

теми (10) відповідає інтерполяційному сплайну $S_5(f, x)$. Система (10) є системою вигляду (1) із значеннями параметрів $a = -26$, $\lambda = 66$, які задовольняють умовам теореми 1. Характеристичне рівняння для системи (10) має вигляд $z^{-2} + z^2 + 26(z + z^{-1}) + 66 = 0$. Виконуючи підстановку (4), приходимо до квадратного рівняння $\omega^2 + 26\omega + 64 = 0$. Звідси знаходимо $\omega_{1,2} = -13 \pm \sqrt{105}$, $z_1 = -0,43\dots$, $z_2 = -0,042\dots$.

Отже, за теоремою 3 параметри $\alpha_k, k \in Z$, сплайна $S_5(f, x)$ є комбінацією прогресій із знаменниками z_1 та z_2 .

Приклад 2. Задача згладжування експериментальних даних за допомогою кубічних сплайнів [3].

Нехай $\{y_k, k \in Z\}$ – послідовність вимірювань значень функції $f(x)$, де $f \in C^4(R)$ в точках $x_k = kh$, $h > 0$, $k \in Z$. Вважаємо, що у вимірюваннях y_k присутня похибка $y_k - f(x_k) = \varepsilon_k$. Розглядається задача побудови кубічного сплайна $S_3(x)$ "близького" до інтерполяційного, який повинен "виправити" похибки вимірювань. Такий сплайн називають згладжуючим. Для його визначення мінімізується квадратичний функціонал

$$J_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|^2 dx + \rho^{-1} \sum_{k \in Z} (f_k - y_k)^2,$$

що визначений на функціях $f(x)$ із простору Соболева $W_2^2(R)$, $f_k = f(x_k)$, $k \in Z$ [3]. Якщо параметр ρ прямує до нуля, то, очевидно, згладжуючий сплайн $S_3(x)$ буде прямувати до сплайна, що інтерполює у вузлах x_k значення y_k , $k \in Z$. На проміжку $[x_k, x_{k+1}]$, $k \in Z$, для згладжуючого сплайна розглядається розв'язок

$$S_3(x) = f_k(1-\tau) + f_{k+1}\tau + \frac{h^2}{6}\tau(1-\tau)((2-\tau)M_k + (1+\tau)M_{k+1}),$$

де $\tau = (x - x_k)h^{-1}$ – локальна координата, $M_k = S_3''(x_k)$, $k \in Z$. Значення f_k згладжуючого сплайна у вузлах x_k лінійно залежить від y_k та M_k : $f_k = y_k - \rho h^{-1}(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1})$, $k \in Z$. У свою чергу величини M_k , $k \in Z$ задовольняють системі рівнянь типу (1):

$$M_{k+2} + M_{k-2} - (4-\alpha)(M_{k+1} + M_{k-1}) + (6+4\alpha)M_k = \rho^{-1}h(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}), \quad (11)$$

де $\alpha = \frac{1}{6}\rho^{-1}h^3 > 0$.

Перевіримо виконання умов теореми 1 для системи (10). Оскільки $a = 4 - \alpha$, $\lambda = 6 + 4\alpha$, то при $0 < \alpha \leq 8$ одержи-

$$\text{мо } \lambda - \lambda_2(a) = 6 + 4\alpha - \left(2 + \frac{1}{4}(4-\alpha)^2\right) = 6\alpha - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha}{4}(24 - \alpha) > 0.$$

Якщо $\alpha > 8$, то $|a| = \alpha - 4 > 0$, $\lambda - \lambda_2(a) = \lambda - 2(|a| - 1) = 4\alpha + 6 - 2(\alpha - 5) = 2\alpha + 16 > 32 > 0$.

Таким чином, за теоремою 1 для довільних додатних значень параметрів ρ і h система (11) має єдиний обмежений розв'язок $\{M_k, k \in Z\}$, що відповідає згладжуючому сплайну $S_3(x)$.

