УДК 539.3

Н. Гук, д-р фіз.-мат. наук, Н. Ободан, д-р техн. наук

ПРО ВІДНОВЛЕННЯ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ СПОСТЕРЕЖУВАНОЇ ОБОЛОНКИ

Розглянуто обернену задачу відновлення функції жорсткості циліндричної оболонки в варіаційній постановці. Запропоновано підхід до розв'язання задачі в умовах багатоекстремальності функціонала-нев'язки. Подано результати ідентифікації функції змінної товщини та кривини оболонки.

The problem of identification of inflexibility of cylindrical shell in the variation formulation is studied. The approach to take into account the multiextremal's functional-discrepancy is proposed for decision of inverse problem. Results of identification of variable thickness and curvature of shell are presented.

Вступ

Визначення властивостей спостережуваних об'єктів у теорії пружності пов'язують зазвичай з постановкою та розв'язанням обернених задач механіки деформівного твердого тіла [2]. При цьому розв'язок відшукується в класі функцій, близьких за значеннями й властивостями до деякого базового розв'язку, відомого як розв'язок еталонної задачі. Такій підхід забезпечує можливість застосування регуляризуючих алгоритмів [5, 1]. Для їхнього ефективного використання область визначення розв'язків оберненої задачі повинна бути компактною, регуляризуючий оператор – близький до точного, бо тоді відповідна задача оптимізації зводиться до задачі локальної оптимізації [1] і може бути розв'язана з використанням початкового наближення, яке повинне бути близьким до дійсного розв'язку.

Тим часом, реальні властивості системи, зокрема тонкостінної, можуть суттєво відрізнятися від еталонних, у зв'язку із чим методи регуляризації стають неефективними.

У тому випадку, коли діапазон можливих розв'язків оберненої задачі великий і (або) залежність розв'язків прямої задачі від розв'язків оберненої задачі немонотонна, зазначені особливості проявляються суттєво [4].

Розглянуті нижче задачі про відновлення дійсної жорсткості і (або) геометрії тонкостінної циліндричної оболонки мають такі властивості:

1) залежність функцій, що характеризують напружено-деформований стан, від зміни жорсткості й геометрії оболонки може бути нелінійною (при змінній товщині та кривизні);

2) діапазон можливих розв'язків оберненої задачі (функції, що описують товщину, кривизну й модуль пружності) не є малий.

Постановка оберненої задачі

Для спостережуваної тонкостінної оболонки розглядається обернена задача, яка полягає у визначенні невідомої вектор-функції $H(X)$ з компонентами, що характеризують товщину, кривизну оболонки й модуль пружності матеріалу, з якого вона виготовлена, за відомими (вимірюваними) значеннями деформацій оболонки в деяких точках γ_r її граничних поверхонь

$$\sigma_{\gamma_r} = \sigma^*_{\gamma_r}\ ,\ r = \overline{1,N}\ , \tag{1}$$

де $\sigma = \left\{ \varepsilon_{il\,r}, \chi_{il\,r} \right\}$ – вектор-функція, компонентами якої є тангенціальні та вигинні деформації серединної поверхні оболонки; σ^* – вимірювані значення цієї ж функції, отримані з показань датчиків вимірювання деформацій, встановлених на граничних поверхнях оболонки; N – число точок спостереження.

Математичні моделі прямої і оберненої задач

Для визначення розрахункових значень деформацій σ_{γ_r} у точках γ_r поверхні використовується математична модель спостережуваної деформівної оболонки змінної жорсткості (геометрії), яка описується системою нелінійних диференційних рівнянь:

$$\nabla_j\left(C_1^{ijkl}(H)\nabla_k u_l\right) - \nabla_j\left[C_1^{ijkl}\left(B_{kl}(H)w - \frac{1}{2}w_{,\xi_k}w_{,\xi_l}\right)\right] + q_i = 0\ , \tag{2}$$

$$\varepsilon^2\nabla_{ij}\left(C_2^{ijkl}(H)\nabla_{kl}w\right) - C_1^{ijkl}(H)\varepsilon_{kl}\left(B_{ij}(H) + \nabla_{ij}w\right) - q = 0\ , \tag{3}$$

