УДК 517.98

М. Андросенко, канд. фіз.-мат. наук, О. Кашпіровський, канд. фіз.-мат. наук

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕСКІНЧЕННОЇ СИММЕТРИЧНОЇ П'ЯТИДІАГОНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Для нескінченної системи різницевих рівнянь $U_{k-2}+U_{k+a}-a\left(U_{k-1}+U_{k+1}\right)+\lambda U_k=f_k$, $k\in Z$ визначено умови для параметрів $a\in R$ та $\lambda\in C$, при яких ця система має єдиний обмежений розв'язок $\left\{U_k,k\in Z\right\}$ при довільній обмеженій послідовності $\left\{f_k,k\in Z\right\}$. Отримано явне зображення для обмеженого розв'язку. Одержані результати проілюстровано прикладами з теорії сплайнів.

The conditions for parameters $a\in R$ and $\lambda\in C$ are obtained for infinite system of difference equations $U_{k-2}+U_{k+a}-a\left(U_{k-1}+U_{k+1}\right)+\lambda U_k=f_k$, $k\in Z$ upon which the system has unique bound solution $\left\{U_k,k\in Z\right\}$ on every bounded sequence $\left\{f_k,k\in Z\right\}$. Explicit representations of the solutions are obtained. Results are illustrated with examples from spline theory.

1. Вступ

Розглядається нескінченна симетрична п'ятидіагональна система різницевих рівнянь

$$u_{k-2}+u_{k+2}-a\left(u_{k-1}+u_{k+1}\right)+\lambda u_k=f_k\,, \tag{1}$$

де $k\in Z$, $a\in R$, $\lambda\in C$ задані числові параметри, $\left\{f_k,k\in Z\right\}=F$ – задана обмежена послідовність комплексних чисел, тобто послідовність із простору $l_\infty(Z)$ з нормою $\|F\|_{l_\infty(z)}=\sup\limits_{k\in Z}|f_k|$, $U=\{u_{k,}\ k\in Z\}$ – невідома послідовність із $l_\infty(Z)$.

Для зручності система (1) записується у вигляді операторно-різницевого рівняння у просторі $l_\infty(Z)$

$$LU=F\,, \tag{2}$$

де $L=L(a,\lambda)=\left(T^{-2}+T^2\right)-a\left(T^{-1}+T\right)+\lambda I$, I – одиничний оператор в $l_\infty(Z)$, $IU=U$, T – оператор зсуву координат вектора $u\in l_\infty(Z)$ на одну позицію праворуч. Отже, на одиничних векторах $E_j\in l_\infty(Z)$, $j\in Z$, у яких j-а координата дорівнює 1, а решта координат нульові, дія оператора T та його степенів визначається формулою

$$TE_k=E_{k+1},\quad T^mE_k=E_{k+m},\quad k,m\in Z\,.$$

Метою цієї роботи є знаходження умов на параметри a і λ, при яких система (1) має єдиний обмежений розв'язок U при довільній обмеженій послідовності F, та дослідження зображення обмеженого розв'язку системи (1). Раніше подібні питання для нескінченних стаціонарних систем різницевих рівнянь досліджувалися в працях Дороговцева А.Я. [1], Городнього М.Ф. [2].

2. Основна частина

Умови існування та єдиності обмеженого розв'язку системи (1) дає наступна теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб система різницевих рівнянь (1) із параметрами $a\in R$, $\lambda\in C$ мала єдиний обмежений розв'язок U при довільній обмеженій послідовності F необхідно і достатньо, щоб точка $(a,\lambda)\in R\times C$ не належала множині*

$$M=\left\{\left(a,\lambda:a\in R,\lambda\in R,\ \lambda_1(a)\le\lambda\le\lambda_2(a)\right)\right\},$$

$$\text{де}\ \ \lambda_1(a)=-2(|a|+1),\qquad \lambda_2(a)=\begin{cases}2+\dfrac{a^2}{4}, & \text{якщо}\quad |a|\le 4,\\ 2(|a|-1), & \text{якщо}\quad |a|\ge 4\end{cases}.$$

