

УДК 539.3

О. Меліхов, асп.
e-mail: cfyzv@ukr.net

ВПЛИВ ЗМІННОЇ В РАДІАЛЬНОМУ НАПРЯМКУ ТОВЩИНИ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ГНУЧКОЇ ОРТОТРОПНОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Розглянуто нелінійну задачу магнітопружності ортотропної кільцевої пластини з анізотропною електропровідністю. Отримано розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформівний стан гнучких кільцевих пластин в механічному та магнітному полях. Наведено числовий приклад. Проведено аналіз впливу змінної товщини в радіальному напрямку на напружений стан пластини.

The nonlinear problem of magnetoelastic ortotropic circular plate with anisotropic electroconductivity is considered. The resolving system of differential equation for stress-strain state flexible ring plates in mechanical and magnetic fields was obtained. Numerical example is given. The analysis of affection of changing thickness in radial direction on strain state of plate is analyzed.

Вступ

У багатьох галузях науки та техніки використовуються нові матеріали з новими електромагнітними властивостями. Ці матеріали експлуатуються в умовах взаємодії електромагнітних та механічних полів. Це обумовлює великий інтерес до фізики спряжених полів.

У статті розглянуто деформування гнучкої ортотропної кільцевої пластини в магнітному полі.

Постановка задачі. Основні рівняння

Припускаючи, що на тіло діє зовнішнє магнітне поле, рівняння магнітопружності у лагранжевих змінних в області зайнятій тілом (внутрішня задача), запишуться наступним чином [1,3]:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \bar{H} = -\bar{J} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0; \operatorname{div} \bar{D} = 0;$$

$$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \rho (\bar{f} + \bar{f}^{\wedge}) + \operatorname{div} \rho_e, \quad (2)$$

де \bar{E} – напруженість електричного поля; \bar{H} – напруженість магнітного поля; \bar{D} – електрична індукція; \bar{B} – магнітна індукція; \bar{J} – густина електричного струму; ρ – густина матеріалу; \bar{f} – об'ємна механічна сила; \bar{f}^{\wedge} – об'ємна сила Лоренца; \bar{V} – швидкість деформування.

Для розглядуваного випадку квадратичної нелінійності [1, 4] припускаємо, що деформації та зсуви малі в порівнянні з кутами повороту елемента, а самі кути значно менші одиниці. Вважаємо, що пружні властивості матеріалу тіла ортотропні, його головні напрямки пружності співпадають з напрямками координатних ліній, електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij} , магнітної проникності μ_{ij} , діелектричної проникності ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). При цьому, виходячи з кристалографії [2], для розглядуваного класу ортотропних тіл з ромбічною кристалічною структурою тензори σ_{ij} , μ_{ij} , ε_{ij} мають діагональний вигляд. В цьому випадку матеріальні співвідношення, узагальнений закон Гука та вирази пондемоторних сил запишуться відповідно у вигляді [3, 5]

$$\bar{B} = \mu_{ij} \bar{H}; \bar{D} = \varepsilon_{ij} \bar{E}; \quad (3)$$

$$\bar{J} = \sigma_{ij} (\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}); \quad (4)$$

$$\rho \bar{f}^{\wedge} = \sigma_{ij} (\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}) \times \bar{B} + \bar{J}_{cm} \times \bar{B}. \quad (5)$$

При дослідженні деформації круглої ортотропної пластини в магнітному полі пластини віднесена до циліндричної системи координат r, θ, z так, щоб серединна площина пластини була віднесена до полярної системи координат та центр пластини знаходився в початку координат.

Розглядаємо кільцеву пластину в одновимірній постановці за просторовою координатою r . Виходячи з двовимірних рівнянь для осесиметричної задачі, покладаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; \quad v = 0; \quad E_r = 0; \quad B_\theta = 0; \quad S = 0; \quad H_\theta = 0;$$

$$f_\theta = 0; \quad f_\theta^{\wedge} = 0; \quad h = h(r),$$

тут S – зсувне зусилля.

