

7. Висновки

Розв'язано внутрішню геоцентричну задачу міжпланетного перельоту із врахуванням обмеженості тяги для моделей центрального однорідного та центрального ньютонівського гравітаційних полів. Задача, на відміну від класичних робіт, сформульована як задача оптимального перельоту з заданої планетоцентричної орбіти (кругової або еліптичної) на оптимальну гіперболічну орбіту. Виявлено, що у випадку врахування обмеженості тяги спостерігається зміна напрямку вектора тяги. До того ж за умови оптимальної схеми виконання маневру тяга в кінцевій точці активної ділянки направлена по дотичній до траєкторії. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів для моделей центрального однорідного та центрального ньютонівського гравітаційних полів з підходом імпульсної апроксимації та підтверджено важливість врахування обмеженості тяги.

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полёта (проблемы оптимизации). – М.: Наука, 1975. – 704 с. 2. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. – М.: Наука, 1976. – 744 с. 3. Харитонов А.М. К проблеме оптимизации орбитальных маневров космических аппаратов с ядерными ракетными двигателями // Проблемы управления и информатики. – 2005. – №5. – С. 120–135. 4. Харитонов О.М., Дехтяр О.Т. Оптимізація маневру переведення космічного апарату на сферу впливу планети при старті з еліптичної планетоцентричної орбіти // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2011. – Вип. 3. С. 81-84. 5. Azimov, D.M., Bishop, R.H., Transfer between Circular and Hyperbolic Orbits using Analytical Maximum Thrust Arcs, J. Spacecraft Rockets, 2003, vol. 40, no. 3, pp. 433-436. 6. Borowski, S.K., An overview of NTR /BNTR propulsion concepts, vehicle designs and future missions applications, in Proceedings of Space Nuclear Conference, San Diego, California, June 2005. 7. Rapp D. Human Missions to Mars: Enabling Technologies for Exploring the Red Planet. – Chichester, UK: Praxis Publishing Ltd, 2008. – 521 pp. 8. Taraba M., Zwintz K., Bombardelli C. et al., Project M³ – a study for manned Mars mission in 2031, // Acta Astronaut. – 2006. –58. – pp. 88-104. 9. Willis E.A. Optimal finite-thrust transfer between planet-approach and departure asymptotes with specified intermediate orbit, // NASA Technical note, NASA TN D-4534-1968. –1968.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 532.5

В. Каліон, канд. фіз.-мат. наук, О. Дідківська, студ.,
e-mail: vitaliy.kalion@gmail.com

РУХ ТРИВІСНОГО ЕЛІПСОІДА В КАПІЛЯРІ, ЩО ЗАПОВНЕНИЙ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Розглядається використання теорії збурень до розв'язання задачі про рух крові у дуже вузьких капілярах. В якості моделі червоного кров'яного тільця (або еритроцита) використовується тривісний еліпсоїд. Модель плазми крові – ньютонівська в'язка рідина. Результати порівнюються із результатами інших авторів.

Applications of perturbation method to the problems of blood flow in very narrow capillaries are examined. The red blood cell (or erythrocyte) was modeled with three-axial ellipsoid. The plasma of blood was modeled with Newtonian viscous fluid. The results were compared with results of other authors.

Вступ

Експериментальні дослідження процесів поширення поживних речовин в організмі людини зустрічаються з істотними труднощами, що обумовлені малими розмірами об'єктів, які досліджуються, похибками вимірів й, що особливо неприємно, неможливістю виміряти безпосередньо деякі параметри, як, наприклад, тиск плазми між еритроцитом та стінкою капіляра, натяг мембрани еритроцита при його переміщенні по дрібних судинах тощо Застосування математичного моделювання й обчислювальних засобів при дослідженні поширення речовин (особливо кисню) в організмі дозволило подолати ці труднощі й знайти ефективні підходи до розв'язання проблеми транспорту речовин в організмі людини. У зв'язку з обмеженістю можливостей комп'ютерів важливим є питання оптимізації розв'язання подібних математичних моделей.

