_0^\infty dVVF_{\Lambda,s+1}^{0}\left(x_{-s_2},\ldots,x_{s_1};q_{s_1}+\sigma,v_{s_1}-V\right),\ \left(\mathcal{L}_{-}(0)F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x):=\int_0^\infty dVVF_{\Lambda,s+1}^{0}\left(q_{-s_2}-\sigma,v_{-s_2}+V;x_{-s_2},\ldots,x_{s_1}\right),$$

$$\left(\mathcal{L}_{+}^{*}(0)F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x):=\int_0^\infty dVVF_{\Lambda,s+1}^{0}\left(x_{-s_2},\ldots,x_{s_1-1};q_{s_1},v_{s_1}^{*}\left(v_{s_1},V\right),q_{s_1}+\sigma,v_{s_1+1}^{*}\left(v_{s_1},V\right)\right),$$

$$\left(\mathcal{L}_{-}^{*}(0)F_{\Lambda}^{0}\right)_{s}(x):=\int_0^\infty dVVF_{\Lambda,s+1}^{0}\left(q_{-s_2}-\sigma,v_{-(s_2+1)}^{*}\left(v_{-s_2},V\right);q_{-s_2},v_{-s_2}^{*}\left(v_{-s_2},V\right);x_{-(s_2-1)},\ldots,x_{s_1}\right).$$

Якщо $F^0\in L_{\xi,\beta}^{\infty}$, то ряд (14) з початковою послідовністю функцій розподілу F^0 збігається рівномірно за x_0 на кожному компакті при $t\in(-\infty,\infty)$. Дійсно, розглянемо типовий доданок k-го члена ряду (14), наприклад, $\left(\prod_{i=1}^{k}\mathcal{L}_{+}(\tau_i)S(-t_k)F^0\right)_{1}(x_0)$. В підінтегральному виразі зробимо заміну змінних $V_i=v_{i-1}-v_i$, $i=1,2,\ldots,k$, тоді підінтегральна функція набуде вигляду

$$\prod_{i=1}^{k}\left(V_{i-1}(t_i-t_{i-1},\ldots)-v_i\right)F_{1+k}^{0}\left(X_0(-t_k,\ldots),\ldots,X_k(-t_k,\ldots)\right), \tag{15}$$

де функції $V_{i-1}(t_i-t_{i-1},\ldots)$ та $X_j(-t_k,\ldots)$ залежать від відповідних початкових даних. Використовуючи закон збереження енергії, отримаємо

$$\prod_{i=1}^{k}\left(\left|V_{i-1}(t_i-t_{i-1},\ldots)\right|+|v_i|\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\sqrt{\left(V_{i-1}(t_i-t_{i-1},\ldots)\right)^2}+|v_i|\right)\leq\prod_{i=1}^{k}\left(\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left(V_j^2(t_i-t_{i-1},\ldots)\right)^{1/2}\right)+|v_i|\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\left(\left(\sum_{j=0}^{i-1}v_j^2\right)^{1/2}+|v_i|\right)\leq 2^k\left(\sum_{j=0}^{k}v_j^2\right)^{k/2}.$$

Враховуючи для $F^0 \in L^{\infty}_{\xi,\beta}$ справедлива оцінка $\left|F^0_{1+k}\left(X_0\left(-t_k,\ldots\right),\ldots,X_k\left(-t_k,\ldots\right)\right)\right| \le \xi^{1+k}\left\|F^0\right\|\exp\left\{-\beta\sum_{i=0}^{k}\frac{m_i v_i^2}{2}\right\}$, та обчислюючи значення $2^k\sup_{\{v_i\}}\left(\sum_{j=0}^{k}v_j^2\right)^{k/2}\exp\left\{-\alpha\sum_{j=0}^{k}v_j^2\right\}$, приходимо до нерівності

$$\left|\prod_{i=1}^{k}\left(V_{i-1}\left(t_i-t_{i-1},\ldots\right)-v_i\right)F^0_{1+k}\left(X_0\left(-t_k,\ldots\right),\ldots,X_k\left(-t_k,\ldots\right)\right)\right| \le \left(2\alpha^{-1}\right)^{k/2}\sqrt{k!}\,\xi^{1+k}\left\|F^0\right\|\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\sum_{i=0}^{k}\frac{m_i v_i^2}{2}\right\}, \tag{16}$$

де $\alpha=\frac{1}{4}\beta\min_{i\in\mathbb{Z}^1}\{m_i\}$.