З врахуванням діагонального вигляду тензорів електропровідності, повна система рівнянь, яка дозволяє описати геометрично нелінійну модель магнітопружності ортотропних кільцевих пластин, складається з [1, 6, 7] рівнянь магнітопружності:

$$\frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - N_\theta + r(f_r + \rho f_r^{\wedge}) = r \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} + r(f_z + \rho f_z^{\wedge}) = r \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta + rQ_r - rN_r\vartheta_r = 0; \tag{6}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r};$$

$$\sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z \right] = -\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{H_r^- - H_r^+}{h};$$

виразів для деформацій:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \vartheta_r^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \vartheta_r; \quad \chi_r = \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r}; \tag{7}$$

де $\vartheta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}$ – кут повороту нормалі;

співвідношень пружності:

$$N_r = \frac{e_r h}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_r + \nu_\theta \varepsilon_\theta); \quad N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_\theta + \nu_r \varepsilon_r); \tag{8}$$

$$M_r = \frac{e_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} (\chi_r + \nu_\theta \chi_\theta); \quad M_\theta = \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} (\chi_\theta + \nu_r \chi_r).$$

Тут позначено: $\nu_r = \nu_{\theta r}$, $\nu_\theta = \nu_{r\theta}$, $e_r \nu_\theta = e_\theta \nu_r$; ν_r , ν_θ – коефіцієнти Пуасона; e_r , e_θ – модулі Юнга; u , w – переміщення; N_r , N_θ – тангенційні зусилля; M_r , M_θ – згинні t моменти; Q_r – перерізує зусилля; χ_r , χ_θ – головні кривизни серединної поверхні пластини; B_r^\pm – відомі значення компонент тангенційних складових магнітної індукції на поверхнях пластини.

Компоненти сили Лоренца мають вигляд:

$$\rho f_r^\wedge = -h J_{\theta cm} B_z + \sigma_1 h \left[E_\theta B_z - \frac{\partial u}{\partial t} B_z^2 + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z \right];$$

$$\rho f_z^\wedge = 0,5 h J_{\theta cm} (B_r^+ + B_r^-) - \sigma_2 h \left[0,5 E_\theta (B_r^+ + B_r^-) - \right. \tag{9}$$

$$\left. - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ - B_r^-)^2 - 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z \right].$$

Розв'язувальна система рівнянь магнітопружності ортотропної кільцевої пластини

При побудові розв'язувальної системи рівнянь в якості шуканих функцій вибираємо $u, w, \nu_r, N_r, Q_r, M_r, B_z, E_\theta$, які також будемо використовувати при заданні початкових умов. Після відповідних перетворень співвідношень (6) – (9) отримуємо наступну розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в нормальній формі:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1 - \nu_r \nu_\theta}{e_r h} N_r - \frac{\vartheta_r}{r} u - 0,5 \vartheta_r^2;$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\vartheta_r; \tag{10}$$

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} = \frac{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}{e_r h^3} M_r - \frac{\nu_\theta}{r} \vartheta_r;$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} = \frac{1}{r} (\nu_\theta - 1) N_r + \frac{e_\theta h}{r^2} u - (f_r + \rho f_r^\wedge) + h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} = -\frac{1}{r} Q_r - (f_z + \rho f_z^\wedge) + h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = \frac{1}{r} (\nu_\theta - 1) M_r + \frac{e_\theta h^3}{12r^2} \vartheta_r + Q_r + N_r \vartheta_r;$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z \right] + \frac{B_r^+ + B_r^-}{h};$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{r} E_\theta.$$

Отримана зв'язана нелінійна система гіперболо-параболічних рівнянь магнітопружності восьмого порядку в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами описує симетричну деформацію гнучких кільцевих пластин змінної вздовж радіуса товщини.

Крайові умови для функцій, що характеризують механічну частину задачі, задаються як і в звичайній теорії оболонок. Крайові умови для електромагнітних функцій можуть задаватися через електричні поля або комбінації електричних та магнітних полів. Початкові умови задаються в класичному вигляді.