До цього часу при моделюванні руху еритроцитів у вузьких капілярах усі автори використовують вісесиметричні моделі [1, 3-4]. Використання вісесиметричної моделі в якості моделі еритроциту пов'язано з роботою Дж.М. Фітц-Джеральда [3], який вперше побудував математичну модель й поставив задачу про усталений рух тривісного еліпсоїда у вузькому циліндричному капілярі. який він також показав, що з плином часу невісесиметрична форма еритроцита переходить у вісесиметричну. У той же час на усіх відомих мікрофотографіях [2] видно, що більшість еритроцитів у капілярах має суто невісесиметричну форму.

Проведені у статті дослідження дозволяють оцінити внесок "невісесиметричності" у витратні характеристики течії крові у вузьких капілярах та пояснити невідповідність математичної моделі Фітц-Джеральда й картини руху реальних еритроцитів.

Метод дослідження

Рух рідини в щілині, між еліпсоїдом та стінкою, товщина якої $H(\varphi, z) = R_0 - R_E(\varphi, z) \ll R_0$, з врахуванням припущень, що характерні для теорії мастильного шару, описується системою рівнянь Рейнольдса, яка в циліндричній системі координат (R, φ, Z) має вигляд

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\mu}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_Z}{\partial R} \right), \quad \frac{\partial (RV_R)}{\partial R} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (RV_Z)}{\partial Z} = 0, \quad (1)$$

де V_R, V_φ, V_Z – компоненти швидкості, P – тиск.

Граничні умови для системи (1) в системі відліку, що пов'язана з центром еліпсоїда, записуються у вигляді

$$R = R_0, \quad V_R = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_Z = -W_E; \quad R = R_E(\varphi, Z), \quad V_R = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_Z = 0. \quad (2)$$

Тут W_E – постійна швидкість руху еліпсоїда в нерухомій системі координат.

Перейдемо до безрозмірного вигляду рівнянь (1), (2), приймаючи в якості масштабу для довжин величину R_0 , для швидкості – V_* (поки невизначена), для тиску – $P_* = \mu V_* / R_0$. Вводячи для безрозмірних величин позначення

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad z = \frac{Z}{R_0}, \quad v_R = \frac{V_R}{V_*}, \quad v_\varphi = \frac{V_\varphi}{V_*}, \quad v_Z = \frac{V_Z}{V_*}, \quad p = \frac{PR_0}{\mu V_*}, \quad r_E = \frac{R_E}{R_0}, \quad w_E = \frac{W_E}{V_*},$$

отримаємо

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_Z}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial (rv_R)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (rv_Z)}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$r = 1, \quad v_R = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_Z = -w_E; \quad r = r_E(\varphi, z), \quad v_R = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_Z = 0. \quad (4)$$

Перші три рівняння системи (3) проінтегруємо один раз за r і отримаємо, з урахуванням (4), залежності між компонентами швидкості й градієнта тиску:

$$v_Z = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \left[(1-r_E^2) \frac{\ln r}{\ln r_E} - (1-r^2) \right] + w_E \left(\frac{\ln r}{\ln r_E} - 1 \right), \quad v_\varphi = \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cdot \left[(1-r_E) \frac{\ln r}{\ln r_E} - (1-r) \right],$$

де $p = p(\varphi, z)$.

Останнє рівняння системи (3) – рівняння нерозривності, проінтегруємо також один раз за r . Покладемо $r = 1$ і врахуємо граничну умову:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{r_E}^1 v_\varphi dr + \frac{\partial}{\partial z} \int_{r_E}^1 v_Z r dr = 0.$$

Першу інтегральну умову отримаємо з умови постійності витрати рідини через довільний переріз. Запишемо її в безрозмірному вигляді, підставимо отриманий вище вираз для v_Z та виконаємо інтегрування за r :

$$w_m + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{1-\eta_2^2}{2} + \frac{(1-\eta_2)^2}{\ln \eta_2} \right] d\varphi = -\frac{2}{\pi} w_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta_2}{\ln \eta_2} d\varphi,$$

$$\text{де } \eta_2 \equiv r_E^2 = \frac{1-z^2}{c^2 + \frac{\sin^2 \varphi}{a^2}}, \quad \eta_1 = \sqrt{\eta_2}, \quad a = \frac{A}{R_0}, \quad b = \frac{B}{R_0}, \quad c = \frac{C}{R_0}.$$