3. Висновки

Описано необхідні і достатні умови існування єдиного обмеженого розв'язку нескінченної симетричної п'ятидіагональної системи різницевих рівнянь. Знайдено зображення розв'язку такої системи за допомогою дискретної функції Гріна. Одержані теоретичні результати проілюстровано прикладами з теорії сплайнів.

1. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк. –1992. – 319 с. 2. Городній М.Ф. Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "диференціальні рівняння". – Київ, 2004. – 32 с. 3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с. 4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Надійшла до редколегії 25.06.11

УДК 629.7.015

О. Харитонов, канд. фіз.-мат. наук

УРАХУВАННЯ ОБМЕЖЕНОСТІ ТЯГИ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ МІЖПЛАНЕТНИХ ПЕРЕЛЬОТІВ З КОМБІНУВАННЯМ ДІЛЯНОК ВЕЛИКОЇ ТА МАЛОЇ ТЯГИ

На прикладі задачі про виконанні перельоту типу Гомана досліджено вплив обмеженості тяги на оптимальну траєкторію та оптимальні параметри рушійної системи космічного апарату з дворежимною ядерною енергосиловою установкою, здатною працювати в режимах великої та малої тяги. Розв'язки, отримані у припущенні обмеженості тяги, порівняно з розв'язками, справедливими для імпульсної апроксимації активних ділянок великої тяги.

The optimal Hohmann-type transfers of the space vehicle with bi-modal nuclear thermal propulsion are considered. The investigation of the effect of the engine thrust limitation on the optimal solution is investigated. The optimal combinations of high- and low-thrust arcs are analyzed for the models of finite and infinite engine thrust.

Вступ. Дана робота продовжує проведення в [4] дослідження ефективності комбінування великої та малої тяги при здійсненні міжпланетних перельотів. Як показано в [4] найбільші переваги від комбінування великої та малої тяги можна отримати при використанні дворежимних ядерних ракетних двигунів (ДЯРД). В той же час, дослідження

маневрів космічних апаратів (КА) з ядерними ракетними двигунами (ЯРД) або ДЯРД має виконуватися із застосуванням підходів, що відрізняються від прийнятих у механіці космічного польоту для розрахунку маневрів КА з двигунами великої тяги. Для КА з ЯРД і ДЯРД підхід імпульсної апроксимації активних ділянок, застосований в [4], буде забезпечувати меншу точність, ніж для КА з традиційними рідинними ракетними двигунами (РРД). Це пов'язано з тим, що двигуни ЯРД і ДЯРД мають набагато більшу питому масу, ніж двигуни РРД. Дійсно, за даними [8] питома маса ДЯРД типу ANERVA більша 20кг/кН, в той час як для типових маршових РРД, що використовуються для міжпланетних перельотів, цей параметр не перевищує 10кг/кН [1]. Тому тривалість активних ділянок великої тяги для перельотів КА з ЯРД і ДЯРД є значною. За даними [8] для КА з ДЯРД ANERVA тривалість першої активної ділянки при виконанні гоманівського перельоту Земля-Марс становить 45,5 хвилин. Враховуючи, що старт відбувається з низької навколосемної кругової орбіти, висотою 400-800км з періодом обертання біля 100 хвилин, застосування імпульсного підходу для розрахунку такого маневру буде дуже неточним. Отже, при аналізі перельотів КА з ДЯРД необхідно урахувати обмеженість тяги двигуна і скінченність тривалості активної ділянки. У статті проведено порівняння результатів розв'язання модельної задачі оптимізації перельоту до малих небесних тіл або сфер впливу планет, отриманих з урахуванням обмеженості тяги, з одержаними раніше [4] за допомогою імпульсної апроксимації. Для розрахунку маневру з обмеженою тягою використано підхід, описаний в [6].