Оцінки, подібні (16), справедливі і для доданків k -го члена ряду (14), які визначаються операторами $\mathcal{L}^*_+\left(t_i-t_{i-1}\right)$. Це випливає з явного вигляду цих доданків, виразів $\left\{v^*_j\left(v_j,V\right)\right\}$ та закону збереження енергії. Аналогічно оцінюються доданки, які визначаються операторами $\mathcal{L}_-\left(t_i-t_{i-1}\right),\mathcal{L}_+\left(t_i-t_{i-1}\right)$ або $\mathcal{L}^*\left(t_i-t_{i-1}\right)$ і $\mathcal{L}\left(t_i-t_{i-1}\right)$.

Для $F^0 \in L^{\infty}_{\xi,\beta}$ значення інтегралів по швидкості в ряді (14) оцінюється величиною $\sqrt{\pi\alpha^{-1}}$. В результаті отримаємо оцінку для ряду (14)

$$\left|\left(U(t)F^0\right)_1(x_0)\right| \le \left\|F^0\right\|\xi\exp\left\{-\frac{\beta m_0 v_0^2}{4}\right\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k!}}\left(\frac{t}{t_0}\right)^k, \tag{17}$$

де $t_0=m_{\min}\beta\left(16\sqrt{2\pi}\xi\right)^{-1}$, $m_{\min}=\min_{i\in\mathbb{Z}^1}\{m_i\}$.

Аналогічно для розв'язку рівняння (8.b) для n – частинкової функції розподілу

$$F_{\Lambda,n}(t,Y)=\left(\mathfrak{A}(t)F^0_\Lambda\right)_n(Y):=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_1,k_2\ge 0\\ k_1+k_2=k}}\int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k}dx_{-(n_2+k_2)}\ldots dx_{-(n_2+1)}dx_{1+n_1}\ldots dx_{k_1+n_1}\mathfrak{A}_{1+k}\left(t,x_{-(n_2+k_2)},\ldots x_{-(n_2+1)},\{Y\},x_{1+n_1}\ldots,x_{k_1+n_1}\right)\times$$
$$\times F^0_{\Lambda,n+k}\left(x_{-(n_2+k_2)},\ldots,x_{k_1+n_2}\right), \tag{18}$$

яка зосереджена на скінченному відрізку $\Lambda\subset\mathbb{R}^1$ справедливі такі рівності:

$$\left(\left(\mathfrak{A}(t)F^0_\Lambda\right)_n,\varphi_n\right)=\left(\left(\tilde{\mathfrak{A}}(t)F^0_\Lambda\right)_n,\varphi_n\right)=\left(\left(U(t)F^0_\Lambda\right)_n,\varphi_n\right),$$

де φ_n – неперервно диференційована функція з компактним носієм, яка дорівнює нулю на множині заборонених конфігурацій. Функціонал $\left(\left(U(t)F^0_\Lambda\right)_n,\varphi_n\right)$ існує при $t\in(-\infty,\infty)$ внаслідок того, що для відображення $U(t)$ справедлива оцінка подібна оцінці (17).

Таким чином, справедливе твердження.

Теорема. Якщо послідовність початкових функцій розподілу F^0_Λ, $F^0_\Lambda\in L^{\infty}_{\xi,\beta}\cap L^1_{\alpha,0}$, в границі $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1$, $\langle N\rangle\to\infty$, $\langle N\rangle/|\Lambda|=1/v<\infty$ збігається рівномірно за x_0 на кожному компакті до послідовності F^0, $F^0\in L^{\infty}_{\xi,\beta}$, то існує слабкий розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (8.a), (8.b) при $t\in(-\infty,\infty)$, який є термодинамічною границею розкладу (10) (для виділеної частинки) або термодинамічною границею розкладу (18) (для системи n_1+n_2+1 частинок) і зображується функцією $\left(U(t)F^0\right)_1(x_0)$ (для виділеної частинки) або функцією $\left(U(t)F^0\right)_n(Y)$ (для системи n_1+n_2+1 частинок).