Для того, щоб швидкість руху тіла в капілярі була постійною необхідно, щоб проекція на вісь z головного вектора гідродинамічних сил, що діють на тіло, була нульовою. Перетворимо цей вираз, підставивши до нього (4) та v_Z й обчисливши необхідні похідні. Маємо другу інтегральну умову:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-c}^c \left\{ \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{1-\eta_2}{\ln \eta_2} + \left(1 + \frac{1-\eta_2}{\eta_2 \ln \eta_2} \right) \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{4w_E}{\eta_2 \ln \eta_2} \left[\eta_2 + \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} dz d\varphi = 0.$$

Таким чином розв'язання системи рівнянь звелось до розв'язання крайової задачі з двома інтегральними умовами. Остання, в свою чергу, точно розв'язується дуже важко. Тому задля раціоналізації і спрощення розв'язку використаємо метод малого параметру (малий параметр ε доведеться взяти не зовсім очевидний).

Вважаючи узагальнену швидкість $w_E = 1$ (тобто вибираючи в якості масштабу швидкості – швидкість тіла w_E), перепишемо отриману крайову задачу в наступному вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[F(\eta_1) \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial z} \left[F(\eta_2) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [G(\eta_2)], \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -c < z < c; \quad (5)$$

$$z = -c, \quad p = 0; \quad z = c, \quad p = \text{const} = -\Delta p; \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\text{де } F(\eta) = I_2(1, \eta) = - \left[\frac{1-\eta^2}{2} + \frac{(1-\eta)^2}{\ln \eta} \right], \quad G(\eta) = I_1(1, \eta) + \eta = \frac{1-\eta}{\ln \eta}; \quad (6)$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_{20}}{1 - \varepsilon \sin^2 \varphi}, \quad \eta_{20} = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right), \quad \varepsilon = 1 - \frac{a^2}{b^2}, \quad \eta_1 = \sqrt{\eta_2}. \quad (7)$$

З урахуванням цих позначень інтегральні умови (3),(4) набувають вигляду

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-c}^c \left\{ \frac{\partial p}{\partial z} \left[G(\eta_2) + (\eta_2 + G(\eta_2)) \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{4}{\ln \eta_2} \left[1 + \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} dz d\varphi = 0, \quad (8)$$

$$w_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial p}{\partial z} F(\eta_2) d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\eta_2) d\varphi. \quad (9)$$

Всі ці співвідношення містять малий параметр ε . Вважаючи $a \leq b$ (чого завжди можна досягти відповідним вибором осей прямокутної системи координат), переконуємося, що $0 \leq \varepsilon < 1$. Розглянемо випадок, коли $\varepsilon \ll 1$ і розв'язок крайової задачі може бути отримано методом збурень.

Оскільки розклад в ряд за малим параметром ε функцій, що входять в рівняння (5) під знаком похідної, можна подати наступним чином

$$F(\eta_1) = F(\eta_{10}) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin^2 \varphi \cdot \eta_{10} F'(\eta_{10}) + \frac{\varepsilon^2}{8} \cdot \sin^4 \varphi \cdot [\eta_{10}^2 F''(\eta_{10}) + 3\eta_{10} F'(\eta_{10})] + \dots, \quad (10)$$

$$F(\eta_2) = F(\eta_{20}) + \varepsilon \cdot \sin^2 \varphi \cdot \eta_{20} F'(\eta_{20}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \sin^4 \varphi \cdot [\eta_{20}^2 F''(\eta_{20}) + 2\eta_{20} F'(\eta_{20})] + \dots, \quad (11)$$

$$G(\eta_2) = G(\eta_{20}) + \varepsilon \cdot \sin^2 \varphi \cdot \eta_{20} G'(\eta_{20}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \sin^4 \varphi \cdot [\eta_{20}^2 G''(\eta_{20}) + 2\eta_{20} G'(\eta_{20})] + \dots, \quad (12)$$

То будемо шукати розв'язок крайової задачі у вигляді

$$\rho(\varphi, z) = \psi_0(z) + \varepsilon [\psi_1(z) \sin^2 \varphi + g_1(z)] + \frac{\varepsilon^2}{2} [\psi_2(z) \sin^4 \varphi + g_2(z) \sin^2 \varphi + k_2(z)] + \dots. \quad (13)$$

Відмітимо, що граничні умови при $\varphi = 0$ й $\varphi = \pi/2$ при цьому виконуються автоматично.