Постановка задачі

Розглянемо задачу максимізації корисного навантаження при переведенні КА з заданої початкової кругової орбіти навколо Землі на геліоцентричну еліптичну орбіту, рух по якій забезпечує зустріч з небесним тілом призначення рис.1. Для розрахунку оптимальної траєкторії застосовується модифікований метод сфер впливу (ММСВ) [2]. Якщо мала тяга не застосовується, двигун великої тяги забезпечує виведення КА на сферу впливу Землі з геоцентричною швидкістю \vec{v}_{∞}^e і подальший рух відбувається вздовж Кеплерової еліптичної орбіти (штрихова крива на рис.1). Внаслідок застосування малої тяги ця швидкість може бути зменшена і для абсолютної величини геоцентричної швидкості на сфері впливу буде справедливо $v_{\infty}^e \in [0, v_{\infty t}^e]$. Крива перельоту з малою тягою зображена на рис.1 суцільною лінією. Оптимальний вибір величини v_{∞}^e становить основний зміст задачі оптимального комбінування участі двигунів великої та малої тяги при формуванні траєкторії перельоту. На відміну від [4], при розрахунку витрат палива під час маневру з великою тягою будемо урахувувати обмеженість тяги.

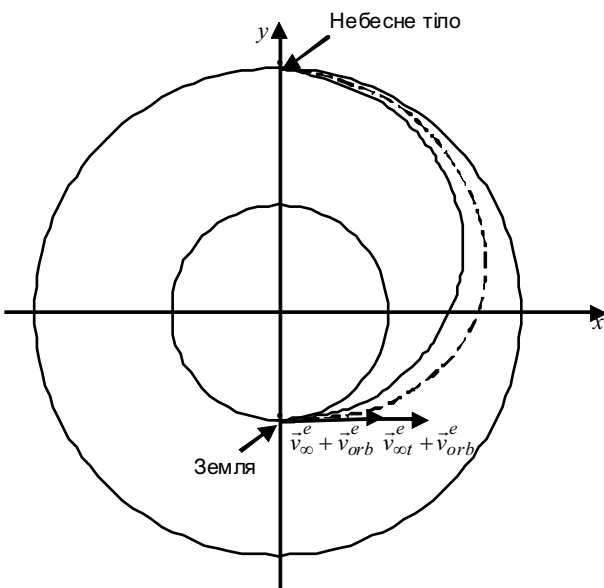


Рис.1. Схема геліоцентричного маневру

Для постановки задачі виконання маневру з обмеженою тягою введемо нерухому систему координат з початком в центрі Землі (рис.2). Геоцентрична швидкість \vec{v}_{∞}^e , яку матиме КА на межі сфери впливу, може розглядатися як гіперболічний надлишок швидкості для деякої геоцентричної гіперболічної орбіти, напрям на перицентр якої співпадає з напрямом осі Ox . Відзначимо, що необхідний напрям вектору \vec{v}_{∞}^e , що визначається розв'язком зовнішньої задачі ММСВ, завжди може бути забезпечений за рахунок відповідного повороту системи координат. Параметр і ексцентриситет гіперболічної орбіти повністю визначаються величиною гіперболічного надлишку швидкості v_{∞}^e та радіусом перицентру r_p . Таким чином, задача, що розглядається, може формулюватися як задача оптимізації маневру по переведенню КА на деяку геоцентричну гіперболічну орбіту, параметри якої мають бути обрані оптимальним чином.

Можлива траєкторія переходу КА з кругової орбіти з радіусом r_0 на гіперболічну з радіусом перицентру r_p схематично зображена на рис.2. Положення КА на круговій орбіті в момент початку і на гіперболічній орбіті в момент завершення маневру визначаються, відповідно, кутowymi координатами ω_0 і ϑ_1 . Оптимізація значень ω_0 , ϑ_1 , r_p і v_{∞}^e виконується під час розв'язання загальної варіаційної задачі. Рівняння руху центру мас КА на активних ділянках запишемо, використовуючи модель керування тягою ЯРД [5]:

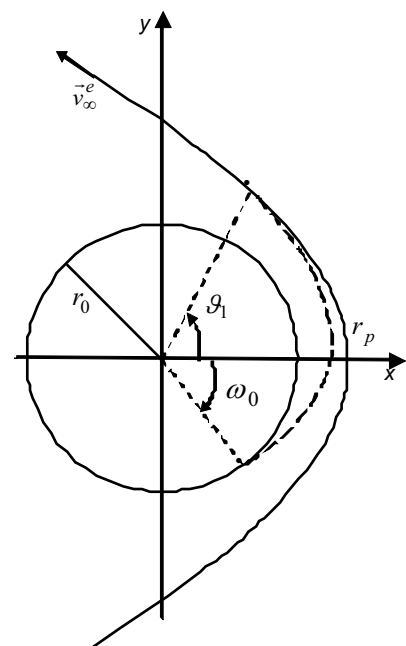


Рис. 2. Схема маневру на активній ділянці великої тяги

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = \frac{a_0 \sqrt{Nq} \cos \theta}{m} - c \frac{x}{r^3}, \\ \dot{v}_y &= \frac{a_0 \sqrt{Nq} \sin \theta}{m} - c \frac{y}{r^3}, \quad \dot{m} = -a_0 q, \\ N &\in [N_{\min}, \min(1, Dq)], \quad q \in [q_D, 1] \end{aligned} \tag{2}$$

де t – час; x, y, v_x, v_y – компоненти радіуса-вектора і вектора швидкості центру мас КА; m – поточне значення маси КА; $N(t), q(t), \theta(t)$ – функції керування, відповідно, теплова потужність реактора, секундна масова витрата палива, напрям вектора тяги, $a_0 = P_{\max}/G_* M_*$ – параметр тягоозброєності, P_{\max} – максимальна тяга, $M_* = M_0$ – масштаб маси (M_0 – початкова маса), $G_* = 9.81 \text{ м/с}^2$ – масштаб гравітаційного прискорення, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $c = \mu/R_*^2 G_*$ – гравітаційний параметр, μ – гравітаційна стала Землі, R_* – масштаб координат x, y . $D, N_{\min}, N_{\max}, q_{\min}, q_{\max}$ – безрозмірні параметри обмежень на функції керування, q_D – значення секундної масової витрати, що відповідає максимуму ефективної швидкості витікання. Формули переходу до безрозмірних змінних наведені в [5].

Граничні умови запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} x(0) &= r_0 \cos \omega_0, & x(t_1) &= \frac{p(r_p, v_\infty^e) \cos \vartheta_1}{1 + e(r_p, v_\infty^e) \cos \vartheta_1}, \\ y(0) &= r_0 \sin \omega_0, & y(t_1) &= \frac{p(r_p, v_\infty^e) \sin \vartheta_1}{1 + e(r_p, v_\infty^e) \cos \vartheta_1}, \\ v_x(0) &= -v_0 \sin \omega_0, & v_x(t_1) &= -K(r_p, v_\infty^e) \sin \vartheta_1, \\ v_y(0) &= v_0 \cos \omega_0, & v_y(t_1) &= K(r_p, v_\infty^e) (e(r_p) + \cos \vartheta_1), \\ m(0) &= 1, & t_1 &\rightarrow opt, \end{aligned} \tag{3}$$

де $K(r_p, v_\infty^e) = 1/\sqrt{L \cdot p(r_p, v_\infty^e)}$, $p(r_p, v_\infty^e) = Lr_p^2(v_\infty^e)^2 + 2r_p$, $e(r_p, v_\infty^e) = Lr_p(v_\infty^e)^2 + 1$, $L = V_*^2 R_* / \mu$, V_* – масштаб швидкості.

Як показано в [4], застосування моделі ідеального двигуна обмеженої потужності і методу транспортуючої траєкторії дозволяє отримати аналітичний вираз для кінцевої маси КА як функції маси на початку геліоцентричного маневру та абсолютної величини швидкості v_∞^e . Тому функціонал задачі можна подати у вигляді:

$$m_2 = \frac{m(t_1)}{1 + \kappa \cdot m(t_1) \cdot (v_{\text{от}}^e - v_\infty^e)^2} \rightarrow \max, \tag{4}$$

де t_2 – момент завершення геліоцентричного маневру; $\kappa = 2M_* V_*^2 / N_{el} T$, N_{el} – електрична потужність живлення двигуна малої тяги, T – час виконання геліоцентричного маневру.