де $\nabla_j(\cdot) = (\cdot)_{,x_j} = \dfrac{\partial(\cdot)}{\partial x_j}$; $\nabla_{ij}(\cdot) = \left((\cdot)_{,x_i}\right)_{,x_j} = \dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j}$; $B_{ij}(H)$, $C_1^{ijke}(H)$, $C_1^{ijke}(H)$ – невідомі функції оберненої задачі, що описують кривизну серединної поверхні оболонки, жорсткість оболонки на розтягування – стискання і вигинну жорсткість; $u_i(X,H)$ – тангенційні переміщення точок серединної поверхні оболонки в поздовжньому й окружному напрямках x_1, x_2, що збігаються з лініями кривизни серединної поверхні оболонки; $w(X,H)$ – нормальні переміщення точок серединної поверхні оболонки; $X = \{x_1, x_2\}$ – вектор просторових координат, пов'язаних із серединною поверхнею оболонки; $\varepsilon = \dfrac{h^2}{12R^2}$ – параметр; h, R – номінальні значення товщини й радіуса кривизни оболонки; L – довжина оболонки; q_i, q – складові розподілених поверхневих навантажень; $i,j,k,l = 1,2$, якщо $i \neq j$, то $k \neq l$, і по черзі $k=1$, $l=2$; $k=2$, $l=1$, прийнята угода про підсумовування по індексах, що повторюються.

В якості граничних умов вважаємо виконаними умови $w|_{\Gamma_0} = 0$ на деякій частині контуру Γ_0, решта умов на границі Γ є природними [3].

Тоді обернена задача визначення невідомої вектор-функції $H(X)$ може бути записана у варіаційній постановці в такий спосіб:

$$H = \arg\inf_{H(X)\in\overline{H}} J\,, \tag{4}$$

$$J = \int_\Omega (\sigma(X,H) - \sigma^*)^2 d\Omega\,, \quad H(X) \in \overline{H}\,,\ \sigma(X,H) \in \sigma^0\,,$$

де $\overline{H}$, σ^0 – області визначення функцій $H(X)$, $\sigma(X,H)$.

Компоненти вектор-функції $\sigma(X,H)$ формуються з геометричних співвідношень теорії оболонок у результаті підстановки в них компонент функції переміщень $U(u_1,u_2,w)$, отриманих зі співвідношень (2), (3).

Метод розв'язування прямої і оберненої задач

Розв'язок оберненої задачі $H(X)$ й відповідної їй прямої задачі $U(X,H)$ подамо у вигляді:

$$H = H_0 + \Delta H\,,\ U(X,H) = U_0(X,H_0) + \Delta U(X,H_0,\Delta H)\,,$$

де $U_0(X,H_0)$ – деякий неособливий розв'язок прямої задачі, що характеризує відомий стан оболонки; $\Delta U(X,H_0,\Delta H)$ – приріст до функції $U_0(X,H_0)$, який викликано зміною невідомої функції оберненої задачі H.

Тоді для опису стану оболонки запишемо функції $\sigma(X,H)$ у вигляді:

$$\sigma(X,H) = \sigma_0(X,U_0(H_0)) + \Delta\sigma\left(X,H_0,\Delta H\right),$$

а функціонал у варіаційному формулюванні (4) подамо в такий спосіб:

$$J = \int_\Omega ((\sigma_0(X,U_0(H_0)) + \Delta\sigma(X,H,\Delta H)) - \sigma^*)^2 d\Omega \to \min_{H_0,\Delta H}\,.$$

У [3] показано, що, якщо виконується умова

$$\|\Delta H\| \le \mu\|H_0\|\,,\ \mu < 1\,, \tag{5}$$

то $\|\Delta U\| \le \mu\|U_0\|$, а, отже, і $\|\Delta\sigma\| \le \mu\|\sigma_0\|$.