Методика розв'язання

Методика розв'язку нелінійної задачі магнітопружності кільцевої пластини змінної жорсткості вздовж радіальної координати полягає в послідовному використанні схеми Ньюмарка, метода квазілінеаризації та метода дискретної ортогоналізації [1, 8].

Для розділення змінних за часовою координатою застосовуємо неявну схему Ньюмарка, за допомогою якої нелінійна крайова задача зводиться до послідовності нелінійних одномірних крайових задач на кожному часовому кроці.

Наступний етап розв'язку послідовності нелінійних крайових задач магнітопружності базується на застосуванні методу квазілінеаризації, за допомогою якого крайова задача зводиться до послідовності лінійних крайових задач. Потім кожна з лінійних крайових задач послідовності на відповідному часовому інтервалі розв'язується чисельно за допомогою стійкого методу дискретної ортогоналізації.

Числовий приклад

Досліджено напружено-деформівний стан металевої (боро-алюміній) кільцевої пластини змінної товщини h , внутрішнього радіуса r_0 , зовнішнього r_1 , під дією нормальної складової механічного навантаження P_z , зовнішнього магнітного поля із заданим вектором магнітної індукції, та рівномірно розподіленого стороннього струму $J_{\theta 0}$. Контур пластини закріплені наступним чином:

$$u = 0; Q_r = 0; M_r = 0; B_z = 0,1 \sin \omega t \text{ при } r = r_0;$$

$$u = 0; w = 0; M_r = 0; B_z = 0; \text{ при } r = r_1,$$

де ω – кругова частота.

Параметри пластини:

$$\begin{aligned} r_0 &= 0,49 \text{ м}; r_1 = 0,86 \text{ м}; P_z = 3 \cdot 10^{-2} \text{ М}; e_r = 22,9 \text{ Н/М}_2; e_\theta = 10,7 \cdot 10^{10} \text{ Н/М}_2; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/М}; \\ \nu_r &= 0,262 \quad \nu_\theta = 0,32; \rho = 2600 \text{ кг/М}^3; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; \sigma_1 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{М)}^{-1}; \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{М)}^{-1}; \\ B_r^\pm &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ Т}; J_{\theta 0} = -5 \cdot 10^5 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі отримано на інтервалі часу $t = 10^{-2} \text{ с}$, крок інтегрування за часом $\Delta t = 10^{-3} \text{ с}$.

Досліджено вплив зміни товщини на напружено-деформівний стан кільцевої пластини. Товщина задана таким чином: $h = 2 \cdot 10^{-2} \left(1 + \alpha \frac{r}{r_1}\right)$, де $\alpha = \{-0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3\}$.

Результати розв'язку задачі подано нижче у вигляді графіків.

На рис. 1 подано прогин пластини $w(t)$ на внутрішньому краї пластини для різних α , де лінії 1, 2, 3, 4, 5, 6 відповідають значенням $\alpha = \{-0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3\}$ відповідно. Найбільший прогин відбувається, коли $\alpha = -0,3$, тобто пластини найбільш тонка, найменший – при $\alpha = 0,3$.

З рис.1 бачимо, що зі зменшенням товщини пластини збільшується прогин, що добре узгоджується із загальною теорією оболонки. Слід відмітити, що при $\alpha = -0,3$ прогин зростає настільки, що стан пластини наближається до межі дії нелінійної теорії пластин та оболонок, оскільки відношення w до h наближається до 10.

На рис. 2 подано розподіл складової електричного поля E_2 на внутрішньому краї пластини для різних α , де лінії 1, 2, 3, 4, 5, 6 відповідають значенням $\alpha = \{-0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3\}$ відповідно.

Результати розподілу складової електричного поля добре узгоджуються із результатами для прогину.

Отримані результати дозволяють робити висновки про вплив товщини пластини на її напружено-деформівний стан. Можна стверджувати, що магнітопружну нелінійну задачу для кільцевої пластини треба розв'язувати у зв'язаному вигляді.