Доведемо, що термодинамічна границя розкладу (10) є слабким розв'язком рівняння (8.a). Нехай φ_1 – неперервно диференційована функція з компактним носієм. З умови теореми випливає, що функціонал $\left(\left(\mathfrak{A}(t)F^0_\Lambda\right)_1,\varphi_1\right)$, який визначається розкладом (10), в границі $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1$ збігається до функціоналу $\left(\left(U(t)F^0\right)_1,\varphi_1\right)$, який визначається розкладом (14). Дійсно, внаслідок того, що справедливі рівності (11), (13) та функція $\left(U(t)F^0_\Lambda\right)_1(x_0)$, де $F^0_\Lambda\in L^{\infty}_{\xi,\beta}\cap L^1_{\alpha,0}$, в границі $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1$, $\langle N\rangle\to\infty$, $\langle N\rangle/|\Lambda|=1/v<\infty$ збігається рівномірно за x_0 на кожному компакті до функції $\left(U(t)F^0\right)_1(x_0)$ при $t\in(-\infty,\infty)$, якщо справедлива така збіжність початкових функцій F^0_Λ до F^0 [8], отримаємо, що будуть виконуватись такі рівності:

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1}\left(\left(\mathfrak{A}(t)F^0_\Lambda\right)_1,\varphi_1\right)=\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1}\left(\left(U(t)F^0_\Lambda\right)_1,\varphi_1\right)=\left(\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1}\left(U(t)F^0_\Lambda\right)_1,\varphi_1\right)=\left(\left(U(t)F^0\right)_1,\varphi_1\right).$$

Функціонал $\Big(\big(U(t)F^0\big)_1,\varphi_1\Big)$ існує внаслідок оцінки (17). Аналогічно можна показати, що функціонали

$$\Big(\Big(\big(\mathcal{L}^*(0)-\mathcal{L}(0)\big)\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\Big)_1,\varphi_1\Big),\quad \Big(\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1,\Big(v_0\frac{\partial}{\partial q_0}\varphi\Big)_1\Big)$$

існують і збігаються в границі $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1$ до функціоналів

$$\Big(\Big(\big(\mathcal{L}^*(0)-\mathcal{L}(0)\big)U(t)F^0\Big)_1,\varphi_1\Big),\quad \Big(\big(U(t)F^0\big)_1,\Big(v_0\frac{\partial}{\partial q_0}\varphi\Big)_1\Big).$$

Оскільки $F_\Lambda^0\in L_{\xi,\beta}^\infty\cap L_{\alpha,0}^1$, то функція $\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1(x_0)$ диференційована за t в сильному сенсі в просторі L_α^1 і задовольняє рівняння (8.a). Помножимо ліву і праву частини рівняння (8.a) на функцію $\varphi_1(x_0)$ і проінтегруємо за змінною x_0. Отримаємо

$$\frac{d}{dt}\Big(\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1,\varphi_1\Big)=\Big(\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1,v_0\frac{\partial}{\partial q_0}\varphi_1\Big)+\Big(\Big(\big(\mathcal{L}^*(0)-\mathcal{L}(0)\big)\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\Big)_1,\varphi_1\Big). \tag{19}$$

Так як функціонали із правої частини рівності (19) мають границю при $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1$, то і функціонал $\frac{d}{dt}\Big(\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1,\varphi_1\Big)$ має границю і справедливе таке співвідношення:

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1}\frac{d}{dt}\Big(\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1,\varphi_1\Big)=\Big(\big(U(t)F^0\big)_1,v_0\frac{\partial}{\partial q_0}\varphi_1\Big)+\Big(\Big(\big(\mathcal{L}^*(0)-\mathcal{L}(0)\big)U(t)F^0\Big)_1,\varphi_1\Big).$$

Внаслідок останньої рівності функціонал $\Big(\big(U(t)F^0\big)_1,\varphi_1\Big)$ є диференційованим за t і справедлива рівність

$$\frac{d}{dt}\Big(\big(U(t)F^0\big)_1,\varphi_1\Big)=\Big(\big(U(t)F^0\big)_1,v_0\frac{\partial}{\partial q_0}\varphi_1\Big)+\Big(\Big(\big(\mathcal{L}^*(0)-\mathcal{L}(0)\big)U(t)F^0\Big)_1,\varphi_1\Big). \tag{20}$$

Дійсно, функціонал $\Big(\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1,\varphi_1\Big)$ неперервно диференційований за t і тому згідно (19)

$$\Big(\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1,\varphi_1\Big)=\int_0^t d\tau\frac{d}{d\tau}\Big(\big(\mathfrak{A}(\tau)F_\Lambda^0\big)_1,\varphi_1\Big)=\int_0^t d\tau\Big(\big(\mathfrak{A}(\tau)F_\Lambda^0\big)_1,v_0\frac{\partial}{\partial q_0}\varphi_1\Big)+\Big(\Big(\big(\mathcal{L}^*(0)-\mathcal{L}(0)\big)\mathfrak{A}(\tau)F_\Lambda^0\Big)_1,\varphi_1\Big). \tag{21}$$