Тому, у випадку виконання умови (5) у нульовому наближенні маємо:

$$H_0^* = \arg\inf_{H_0} J_0\,,$$

$$J_0 = \int_\Omega (\sigma_0(X,U(H_0)) - \sigma^*)^2 d\Omega\,. \tag{6}$$

Для опису розв'язків H_0 будемо використовувати функціональний простір Соболєва $W_{2\Omega}^1$ з нормою:

$$\|H\|^2_{W_{2\Omega}^1} = \int_\Omega H^2 d\Omega + \int_\Omega (H')^2 d\Omega\,.$$

Введемо параметри $\delta_1^2 = \left(\int_\Omega H^2 d\Omega\right)$, $\delta_2^2 = \int_\Omega \left(\partial H/\partial x_1\right)^2 + \left(\partial H/\partial x_2\right)^2 d\Omega$, і зобразимо розв'язок H_0 як $H_0 = H_0(\delta_1,\delta_2)$. Тоді

$$H_0^*(\delta_1,\delta_2) = \arg\min_{\delta=\{\delta_1,\delta_2\}\in\overline{\Delta}} \int_\Omega (\sigma_0(X,U(\delta_1,\delta_2)) - \sigma^*)^2 d\Omega\,, \tag{7}$$

де $\overline{\Delta}$ – двовимірна область зміни параметрів δ_1, δ_2.

В якості функції H_0 може бути обрана будь-яка двохпараметрична функція $H_0 = f(\delta_1,\delta_2)$. Тоді розв'язок задачі (7) описує множину розв'язків H_0 з фіксованими значеннями δ_1,δ_2.

Для побудови функції J_0 використовується метод скінчених елементів стосовно системи (2), (3). При відомому початковому стані $U_0(X,H_0)$ й заданому ΔH прирости вузлових переміщень визначаються з системи:

$$K(U_0,H_0,\Delta H)\Delta U = R(U_0,H_0)\,, \tag{8}$$

де $U_0 = \left\{U_{0s}\right\}$, $\Delta U = \left\{\Delta U_s\right\}$, $s = \overline{1,S}$ – вектори вузлових переміщень і приростів; $H_0 = \left\{H_{0j}\right\}$, $\Delta H = \left\{\Delta H_j\right\}$, $j = \overline{1,M}$ – вектори вузлових значень невідомої функції оберненої задачі й прирощень; $K(U_0,H_0,\Delta H_0)$ – матриця жорсткості, $R(U_0,H_0)$ – вектор правих частин.

Для побудови розв'язку задачі (7) використовується метод продовження по параметрах δ_1,δ_2, так, щоб на кожному кроці виконувалася умова (5), вузлові переміщення на кроці t ($t = 1,2,3...$) процесу методу продовження визначаються в такий спосіб:

$$U_0^t = U_0^{t\,1} + \left.\frac{dU}{d\delta_i}\right|_{U=U_0} \Delta\delta_i^t\,, \quad \text{де } \left.\frac{dU}{d\delta_i}\right|_{U=U_0} = K^{\,1}R\frac{dH_0}{d\delta_i}\,;\ i = 1,2\,.$$

Рух по параметру δ_i при фіксованому значенні δ_j, $i,j=1,2$; $i \neq j$, триває, якщо на попередньому кроці ітераційного процесу продовження розв'язок прямої задачі U_0^{t-1} в точці $\delta^{t-1}=\left(\delta_1^{t-1},\delta_2^{t-1}\right)$ є неособливим, тобто виконується умова $\det K \neq 0$. У тому випадку, коли зазначена умова не виконується, здійснюється зміна параметра продовження.

Значення параметра $\mu(\delta_1,\delta_2)$ обчислюється за формулою $\mu = \left\| \sigma_0(H_0)-\sigma^* \right\| / \left\| \sigma_0 \right\|$.