Зауваження. При довільному фіксованому параметрі $a\in R$ система (1) має єдиний обмежений розв'язок U для всіх значень параметра $\lambda\in C$, окрім тих, що належать проміжку $\left[\lambda_1(a),\lambda_2(a)\right]$. Зазначимо, що при $a=0$ система (1) еквівалентна сукупності двох незалежних трьохдіагональних систем, в яких u_k та f_k, в яких $k\in Z$ є відповідно парним чи непарним. Зауважимо також, що з теореми 1 випливає одержана М.Ф.Городнім [2] умова $\lambda\notin\left[-2,2\right]$ для існування та єдиності обмеженого розв'язку трьохдіагональної системи різницевих рівнянь $u_{k-1}+\lambda u_k+u_{k+1}=f_k$.

Доведення. Внаслідок [2] існування та єдиність обмежених розв'язків системи (1) еквівалентна відсутності у характеристичного рівняння

$$z^2-az^{-1}+\lambda-az+z^{-2}=0 \tag{3}$$

коренів з модулем рівним 1. З'ясуємо при яких $a\in R$ та $\lambda\in C$ характеристичне рівняння (3) має хоча б один корінь з модулем рівним одиниці.

Заміною

$$\omega=z+z^{-1} \tag{4}$$

рівняння (3) зведемо до квадратного рівняння

$$\omega^2-a\omega+\lambda-2=0\,. \tag{5}$$

Враховуючи властивості функції Жуковського $w = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right) = \frac{1}{2}\omega$ [4, с. 28], одержимо, що рівняння (3) матиме хоча б один корінь з модулем рівним 1 тоді і тільки тоді, коли рівняння (5) має корінь з проміжку $\left[-2,2\right]$. Із рівняння (5) знаходимо вираз для λ:

$$\lambda = 2 - \omega^2 + a\omega . \qquad (6)$$

Вважаючи a фіксованим дійсним числом, одержимо, що рівняння (3) матиме принаймні один корінь з модулем рівним 1 тоді і тільки тоді, коли параметр λ має зображення (6), в якому величина ω пробігає проміжок $\left[-2,2\right]$. Отже, такі значення λ задовольняють нерівності

$$\lambda_1(a) = \min_{\omega \in [-2,2]}\left(2 - \omega^2 + a\omega\right) \le \lambda \le \max_{\omega \in [-2,2]}\left(2 - \omega^2 + a\omega\right) = \lambda_2(a) .$$

Теорему 1 доведено.

Зробимо кілька зауважень щодо коренів характеристичного рівняння (3).

1. З симетричності (3) відносно z та z^{-1} випливає, що рівняння (3) має дві пари взаємнозворотніх коренів.
2. При $\lambda = 2 + \frac{a^2}{4}$ рівняння (5), а отже і (3), мають кратні корені. Зокрема, при $a = \pm 4$ та $\lambda = 6$ рівняння (3) має відповідно корені $z = 1$, $z = -1$ кратності 4. Для решти значень $a \in R$ та $\lambda = 2 + \frac{a^2}{4}$ рівняння (3) має два взаємно обернених корені кратності 2.
3. При $|a| \le 4$ тричлен $-\omega^2 + a\omega + 2$ не є монотонним на $\left[-2,2\right]$. Тому при $|a| \le 4$ та $2\left(|a| - 1\right) \le \lambda \le 2 + \frac{a^2}{4}$ всі чотири корені (3) мають модуль рівний 1. Для решти значень параметрів a і λ з множини M рівняння (3) має два взаємнообернених корені з рівним 1 модулем, один корінь з модулем меншим 1 і обернений до нього корінь з модулем більшим 1.
4. Для значень параметрів $a \in R$ та $\lambda \in C$, для яких рівняння (3) не має коренів з модулем рівним 1 позначимо через z_1 та z_2 корені рівняння (3) з модулями меншими 1. Тоді інші два корені рівняння (3) будуть відповідно дорівнювати z_1^{-1} та z_2^{-1}. При $\lambda = 2 + \frac{a^2}{4}$, $|a| > 4$ пари z_1, z_1^{-1} та z_2, z_2^{-1} будуть співпадати.