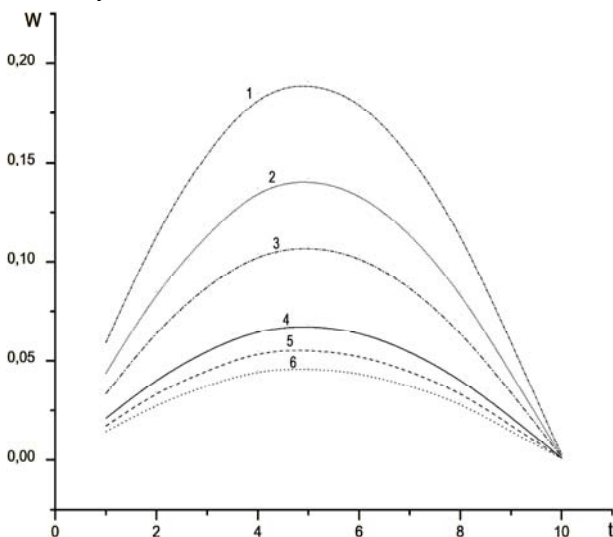


Рис. 1

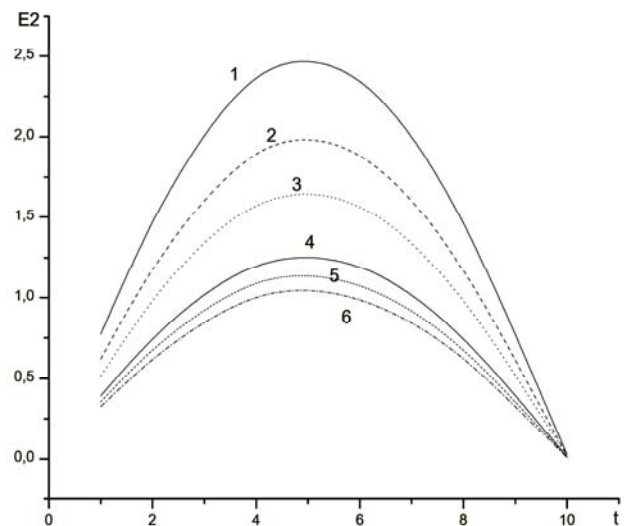


Рис. 2

Висновки

В статті розглянута нелінійна задача магнітопружності ортотропної кільцевої пластини із врахуванням ортотропної електропровідності. Наведена розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь, що описує напружено-деформівний стан гнучких кільцевих пластин з ортотропною електропровідністю, які знаходяться в силовому та магнітному полях. Наведено числовий приклад. Розглянуто вплив зміни товщини на напружено-деформівний стан кільцевої пластини.

1. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності: підручник. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. – 403 с. 2. Келли А., Гровс Г. Кристаллографія і дефекти в кристаллах. – М.: Мир, 1974. 3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Електродинаміка сплошних сред. – М.: Наука, 1982. 4. Мольченко Л.В., Лоос І.І., Індіамінов Р.Ш. Магнітопружність кінчної оболонки з урахуванням ортотропної електропровідності в геометрично нелінійній постановці // Вісн. КНУ, 2007. Вип. 2. – С. 85-90. 5. Стрэттон Д.А. Теорія електромагнетизма. – М.: Л.: ГТИИ, 1980. 6. Шапавалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. МТТ. – 1968. – № 1. С. 56-62. 7. Molchenko L.V. A Method for Solving Two-Dimensional Nonlinear Boundary value Problems of Magneto elasticity for Thin Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 5. – P. 490-495. 8. Molchenko L.V., Loos I.I., Plyas I.V. Stress Analysis of a Flexible Ring Plate with Circumferentially Varying Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 5. – P. 567-572.