Підставляючи (10) – (13) в (5) і збираючи члени з однаковими степенями ε й $\sin^2 \varphi$, отримуємо наступну систему звичайних диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $\psi_0(z), \psi_1(z), g_1(z), \psi_2(z), g_2(z), k_2(z), \dots$, розв'язок кожного з яких залежить від розв'язку попереднього:

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} \right] = 4 \frac{d}{dz} [G(\eta_{20})], \quad (14)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{d\psi_1}{dz} \right] - 32F(\eta_{10})\psi_1 = \frac{d}{dz} \left[4G_1(\eta_{20}) - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} \right], \quad (15)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{dg_1}{dz} \right] = -16F(\eta_{10})\psi_1, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{d\psi_2}{dz} \right] - 128F(\eta_{10})\psi_2 = 64F_1(\eta_{10})\psi_1 + \frac{d}{dz} \left\{ 4[G_2(\eta_{20}) + 2G_1(\eta_{20})] - [F_2(\eta_{20}) + 2F_1(\eta_{20})] \frac{d\psi_0}{dz} + 2F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_1}{dz} \right\}, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{dg_2}{dz} \right] - 32F(\eta_{10})g_2 = -\frac{d}{dz} \left[F_1(\eta_{20}) \frac{dg_1}{dz} \right] - 48[2F(\eta_{10})\psi_2 + F(\eta_{10})\psi_1], \quad (18)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{dk_2}{dz} \right] = -16F(\eta_{10})g_2, \quad (19)$$

$$\text{де } F_1(\eta) = \eta F'(\eta), \quad F_2(\eta) = \eta^2 F''(\eta), \quad G_1(\eta) = \eta G'(\eta), \quad G_2(\eta) = \eta^2 G''(\eta). \quad (20)$$

Граничні умови для цих рівнянь повинні бути такими, щоб виконувались умови для тиску при $z = \mp c$ й інтегральна умова (8). З перших умов отримуємо

$$\psi_0(-c) = 0, \quad \psi_1(-c) = 0, \quad g_1(-c) = 0, \quad \psi_2(-c) = 0, \quad g_2(-c) = 0, \quad k_2(-c) = 0, \quad \dots, \quad (21)$$

$$\psi_1(c) = 0, \quad \psi_2(c) = 0, \quad g_2(c) = 0, \quad \dots, \quad (22)$$

а остання, після розкладу підінтегрального виразу в ряд за малим параметром і виконання інтегрування за φ , розпадається на такі інтегральні умови:

$$\int_{-c}^c \left[G(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + \frac{4}{\ln \eta_{20}} \right] dz = 0, \quad (23)$$

$$\int_{-c}^c \left[G(\eta_{20}) \left(\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} \right) + 2G_1(\eta_{20})\psi_0 - \frac{4}{\ln^2 \eta_{20}} \right] dz = 0, \quad (24)$$

$$\int_{-c}^c \left\{ G(\eta_{20}) \left(3 \frac{d\psi_2}{dz} + 4 \frac{dg_2}{dz} + 8 \frac{dk_2}{dz} \right) + 2G_1(\eta_{20}) \left(3 \frac{d\psi_0}{dz} + 3 \frac{d\psi_1}{dz} + 4 \frac{dg_1}{dz} \right) + \frac{d\psi_0}{dz} [2\eta_{20} + 2G(\eta_{20}) + 3G_1(\eta_{20})] + \frac{4}{\ln \eta_{20}} \left(2 - \frac{3}{\ln \eta_{20}} + \frac{6}{\ln^2 \eta_{20}} \right) \right\} dz = 0. \quad (25)$$

Після розв'язання (14) – (25) обчислюємо невідомі інтегральні параметри

$$\Delta p = -\psi_0(c) - \varepsilon g_1(c) - \frac{\varepsilon^2}{2} k_2(c) - \dots, \quad w_m = w_{m0} + \varepsilon w_{m1} + \frac{\varepsilon^2}{2} w_{m2} \dots. \quad (26)$$