Розглянемо питання про зображення розв'язків системи (1), коли $(a, \lambda) \notin M$. Для цього спочатку знайдемо зображення розв'язку системи (1) для випадку, коли правою частиною є одиничний вектор E_0:

$$L(a, \lambda)G = E_0 . \qquad (7)$$

Теорема 2. *Для довільного фіксованого $a \in R$ та всіх $\lambda \in C \setminus [\lambda_1(a), \lambda_2(a)]$ обмежений розв'язок $G = \{g_k, k \in Z\}$ системи (7) допускає зображення координат* $g_k = \begin{cases} c_1 z_1^{|k|} + c_2 z_2^{|k|}, & \text{якщо } z_1 \ne z_2, \\ \left(c_1 + |k| c_2\right) z_1^{|k|}, & \text{якщо } z_1 = z_2 \end{cases}$, *де c_1, c_2 – деякі сталі, що залежать від a і λ.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $z_1 \ne z_2$, тобто $\lambda \ne 2 + \frac{a^2}{4}$, $(a, \lambda) \notin M$. Оскільки за визначенням числа z_1 та z_2 мають модулі менше одиниці, та послідовність G, що фігурує в теоремі 2 є обмеженою для довільних констант c_1, c_2. Крім того, враховуючи, що z_1, z_2 – корені характеристичного рівняння (3), члени послідовності G при довільних константах c_1, c_2 задовольняють всім однорідним рівнянням системи (7) з номерами $k \in \mathbb{Z}$ такими, що $|k| \ge 2$. Виберемо сталі c_1, c_2 так, щоб виконувалися рівняння системи (7) з номерами $k = 0$ та $k = \pm 1$.

Розглянемо рівняння системи (7) при

$$k = 0 : c_1\left(2z_1^2 - 2az + \lambda\right) + c_2\left(2z_2^2 - 2az_2 + \lambda\right) = 1$$

та при $k = 1$:

$$c_1\left(\left(z_1^3 + z_1\right) - a\left(z_1^2 + 1\right) + \lambda z_1\right) + c_2\left(\left(z_2^3 + z_2\right) - a\left(z_2^2 + 1\right) + \lambda z_2\right) = 0 .$$

Зауважимо, що при $k = -1$ внаслідок симетрії системи (7) одержується таке саме рівняння як і при $k = 1$.

З урахуванням характеристичного рівняння звідси для c_1 та c_2 одержимо систему рівнянь

$$c_1\left(z_1 - z_1^{-1}\right) + c_2\left(z_2 - z_2^{-1}\right) = 0 , \quad c_1\left(z_1^2 - z_1^{-2}\right) + c_2\left(z_2^2 - z_2^{-2}\right) = 1 ,$$

з якої методом Крамера знаходимо $c_1 = \left(\omega_1 - \omega_2\right)^{-1}\left(z_1 - z_1^{-1}\right)^{-1}$, $c_2 = -\left(\omega_1 - \omega_2\right)^{-1}\left(z_2 - z_2^{-1}\right)^{-1}$.