Функція $\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1(x_0)$ сильно неперервна за t [6], отже фунціонали

$$\Big(\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1,\varphi_1\Big),\ \Big(\big(\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\big)_1,\Big(v_0\frac{\partial}{\partial q_0}\varphi\Big)_1\Big)\ \text{і}\ \Big(\Big(\big(\mathcal{L}^*(0)-\mathcal{L}(0)\big)\mathfrak{A}(t)F_\Lambda^0\Big)_1,\varphi_1\Big)$$

також є неперервними за t. Оскільки в границі $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1$ рівномірно за t на компактах вони збігаються до функціоналів

$$\Big(\big(U(t)F^0\big)_1,\varphi_1\Big),\ \Big(\big(U(t)F^0\big)_1,\Big(v_0\frac{\partial}{\partial q_0}\varphi\Big)_1\Big)\ \text{і}\ \Big(\Big(\big(\mathcal{L}^*(0)-\mathcal{L}(0)\big)U(t)F^0\Big)_1,\varphi_1\Big),$$

то і ці граничні функціонали неперервні за t і в рівності (21) можна здійснити граничний перехід під знаком інтегралу. Тому

$$\Big(\big(U(t)F^0\big)_1,\varphi_1\Big)=\int_0^t d\tau\Big(\big(U(\tau)F^0\big)_1,v_0\frac{\partial}{\partial q_0}\varphi_1\Big)+\Big(\Big(\big(\mathcal{L}^*(0)-\mathcal{L}(0)\big)U(\tau)F^0\Big)_1,\varphi_1\Big).$$

Оскільки підінтегральні функціонали неперервні по t, то функціонал $\Big(\big(U(t)F^0\big)_1,\varphi_1\Big)$ неперервно диференційованний за t. Таким чином, для $F^0\in L_{\xi,\beta}^\infty$ функція $\big(U(t)F^0\big)_1(x_0)$ визначає слабкий розв'язок задачі Коші для рівняння (8.a). Твердження, що термодинамічна границя розкладу (18) є слабким розв'язком рівняння (8.b) доводиться аналогічно.

5. Висновки

У статті описано еволюцію станів виділеної частинки в оточенні нескінченного числа частинок на основі ієрархії ББГКІ для випадку одновимірної системи частинок, які взаємодіють як пружні кулі. Побудовано розв'язки (7) задачі Коші для сформульованої ієрархії рівнянь (8), (9), які представляються розкладами по групах частинок, еволюція яких описується кумулянтами груп еволюційних операторів скінченного числа частинок, для початкових даних з простору послідовностей обмежених функцій. Доведення існування розв'язку задачі Коші таких рівнянь ґрунтується на методі переходу до термодинамічної границі. Зауважимо, що асимптотика побудованого розв'язку для виділеної частинки (7.a) в скейлінговій дифузійній границі [13] описуються кінетичним рівнянням Фоккера-Планка.

1. *Боголюбов Н. Н.* О стохастических процессах в динамических процесах // Физика елементарных частиц и атомного ядра. – 1978. – Т. 9, Вип. 4. – С. 501–579. 2. *Герасименко В. И.* О решениях уравнений Боголюбова для одномерной системы упругих шаров // ТМФ. – 1992. – Т. 91, № 1. – С. 120–128. 3. *Герасименко В. І., Сташенко М. О.* Нерівноважні кластерні розклади несиметричних систем частинок // Наук. Вісник ВДУ. – 2002. – № 4. – С. 5. 4. *Крилов М. М., Боголюбов М. М.* Записки кафедри математичної фізики АН УРСР. – 1939. – Т. 4. – С. 5. 5. *Лебовиц Л., Синай Я., Чернов Н.* Динамика масивного поршня, погруженного в идеальный газ // УМН. – 2002. – Т. 57, Вып. 6. – С. 3–85. 6. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров // УМН – 1990. – Т. 45, Вып.3. – С. 135–182. 7. *Синай Я. Г.* Динамика массивной частицы, окруженной конечным числом легких частиц // ТМФ. – 1999. – Т. 121, № 1. – С. 110–116. 8. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – P. 252. 9. *de Smedt P., Dürr P. Lebowitz J. L., Liverani C.* Quantum system in contact with a thermal environment rigorous treatment of a simple model // Commun. Math. Phys. – 1988. – Vol. 120. – P. 195–231. 10. *Erdös L.* Classical and quantum Brownian motion // Ann. Inst. H. Poincare. – 2007. – Vol. 8. – P. 621–685. 11. *Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O.* On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – Vol. 37. – P. 9861–9872. 12. *Petrina D. Ya.* Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy. – Kyiv: Inst. Math., 2008. – P. 400. 13. *Spohn H.* Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits // Review of Modern Physics. – 1980. – Vol. 53. – P. 569–615.