Надійшла до редколегії 01.11.11

УДК 539.3

Ю. Токовий, канд. фіз.-мат. наук, **В. Мелешко**, д-р фіз.-мат. наук

**ФУНКЦІЇ НАПРУЖЕНЬ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА**

Розглянуто застосування запропонованого Дж. Дуголом подання компонентів вектора переміщень через три гармонічні функції для побудови аналітичного розв'язку неосесиметричної задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченної довжини. Розв'язок задачі будується у вигляді суперпозиції двох частин, для кожної з яких застосовується свій спосіб подання через гармонічні функції, що дозволяє задовольнити крайові умови для напружень на торця та бічній поверхні циліндра.

An application of the Dougall's representation for the displacement-vector components in terms of three harmonic functions to solution of the non-axisymmetric elasticity problem for a solid cylinder of finite length is considered. The solution is suggested in a form of superposition of two parts with their own representation through the harmonic functions. This allows for satisfaction of the boundary conditions in terms of boundary tractions on the both ends and lateral surface of the cylinder.

1. Вступ

З того часу (1863 р.) як Г. Ері запропонував підхід до розв'язування плоскої задачі теорії пружності шляхом зведення до бігармонічного рівняння для функції напружень, а Е. Бельтрамі вивів (1892 р.) рівняння суцільності в напруженнях, застосування потенціальних функцій виявилось ефективним підходом до розв'язання крайових задач механіки деформівного твердого тіла, який дозволив побудувати розв'язки низки важливих з теоретичної та прикладної точок зору двовимірних задач. Однак застосування цього підходу у просторі трьох змінних виявилось набагато складнішим у порівнянні з двовимірними задачами. Зокрема при розв'язуванні неосесиметричних задач для тіл обертання, наприклад кругового циліндра, отримано значно менше загальних розв'язків, ніж для випадку осесиметричного напружено-деформованого стану [7, 9, 12]. Це пов'язано з тим, що застосування даного підходу у тривимірних задачах теорії пружності вимагає зведення вихідної системи рівнянь до більшої кількості ключових рівнянь (як правило гармонічних чи бігармонічних), для яких можна було б зручно побудувати "каталоги" загальних розв'язків у певних системах координат. Окрім того, застосування таких загальних розв'язків до розв'язування задач для обмежених тіл вимагає наявності у них достатньої кількості вільних сталих, які б дозволили повністю задовольнити крайові умови на усій поверхні досліджуваного тіла.

Одним із перших у часі підходом до побудови загального розв'язку задачі теорії пружності для циліндра у тривимірній постановці виявився запропонований Дж. Дуголом [15] спосіб подання компонентів вектора переміщень $u_r(r, \theta, z)$, $u_\theta(r, \theta, z)$ та $u_z(r, \theta, z)$ через три гармонічні скалярні функції наступними співвідношеннями:

$$u_r = r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad u_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 4(1-\nu)\varphi \right) + \frac{\partial \omega}{\partial z} \tag{1}$$

Тут

$$\nabla^2 \varphi(r, \theta, z) = 0, \quad \nabla^2 \omega(r, \theta, z) = 0, \quad \nabla^2 \psi(r, \theta, z) = 0; \tag{2}$$

r, θ, z – циліндричні координати; ν – коефіцієнт Пуассона; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. По-

дання (1) дозволяє тотожно задовольнити рівняння Ляме задачі та виявляється зручним у задоволенні крайових умов на бічній поверхні безмежно довгого циліндра.

Слід зауважити, що для тривимірних задач теорії пружності Дж. Дугол запропонував декілька різних варіантів подання вектора переміщень через гармонічні функції. Зокрема, ним було розглянуто подання [14, с. 141], яке у циліндричній системі координат має вигляд

$$u_r = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial r} + (3-4\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad u_\theta = -2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{3-4\nu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{2z}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z}, \tag{3}$$

$$u_z = \frac{\partial \omega}{\partial z} - (3-4\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

де функції $\varphi(r, \theta, z)$, $\omega(r, \theta, z)$, $\psi(r, \theta, z)$ задовольняють рівняння (2). Побудовані у такий спосіб переміщення та відповідні до них напруження виявляються зручними для задоволення крайових умов, наприклад, на плоских сторонах безмежного шару.