Отже, для випадку $(a,\lambda)\notin M$ та $z_1 \neq z_2$ маємо

$$g_k = g_k(z_1,z_2) = \frac{\dfrac{z_2^{|k|}}{z_2 - z_2^{-1}} - \dfrac{z_1^{|k|}}{z_1 - z_1^{-1}}}{\left(z_2 + z_2^{-1}\right) - \left(z_1 + z_1^{-1}\right)} = -\frac{\dfrac{z_2^{|k|+1}}{1 - z_2^2} - \dfrac{z_1^{|k|+1}}{1 - z_1^2}}{\left(z_2 + z_2^{-1}\right) - \left(z_1 + z_1^{-1}\right)}.$$

При $z_1 = z_2$ значення $g_k(z_1,z_1)$ визначимо як $\lim\limits_{z_2\to z_1} g_k(z_1,z_2)$. Оскільки при $z_2 \to z_1$ маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то враховуючи очевидну аналітичність $g_k(z_1,z_2)$ відносно параметрів $(a,\lambda)\notin M$, за правилом Лопіталя одержимо

$$g_k(z_1,z_1) = \left.\frac{\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z^{|k|+1}}{1-z^2}\right)}{\dfrac{d}{dz}\left(z + z^{-1}\right)}\right|_{z=z_1} = \frac{z_1^2}{\left(1 - z_1^2\right)^2}\left(|k| + \frac{1 + z_1^2}{1 - z_1^2}\right) z_1^{|k|},$$

де $|a| > 4$, $\lambda = \dfrac{a^2}{4} - 2$.

Теорему 2 доведено.

Безпосередньою перевіркою можна встановити наступне твердження.

Теорема 3. *Для $(a,\lambda)\notin M$ операторно-різницеве рівняння (2) при $F = \{f_k, k\in Z\} \in l_\infty(Z)$ має єдиний обмежений розв'язок U, який допускає зображення $U = \sum\limits_{k\in Z} f_k T^k G$, тобто $U_n = \sum\limits_{j\in Z} f_j g_{n-j}$, $n \in Z$.*

З теореми 3 випливає, що функція $g(n,j) = g_{n-j}$ двох дискретних аргументів $n, j \in Z$ є дискретною функцією Гріна для рівняння (1) в $l_\infty(Z)$.

Розглянемо два приклади нескінчених симетричних п'ятидіагональних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які пов'язані з методами сплайн-функцій [3].

Приклад 1. Побудова інтерполяційного сплайна п'ятої степені. Нехай $f(x)$ – неперервна обмежена на R разом із своїми першими шістьма похідними функція, $F = \{f_k, k\in Z\}$ – послідовність значень функції $f(x)$ в точках $x_k = kh,\ h > 0$, $f_k = f(x_k),\ k \in Z$. Відповідний інтерполяційний сплайн $S_5(f,x)$ шукаємо у вигляді розвинення в ряд

$$S_5(f,x) = \sum_{k\in Z} \alpha_k B_k^V(x) \tag{8}$$

за базисними В-сплайнами п'ятого степеня $B_k^V(x) = B^V\left((x - x_k)h^{-1}\right)$, де $B^V(\tau)$ – стандартний В-сплайн п'ятого степеня, який є комбінацією зрізаних степеневих функцій [3]

$$B^V(\tau) = \frac{1}{120}\sum_{k=-2}^{2} (-1)^k C_5^{k+2} (\tau - k)_+^5. \tag{9}$$

$$\text{Тут } (t-a)_+^\alpha = \begin{cases} (t-a)^\alpha, & \text{якщо } t > a, \\ 0, & \text{якщо } t \le a, \end{cases} \quad a\in R,\ \alpha \ge 0.$$

Зауважимо, що розвинення (9) для $B^V(\tau)$ можна записати у більш компактній формі з трьома доданками

$$B^V(\tau) = \frac{1}{120}\left(3 - |\tau|\right)_+^5 - \frac{1}{20}\left(2 - |\tau|\right)_+^5 + \frac{1}{8}\left(1 - |\tau|\right)_+^5.$$