Тут, як слідує з (9) після інтегрування за φ , маємо

$$w_{m0} = \frac{1}{4} F(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - G(\eta_{20}), \quad w_{m1} = \frac{1}{8} F(\eta_{20}) \left(\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} \right) + \frac{1}{8} F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - \frac{1}{2} G_1(\eta_{20}),$$

$$w_{m2} = \frac{1}{32} F(\eta_{20}) \left(3 \frac{d\psi_2}{dz} + 4 \frac{dg_2}{dz} + 8 \frac{dk_2}{dz} \right) + \frac{1}{16} F_1(\eta_{20}) \left(3 \frac{d\psi_1}{dz} + 4 \frac{dg_1}{dz} + 3 \frac{d\psi_0}{dz} \right) + \frac{3}{32} F_2(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - \frac{3}{8} [G_2(\eta_{20}) + 2G_1(\eta_{20})]. \quad (27)$$

Очевидно, що величини, які визначаються формулами (27), мають бути константами. Ця умова може слугувати для перевірки правильності розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР).

Розглянемо розв'язок отриманої крайової задачі для СЗДР, обмежуючись в ній рівняннями, що відповідають нульовому і першому наближенням до розв'язку вихідної, вже двовимірної, крайової задачі.

Для нульового наближення маємо рівняння (14). Проінтегрувавши його один раз і порівнявши результат з першою з формул (27), маємо

$$\frac{1}{4}F(\eta_{20})\frac{d\psi_0}{dz} - G(\eta_{20}) = const = w_{m0},$$

звідки отримуємо $\frac{d\psi_0}{dz} = 4 \frac{w_{m0} + G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})}$ і, продовжуючи інтегрування з урахуванням (21), знаходимо

$$\psi_0(z) = 4 \int_{-c}^z \frac{w_{m0} + G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz, \quad -\Delta p_0 \equiv \psi_0(c) = 4 \left[w_{m0} \int_{-c}^c \frac{dz}{F(\eta_{20})} + \int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz \right].$$

Залишається визначити константу w_{m0} , для чого використаємо умову (23). Маємо

$$w_{m0} = - \int_{-c}^c \left[\frac{G^2(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} + \frac{1}{\ln \eta_{20}} \right] dz \left[\int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz \right]^{-1}.$$

Таким чином, в нульовому наближенні, що відповідає тілу – еліпсоїду обертання, розв'язання задачі зводиться до квадратур. Очевидно, що

$$w_{m0} = -y_3^{(0)}(c) / y_2^{(0)}(c), \quad \Delta p_0 = -4 \left[w_{m0} \cdot y_1^{(0)}(c) + y_2^{(0)}(c) \right]. \quad (28)$$

Диференціальні рівняння першого наближення – це рівняння (15),(16). Додавши перше з них до другого, помноженого на 2, отримаємо

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \left(\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} \right) + F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - 4G_1(\eta_{20}) \right] = 0,$$

звідки, використовуючи співвідношення (21),(22),(24),(27), знайдемо послідовно

$$F(\eta_{20}) \left(\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} \right) + F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - 4G_1(\eta_{20}) = const = 8w_{m1},$$

$$\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} = \frac{8w_{m1} - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + 4G_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})},$$

$$\psi_1(z) + 2g_1(z) = \int_{-c}^z \frac{8w_{m1} - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + 4G_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz,$$

$$-\Delta p_1 \equiv g_1(c) = 4w_{m1} \int_{-c}^c \frac{dz}{F(\eta_{20})} - \frac{1}{2} \int_{-c}^c \frac{F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - 4G_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz,$$

$$w_{m1} = - \frac{\int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} \left[4G_1(\eta_{20}) - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} \right] dz + 2 \int_{-c}^c \left[G_1(\eta_{20}) \psi_0 - \frac{2}{\ln^2 \eta_{20}} \right] dz}{8 \int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz}.$$

Таким чином, як і в випадку нульового наближення, визначення інтегральних характеристик звелось до квадратур. Не важко переконатися, що

$$w_{m1} = -\frac{1}{8} y_3^{(1)}(c) / y_2^{(0)}(c), \quad \Delta p_1 = - \left[4w_{m1} y_1^{(0)}(c) + \frac{1}{2} y_2^{(1)}(c) \right]. \quad (29)$$

Таким чином, з врахуванням (28)-(29) із точністю до малих другого порядку малості можна знайти

$$w_m = w_{m0} + \varepsilon w_{m1}, \quad \Delta p = \Delta p_0 + \varepsilon \Delta p_1. \quad (30)$$

Однак визначення розподілу тиску на поверхні тіла потребує знання функцій $\psi_0(z), \psi_1(z), g_1(z)$. Якщо для визначення $\psi_0(z)$ достатньо розв'язати задачу Коші, то окреме визначення $\psi_1(z), g_1(z)$ приводить до необхідності розв'язання крайової задачі для рівняння (15) або (16).