Масу корисного навантаження можна обчислити, віднімаючи від кінцевої маси $m(t_2)$ маси баку для збереження робочого тіла та маси рушійних систем великої та малої тяги:

$$m_\pi = m_2 - m_{HT}^{BNRE}(P_{\max}) - m_{LT}^{BNRE}(N_{el}) - \beta(1 - m_2) \tag{5}$$

В (5) P_{\max} – максимальна тяга ЯРД великої тяги, $m_{LT}^{BNRE}(N_{el})$, $m_{HT}^{BNRE}(P_{\max})$ – відповідно, безрозмірні маси рушійних систем малої та великої тяги, що розраховуються за виразами, наведеними в [4].

Розв'язання задачі. З урахуванням результатів попередніх досліджень задач оптимального керування КА з ЯРД великої обмеженої тяги [6], тягу ЯРД будемо вважати постійною за величиною, а саме такою, що відповідає максимуму безрозмірної теплової потужності ($N=1$) і максимуму ефективної швидкості витікання ($q=q_D$). Отже, $P = a_0 \sqrt{q_D}$. Аналіз необхідних умов оптимальності проведемо за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Складемо гамільтоніан:

$$\begin{aligned} H &= \psi_x v_x + \psi_y v_y + \psi_{v_x} \left(\frac{a_0 \sqrt{q_D} \cos \theta}{m} - c \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) + \\ &+ \psi_{v_y} \left(\frac{a_0 \sqrt{q_D} \sin \theta}{m} - c \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) - \psi_m a_0 q \end{aligned} \tag{6}$$

де $\psi_x, \psi_y, \psi_{v_x}, \psi_{v_y}, \psi_m$ – спряжені функції.

Вираз для оптимального керування θ_{opt} отримаємо з умов максимуму гамільтоніана (6) стосовно θ :

$$\cos \theta_{opt} = \frac{\psi_{v_x}}{\psi_v}, \quad \sin \theta_{opt} = \frac{\psi_{v_y}}{\psi_v}. \tag{7}$$

Спряжена система рівнянь має вигляд:

$$\dot{\psi}_x = c \frac{\psi_{v_x}(y^2 - 2x^2) - 3\psi_{v_y}xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \dot{\psi}_y = c \frac{\psi_{v_y}(x^2 - 2y^2) - 3\psi_{v_x}xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \dot{\psi}_{v_x} = -\psi_x, \dot{\psi}_{v_y} = -\psi_y, \dot{\psi}_m = \frac{\sqrt{(\psi_{v_y}^2 + \psi_{v_x}^2)}q_D}{m^2}. \quad (8)$$

Умови оптимальності вибору параметрів задачі отримаємо з умов трансверсальності, записаних у формі [3]:

$$-\delta m_2(t_1) - H(t_1)\delta t_1 - \psi_x(0)\delta x(0) - \psi_y(0)\delta y(0) - \psi_{v_x}(0)\delta v_x(0) - \psi_{v_y}(0)\delta v_y(0) + \psi_x(t_1)\delta x(t_1) + \psi_y(t_1)\delta y(t_1) + \psi_{v_x}(t_1)\delta v_x(t_1) + \psi_{v_y}(t_1)\delta v_y(t_1) + \psi_m(t_1)\delta m(t_1) = 0 \quad (9)$$

У початковий момент часу варіації фазових координат залежать від одної незалежної варіації $\delta\omega_0$, тоді як в кінцевий момент t_1 – від чотирьох незалежних варіацій $\delta m(t_1), \delta\vartheta_1, \delta r_p, \delta v_\infty^e$. Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при незалежних варіаціях $\delta t_1, \delta\omega_0, \delta m(t_1), \delta\vartheta_1, \delta r_p, \delta v_\infty^e$, отримуємо умови оптимального вибору відповідних параметрів.