Враховуючи, що при $|\tau| \ge 3$ сплайн $B^V(\tau)$ обертається в нуль, то для кожного $x \in R$ ряд (8) містить не більше шести відмінних від нуля доданків, а при кожному $x = x_k, k\in Z$, таких доданків рівно п'ять. Запишемо умови інтерполяції функції $f(x)$ в точках $x_k, k \in Z$:

$$S_5(f,x_k) = f_k,\quad \alpha_{k-2}B_{k-2}^V(x_k) + \alpha_{k-1}B_{k-1}^V(x_k) + \alpha_k B_k^V(x_k)\alpha_{k+1}B_{k+1}^V(x_k) + \alpha_{k+2}B_{k+2}^V(x_k) = f_k.$$

Оскільки для всіх $k\in Z$ маємо

$$B_{k-2}^V(x_k) = B_{k+2}^V(x_k) = B^V(2) = \frac{1}{120},\ B_{k-1}^V(x_k) = B_{k+1}^V(x_k) = B^V(1) = \frac{13}{60},\ B_k^V(x_k) = B^V(0) = \frac{11}{20},$$

то з умов інтерполяції одержимо

$$\frac{1}{120}\alpha_{k-2} + \frac{13}{60}\alpha_{k-1} + \frac{11}{20}\alpha_k + \frac{13}{60}\alpha_{k+1} + \frac{1}{120}\alpha_{k+2} = f_k,$$

$$\alpha_{k-2} + 26\alpha_{k-1} + 66\alpha_k + 26\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} = 120 f_k,\quad k\in Z. \tag{10}$$

Оскільки за припущенням функція $f(z)$ обмежена, то і сплайн $S_5(f,x)$, що її інтерполює, і послідовність параметрів $\{\alpha_k, k\in \mathbb{Z}\}$, що визначає сплайн $S_5(f,x)$ також мають бути обмеженими. Таким чином обмежений розв'язок системи (10) відповідає інтерполяційному сплайну $S_5(f,x)$. Система (10) є системою вигляду (1) із значеннями параметрів $a=-26$, $\lambda=66$, які задовольняють умовам теореми 1. Характеристичне рівняння для системи (10) має вигляд $z^{-2}+z^2+26\left(z+z^{-1}\right)+66=0$. Виконуючи підстановку (4), приходимо до квадратного рівняння $\omega^2+26\omega+64=0$. Звідси знаходимо $\omega_{1,2}=-13\pm\sqrt{105}$, $z_1=-0{,}43\ldots$, $z_2=-0{,}042\ldots$.

Отже, за теоремою 3 параметри $\alpha_k, k\in Z$, сплайна $S_5\left(f,x\right)$ є комбінацією прогресій із знаменниками z_1 та z_2.

Приклад 2. Задача згладжування експериментальних даних за допомогою кубічних сплайнів [3].

Нехай $\{y_k, k\in Z\}$ – послідовність вимірювань значень функції $f\left(x\right)$, де $f\in C^4\left(R\right)$ в точках $x_k=kh,\ h>0,\ k\in Z$. Вважаємо, що у вимірюваннях y_k присутня похибка $y_k-f\left(x_k\right)=\varepsilon_k$. Розглядається задача побудови кубічного сплайна $S_3\left(x\right)$ "близького" до інтерполяційного, який повинен "виправити" похибки вимірювань. Такий сплайн називають згладжуючим. Для його визначення мінімізується квадратичний функціонал

$$J_1\left(f\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f''\left(x\right)\right|^2dx+\rho^{-1}\sum_{k\in Z}\left(f_k-y_k\right)^2,$$

що визначений на функціях $f(x)$ із простору Соболєва $W_2^2\left(R\right)$, $f_k=f\left(x_k\right)$, $k\in Z$ [3]. Якщо параметр ρ прямує до нуля, то, очевидно, згладжуючий сплайн $S_3\left(x\right)$ буде прямувати до сплайна, що інтерполює у вузлах x_k значення y_k, $k\in Z$. На проміжку $\left[x_k,x_{k+1}\right]$, $k\in Z$, для згладжуючого сплайна розглядається розвинення

$$S_3\left(x\right)=f_k\left(1-\tau\right)+f_{k+1}\tau+\frac{h^2}{6}\tau\left(1-\tau\right)\left(\left(2-\tau\right)M_k+\left(1+\tau\right)M_{k+1}\right),$$