Записавши рівняння (15) у вигляді $\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{d\psi_1}{dz} + F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - 4G_1(\eta_{20}) \right] = 32F(\eta_{10}) \psi_1$, замінімо його системою

$$\frac{du}{dz} = 32F(\eta_{10}) \psi_1, \quad \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{1}{F(\eta_{20})} \left[u - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + 4G_1(\eta_{20}) \right], \quad (31)$$

з граничними умовами $\psi_1(-c) = 0, \quad \psi_1(c) = 0$.

З метою розв'язання крайової задачі (31) багаторазово (для різних значень u_0) на відрізку $-c \leq z \leq c$ розв'язувалася наступні задачі Коші ($b=1,2$):

$$\frac{dy_1^{(b)}}{dz} = \frac{4[w_{m0} + G(\eta_{20})]}{F(\eta_{20})}, \quad \frac{dy_2^{(b)}}{dz} = \frac{y_3^{(b)} + 4G_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} - \frac{F_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} \frac{dy_1^{(b)}}{dz}, \quad \frac{dy_3^{(b)}}{dz} = 32y_2^{(b)}F(\eta_{20});$$

$$z = -c, \quad y_1^{(b)} = 0, \quad y_2^{(b)} = 0, \quad y_3^{(b)} = u_0.$$

Числові результати та їх аналіз

Результати числового експерименту представлені в таб.1 та на рис. 2.1 – 2.3. В таб. 1 наведені деякі інтегральні характеристики течії, що визначаються за формулами (30), як от: безрозмірна різниця тисків Δp , ефективна в'язкість η й параметр перетікання w_m , – в околі еритроцита, що рухається в циліндричному капілярі під дією постійної різниці тисків, коли моделлю червоного кров'яного тільця є тривісний еліпсоїд $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$, а також у випадку еліпсоїдів обертання $abc = (0,9; 0,9; 1,0)$, $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ та для "ефективного" еліпсоїда обертання $abc = (0,944; 0,944; 1,0)$. "Ефективний" еліпсоїд дістав свою назву від того, що він має той же самий переріз у площині $z = 0$, що й тривісний еліпсоїд $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$.

Таблиця 1

№ п.п.	Напівосі еліпса			Безрозмірна різниця тисків	Ефективна в'язкість	Безрозмірний параметр перетікання
	a	b	c			
1.	0,9	0,99	1,00	38,4623	2,6043	0,92310
2.	0,99	0,99	1,00	142,9727	9,0546	0,98688
3.	0,944	0,944	1,00	46,8131	3,1430	0,93088
4.	0,9	0,9	1,00	30,9246	2,1895	0,88276

Звертає на себе увагу менша величина безрозмірної різниці тисків й ефективної в'язкості, при русі тривісного еліпсоїду, порівняно з безрозмірною різницею тисків й ефективною в'язкістю при русі еліпсоїда обертання, що має той самий переріз. При цьому, що безрозмірні параметри перетікання для них відрізняються менше ніж на 1%.

Тому представляється важливим поряд із інтегральними характеристиками течії, розглянути її локальні характеристики, а це перш за все профіль тиску у мастильному шарі між еритроцитом і стінкою капіляру.

На рис. 2.1 представлено графік залежності приведенного тиску $(p + \Delta p) / \Delta p$ від приведенної повздовжньої координати z/c на відрізку $[-1, 1]$ й кута φ на проміжку $[0, 90^\circ]$ для тривісного еліпсоїда $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$.