Для одержання розв'язку задачі (6) визначаються прирости компонент вектора початкового наближення $\{H_{0j}\}$ з використанням ітераційної процедури методу Ньютона: $\Delta H^{(d)} = -Q\big|_{H^{(d-1)}} \Delta(H^{(d-1)})$, де $Q=\left(G^T G\right)^{-1} G^T$; d – номер кроку ітераційного процесу методу Ньютона.

Компоненти матриці градієнта G визначаються чисельно з використанням різницевого аналога:

$$G = \left\| \frac{\partial \Delta(X_r,H)}{\partial H_j} \right\| = \frac{\sigma(X_r,H_j+\Delta H_j)-\sigma(X_r,H_j)}{\Delta H_j},$$

де $\Delta(X_r,H)=\left(\sigma(X_r,\{H_j\})-\sigma_r^*\right)$ – лінеаризована функція нев'язки; ΔH_j – приріст до j-ої компоненти вектора невідомих оберненої задачі.

Аналіз результатів

Вибір виду двохпараметричної функції $H_0=f(\delta_1,\delta_2)$ здійснюється з урахуванням специфіки задачі. Так, для розв'язання задачі відновлення функції змінної товщини оболонки функцію $H_0=f(\delta_1,\delta_2)$ обрано у вигляді $H_0(\delta_1,\delta_2)=h\left[(1-\delta_1)+\delta_1\cos mx_2\sin n\pi x_1\right]$, де $-\pi \le x_2 \le \pi$; $0 \le x_1 \le 1$; $\delta_1 = h_{\max}-h_{\min}/h_{\max}+h_{\min} < 1$; $\delta_2^2=\left(\pi^2 n^2+m^2\right)$; h – номінальне значення товщини оболонки; $h_{\max}$, $h_{\min}$ – найбільше й найменше значення товщини оболонки; у розрахунках використовувалося співвідношення $n/m = L/\pi R$.

На рис. 1 для оболонки ($L/R=4$, $R/h=100$; $E=2\cdot 10^{11}$ *Па*, $\nu=0.3$) подано залежність $\left\|\sigma(X_r,H(\delta_1,\delta_2)\right\|_{l_2}$ від значень параметра δ_2, криві побудовано для оболонок, що перебувають під дією рівномірного зовнішнього тиску (суцільна крива відповідає випадку, коли значення параметра $\delta_1=0.2$, пунктирна – $\delta_1=0.1$).

З аналізу рис. 1 видно, що зміна функції $\left\|\sigma(X_r,H(\delta_1,\delta_2)\right\|_{l_2}$ залежно від значень параметра δ_2 носить немонотонний характер, тому функціонал задачі (6) є багатоекстремальним, а початкове наближення може бути отримано у вигляді:

$$H_0 = \arg\inf(\min_{\delta_1,\delta_2} J_0).$$

Проведено ідентифікацію змінної товщини відкритої оболонки ($L/R=4$, $R/h=100$; $E=2\cdot 10^{11}$ *Па*, $\nu=0.3$; φ – фіксований кут розхилу оболонки; $\varphi=\pi/2$), поздовжні кромки якої жорстко защемлені, на криволінійних кромках реалізовано умови свободного краю. На рис. 2, 3 наведено результати відновлення товщини оболонки для випадків, коли відхилення від номінальних значень товщини спостерігаються в деякій локальній області (відповідає рис. 2) і в усій області (відповідає рис. 3). Для розглянутих випадків мінімальне відхилення товщини від номінального значення становить 6% (на рис. позначене світлим кольором), максимальне – 25% (позначене темним кольором). Для розглянутих випадків розподілу функції товщини відносна похибка відновлення не перевищувала 2%.