Надійшла до редколегії 21.10.2010 р.

УДК 517.9+531.19+530.145

В. І. Герасименко, проф., Ю. Ю. Федчун, студ.

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ В ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПОХІДНИХ БАГАТОЧАСТИНКОВИХ СИСТЕМ

Ієрархія рівнянь ББГКІ та дуальна ієрархія еволюційних рівнянь, якими описується еволюція нескінченночастинкових систем, сформульовані як еволюційні рівняння в функціональних похідних. На основі такого підходу побудовано розв'язки задач Коші для ієрархій таких рівнянь. Отримані результати узагальнено для систем частинок з багаточастинковим потенціалом взаємодії.

The BBGKY hierarchy and the dual BBGKY hierarchy which describe the evolution of infinite–particle systems are formulated as evolution equations in the functional derivatives. On the base of such approach solutions of the Cauchy problem of these hierarchies are constructed. The obtained results are generalized on systems with many–particle interaction potential.

1. Вступ

Як відомо, підхід до формулювання рівнянь, якими описуються системи з нескінченним числом ступенів вільності, наприклад, в квантовій теорії поля, у формі рівнянь у функціональних похідних та їх розв'язків за допомогою функціональних інтегралів виявився адекватним і продуктивним. Витоки цей підхід бере з [1 – 4], де рівняння у функціональних похідних використовувались при дослідженні багатокомпонентних систем. В фундаментальних працях М. Боголюбова [1], [2] ієрархію рівнянь ББГКІ сформульовано у вигляді одного рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних (s –частинкових) функцій розподілу, що дозволило обґрунтувати рівняння еволюції станів та існування рівноважних станів нескінченночастинкових систем. Пізніше на основі цих праць в [5] вперше було знайдено представлення для розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ побудоване не за теорією збурень [6].

У даній статті дуальна ієрархія рівнянь ББГКІ [7] сформульована у вигляді одного рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних спостережуваних і на основі такого підходу побудовано розв'язок задачі Коші для ієрархії таких рівнянь. У статті також за допомогою твірного функціоналу маргінальних функцій розподілу побудовано загальне представлення розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ, яке в інший спосіб було встановлено в [6], [8], [9].

2. Ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних

Розглянемо систему нефіксованого числа однакових частинок в просторі $\mathbb{R}^3$, з гамільтоніаном $n \geq 0$ частинкової системи $H_n = \sum_{i=1}^{n} K(x_i) + \sum_{i<j=1}^{n} \Phi(q_i - q_j)$, де $K(x_i) = \frac{p_i^2}{2m}$ (великий нерівноважний канонічний ансамбль [6]). Нехай u – гладка дійсна інтегровна функція. Розглянемо функціонал

$$(F(t),u) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int F_n(t,x_1,\dots,x_n) \prod_{i=1}^{n} u(x_i) dx_1 \dots dx_n, \tag{1}$$

який є твірним функціоналом для маргінальних функцій розподілу, тобто s –частинкова функція розподілу $F_s(t,x_1,\dots,x_s)$ визначається як функціональна похідна (похідна Ґато) s –го порядку цього функціоналу

$$F_s(t,x_1,\dots,x_s) = \frac{\delta^s (F(t),u)}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_s)} |_{u=0} . \tag{2}$$

Ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних функцій розподілу має вигляд [1],[5]

$$\frac{\partial}{\partial t}(F(t),u) = \int \left\{ K(x_1), \frac{\delta (F(t),u)}{\delta u(x_1)} \right\} (u(x_1)+1) dx_1 + \frac{1}{2!} \int\int \left\{ \Phi(q_1 - q_2), \frac{\delta^2 (F(t),u)}{\delta u(x_1) \delta u(x_2)} \right\} \prod_{i=1}^{2} (u(x_i)+1) dx_1 dx_2 \tag{3}$$

де $\{\cdot,\cdot\}$ – дужки Пуассона.

Встановимо зв'язок між твірним функціоналом