На рис. 2.2 також наведено залежності приведенного тиску $(p + \Delta p) / \Delta p$ від приведенної повздовжньої координати z/c на відрізку $[-1, 1]$ при фіксованих значеннях кута $\varphi [0, 45^\circ, 90^\circ]$ для того ж тривісного еліпсоїда. На цьому ж рисунку також наведені значення тиску для еліпсоїдів обертання $abc = (0,9; 0,9; 1,0)$, $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ та $abc = (0,944; 0,944; 1,0)$. Останній еліпсоїд обертання має той же самий переріз в площині $z = 0$, що й тривісний еліпсоїд $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$.

Крім того на рис. 2.2 точками наведено результати розрахунків приведенного тиску для еліпсоїда обертання $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ з статей Річарда Скейлака [1,2] (сірі трикутники) та з дисертаційної роботи В.А. Каліона [1] (чорні круги). Звертає на себе увагу повний збіг усіх результатів.

За рахунок того, що екстремальні значення приведенного тиску для еліпсоїда обертання $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ на рис. 2.2 значно перевищують усі інші, на рис. 2.3 наведено ті ж самі результати, але в більшому масштабі. (Тому екстремальні значення приведенного тиску для еліпсоїда обертання $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ на рис. 2.3 відсутні).

З останнього рисунка очевидно, що максимальні значення профілю тиску при різних кутах φ для тривісного еліпсоїда суттєво менші ніж для еліпсоїда обертання, що відповідає значенню $a = 0,9$ ($\varphi = 0$) або $a = 0,99$ ($\varphi = 90^\circ$). Звернемо також увагу, що профіль приведенного тиску для еліпсоїда обертання при $a = 0,944$ (його площа перерізу при $z = 0$ дорівнює площі перерізу тривісного еліпсоїда) майже збігається з профілем приведенного тиску для тривісного еліпсоїда при $\varphi = 90^\circ$ ($a = 0,99$).

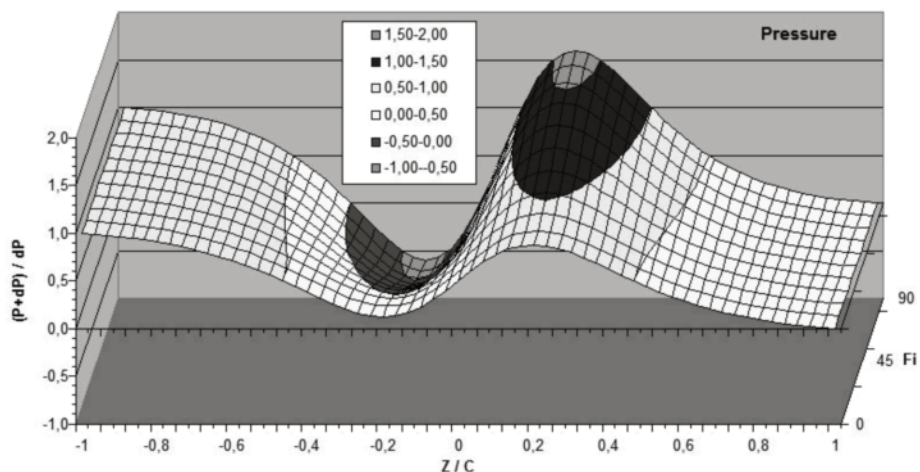


Рис. 2.1. Залежність приведенного тиску $(p + \Delta p) / \Delta p$ від приведенної повздовжньої координати z/c на відрізку $[-1, 1]$ й кута φ на проміжку $[0, 90^\circ]$ для тривісного еліпсоїда.