де $\tau=\left(x-x_k\right)h^{-1}$ – локальна координата, $M_k=S_3''\left(x_k\right)$, $k\in Z$. Значення f_k згладжуючого сплайна у вузлах x_k лінійно залежить від y_k та M_k: $f_k=y_k-\rho h^{-1}\left(M_{k+1}-2M_k+M_{k-1}\right)$, $k\in Z$. У свою чергу величини $M_k, k\in Z$ задовольняють системі рівнянь типу (1):

$$M_{k+2}+M_{k-2}-\left(4-\alpha\right)\left(M_{k+1}+M_{k-1}\right)+\left(6+4\alpha\right)M_k=\rho^{-1}h\left(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}\right),\qquad(11)$$

де $\alpha=\frac{1}{6}\rho^{-1}h^3>0$.

Перевіримо виконання умов теореми 1 для системи (10). Оскільки $a=4-\alpha,\ \lambda=6+4\alpha$, то при $0<\alpha\le 8$ одержимо $\lambda-\lambda_2\left(a\right)=6+4\alpha-\left(2+\frac{1}{4}\left(4-\alpha\right)^2\right)=6\alpha-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{\alpha}{4}\left(24-\alpha\right)>0$.

Якщо $\alpha>8$, то $|a|=\alpha-4>0$, $\lambda-\lambda_2\left(a\right)=\lambda-2\left(|a|-1\right)=4\alpha+6-2\left(\alpha-5\right)=2\alpha+16>32>0.$

Таким чином, за теоремою 1 для довільних додатних значень параметрів ρ і h система (11) має єдиний обмежений розв'язок $\{M_k,\ k\in Z\}$, що відповідає згладжуючому сплайну $S_3\left(x\right)$.

3. Висновки

Описано необхідні і достатні умови існування єдиного обмеженого розв'язку нескінченої симетричної пятидіагональної системи різницевих рівнянь. Знайдено зображення розв'язку такої системи за допомогою дискретної функції Гріна. Одержані теоретичні результати проілюстровано прикладами з теорії сплайнів.

1. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк. –1992. – 319 с. 2. Городній М.Ф. Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "диференціальні рівняння". – Київ, 2004. – 32 с. 3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с. 4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Надійшла до редколегії 25.06.11

УДК 629.7.015

О. Харитонов, канд. фіз.-мат. наук

УРАХУВАННЯ ОБМЕЖЕНОСТІ ТЯГИ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ МІЖПЛАНЕТНИХ ПЕРЕЛЬОТІВ З КОМБІНУВАННЯМ ДІЛЯНОК ВЕЛИКОЇ ТА МАЛОЇ ТЯГИ

На прикладі задачі про виконанні перельоту типу Гомана досліджено вплив обмеженості тяги на оптимальну траєкторію та оптимальні параметри рушійної системи космічного апарату з дворежимною ядерною енергосиловою установкою, здатною працювати в режимах великої та малої тяги. Розв'язки, отримані у припущенні обмеженості тяги, порівняно з розв'язками, справедливими для імпульсної апроксимації активних ділянок великої тяги.

The optimal Hohmann-type transfers of the space vehicle with bi-modal nuclear thermal propulsion are considered. The investigation of the effect of the engine thrust limitation on the optimal solution is investigated. The optimal combinations of high- and low-thrust arcs are analyzed for the models of finite and infinite engine thrust.

Вступ. Дана робота продовжує проведене в [4] дослідження ефективності комбінування великої та малої тяги при здійсненні міжпланетних перельотів. Як показано в [4] найбільші переваги від комбінування великої та малої тяги можна отримати при використанні дворежимних ядерних ракетних двигунів (ДЯРД). В той же час, дослідження