Рис. 1. Залежність норми вектора значень деформацій від параметра змінюваності товщини

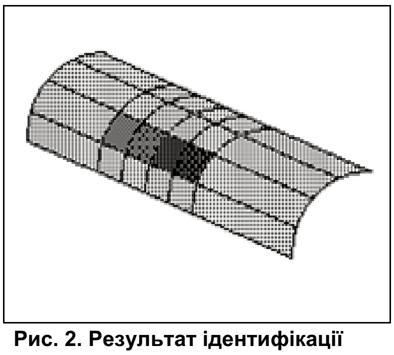

Рис. 2. Результат ідентифікації відхилень значень товщини оболонки в локальній області

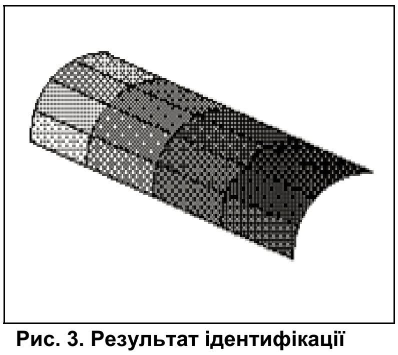

Рис. 3. Результат ідентифікації відхилень значень товщини оболонки в усій області Ω

Зміна кривизни оболонки досліджувалася як визначення початкового прогину поверхні оболонки ($L/R=4$, $R/h=200$; $E=2\cdot 10^{11}$ *Па*, $\nu=0.3$), у якості навантаження було обрано дію рівномірного осьового стискання

($R = 0.4R_{крит}$), початкове наближення $H_0 = f(\delta_1, \delta_2)$ обрано у вигляді: $H_0 = \delta_1(a + b\cos\delta_2 x_2)$; $a + b = 1$, де R_{max}, R_{min} – найбільше й найменше значення радіуса кривизни оболонки; $\delta_1 = (R_{max} - R_{min})/(R_{max} + R_{min}) < 1$; $\delta_2 = 2, 4, 6, 8, 10...$

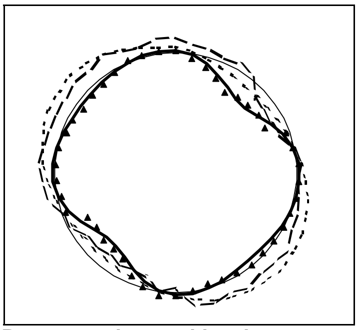

Рис. 4. Результат ідентифікації початкового прогину регулярної форми

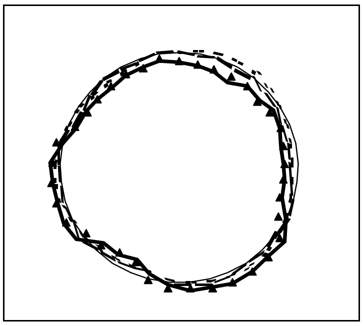

Рис. 5. Результат ідентифікації початкового прогину довільної форми

На рис. 4 наведений результат відновлення початкового прогину регулярної форми, на рис. 5 – результат відновлення прогину довільної форми (результат реконструкції позначений маркером ▲), тут же показано початкове наближення, отримане з розв'язку задачі (7) (позначено пунктирною лінією), і результат 1 ітерації методу Ньютона (позначений штрих-пунктирною лінією). Можна відзначити, що незалежно від характеру розподілу початкового прогину оболонки спостерігається задовільний результат відновлення функції прогину, погрішність не перевищує 4 %.

Висновки

Запропонований алгоритм дозволяє ефективно розв'язувати задачу відновлення змінної жорсткості та кривизни тонкостінної спостережуваної оболонки для широких областей можливих розв'язків, що описуються у просторі Соболєва.

1. Алифанов О.М., Артюхин М.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М., 1988. 2. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М., 2007. 3. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – М., 1989. 4. Ободан Н.І., Гук Н.А. Обернена задача визначення зовнішніх навантажень при деформації тонкостінних оболонок // Вісник 5. Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2011. – № 1. – С. 47–50. 6. Тихонов А.Н., Иванов В.К., Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – М., 1970.

Надійшла до редколегії 05.03.12