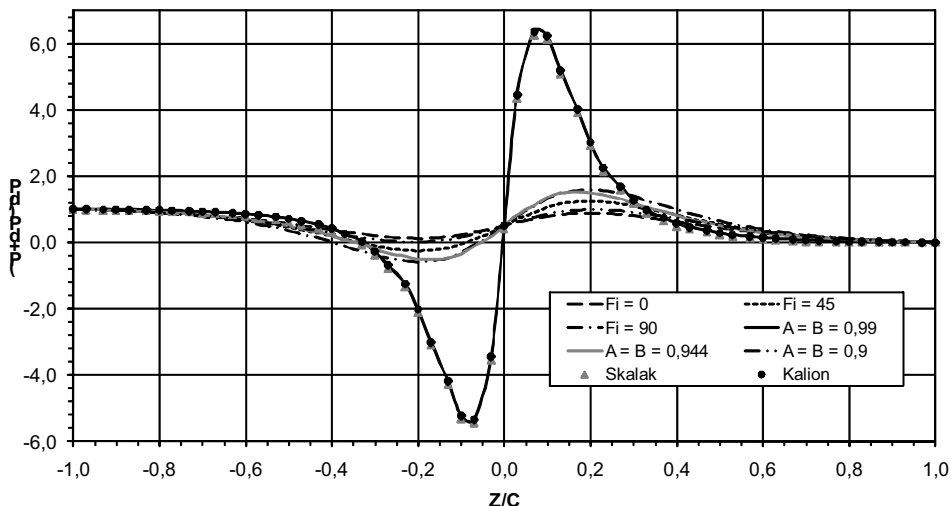


Рис. 2.2. Залежності приведенного тиску від повздожньої координати для тривісного еліпсоїда при різних значеннях кута ϕ , а також для різних еліпсоїдів обертання. Кругами й трикутниками позначені дані інших авторів

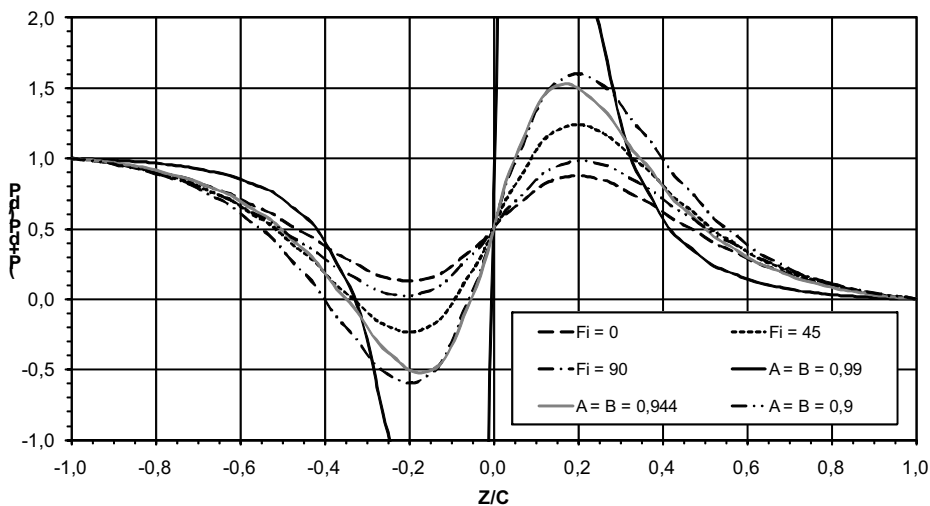


Рис. 2.3. Залежності приведенного тиску від повздожньої координати для тривісного еліпсоїда при різних значеннях кута ϕ , а також для різних еліпсоїдів обертання. (Позначення співпадають з рис.2.2)

Висновки

Результати розрахунків за побудованою математичною моделлю руху крові у дуже вузьких капілярах в нульовому наближенні (вісесиметричний еритроцит) повністю співпадають з існуючими результатами інших авторів. Профілі тиску й інтегральні характеристики при однаковій витраті рідини для тривісного еліпсоїда виявляються кращими за профілі тиску й інтегральні характеристики для еліпсоїда обертання, що має таку ж саму площу поперечного перерізу. А отже, проведене чисельне моделювання руху крові у дуже вузьких капілярах підтверджує можливість невісесиметричного руху еритроцитів у дуже вузьких капілярах й ставить під сумнів висновки, що були зроблені в роботі Дж.М. Фітц-Джеральда [3].

1. Калион В.А. Математические модели движения кровяных телец и их линейных агрегатов в капиллярах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1984. 2. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. – М., 1981. 3. Фитц-Джеральд Дж.М. Механика движения эритроцитов в очень узких капиллярах // Механика. – 1971. – № 4. – С. 90-118. 4. Tozeren H., Skalak R. Flow of elastic compressible spheres in tubes // J. Fluid Mech. – 1979. – Vol. 95. – № 6. – P. 743-760. 5. Zarda P.R., Chien S., Skalak R. Elastic deformations of red blood cells // J. Biomechanics. – 1977. – Vol. 10. – № 2. – P. 211-221.

Надійшла до редколегії 01.11.11