$$\begin{aligned} H &= 0, \\ -\psi_x(0)r_0 \sin \omega_0 + \psi_y(0)r_0 \cos \omega_0 - \psi_{v_x}(0)v_0 \cos \omega_0 - \psi_{v_y}(0)v_0 \sin \omega_0 &= 0, \\ \psi_m(t_1) - \frac{\partial m_2}{\partial m(t_1)} &= 0, \\ -\frac{\partial m_2}{\partial v_\infty^e} + \psi_x(t_1)\frac{\partial x(t_1)}{\partial v_\infty^e} + \psi_y(t_1)\frac{\partial y(t_1)}{\partial v_\infty^e} + \psi_{v_x}(t_1)\frac{\partial v_x(t_1)}{\partial v_\infty^e} + \psi_{v_y}(t_1)\frac{\partial v_y(t_1)}{\partial v_\infty^e} &= 0, \\ \psi_x(t_1)\frac{\partial x(t_1)}{\partial \vartheta_1} + \psi_y(t_1)\frac{\partial y(t_1)}{\partial \vartheta_1} + \psi_{v_x}(t_1)\frac{\partial v_x(t_1)}{\partial \vartheta_1} + \psi_{v_y}(t_1)\frac{\partial v_y(t_1)}{\partial \vartheta_1} &= 0, \\ \psi_x(t_1)\frac{\partial x(t_1)}{\partial r_p} + \psi_y(t_1)\frac{\partial y(t_1)}{\partial r_p} + \psi_{v_x}(t_1)\frac{\partial v_x(t_1)}{\partial r_p} + \psi_{v_y}(t_1)\frac{\partial v_y(t_1)}{\partial r_p} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Похідні, що входять у (10), обчислюються диференціюванням виразів (3) і (4).

Застосування принципу максимуму дозволяє звести задачу оптимального керування (2)-(4) до двоточкової крайової задачі, розв'язання якої зводиться до відшукування 5 початкових значень спряжених функцій $\psi_x(0), \psi_y(0), \psi_{v_x}(0), \psi_{v_y}(0), \psi_m(0)$, трьох параметрів, що визначають початкове та кінцеве положення КА – кутових координат ω_0, ϑ_1 та радіуса перицентру r_p , абсолютної величини геоцентричної швидкості на сфері впливу v_∞ і моменту завершення маневру t_1 . Вказані 10 невідомих визначаються з 4-х крайових умов (3) на правому кінці траєкторії, першого інтегралу $H = 0$ та 5-ти умов трансверсальності (10). Система рівнянь руху (2) і спряжена система рівнянь (8) інтегруються чисельно.

Результати та їх аналіз.

Для проведення розрахунків були обрані такі значення параметрів задачі: радіус кругової навколосемної орбіти старту $h_0 = 400$ км, радіуси кругових геліоцентричних орбіт призначення: $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км (кругова орбіта Марсу), $R_2 = 1000 \cdot 10^6$ км, стартова маса КА $M_0 = 160 \cdot 10^3$ кг, максимальна ефективна швидкість витікання ДЯРД $V_{\max} = 9310$ м/с, баковий коефіцієнт $\beta = 0.1$.

Ефективність оптимізації швидкості на сфері впливу v_∞^e проілюстровано на рис.3. Криві побудовані для двох значень електричної потужності живлення двигуна малої тяги $N_{el} = 0,1$ МВт і 1,5 МВт та для постійного значення теплової потужності реактора $N = 2200$ МВт. Криві, наведені на рис.3, побудовані шляхом розв'язання задачі (2)-(4) при постійних фіксованих значеннях v_∞^e , при цьому третя з умов трансверсальності (10) не використовувалася. Розв'язки, що відповідають максимумам кривих, побудованих шляхом перебору значень v_∞^e (криві, позначені "FT"), в межах прийнятої точності співпадають з розв'язками повної задачі (2)-(4) (при оптимізації значення v_∞^e). Важливість урахування обмеженості тяги проілюстровано завдяки порівнянню з розв'язками, що відповідають імпульсній апроксимації активних ділянок [4]. Як випливає з рис. 3 урахування обмеженості тяги порівняно з імпульсною апроксимацією приводить до незначного відхилення оптимальних значень v_∞^e у бік їх зменшення. Це можна пояснити тим, що урахування гравітаційних втрат зменшує ефективність виконання маневру з великою тягою, отже більша частина енергозатрат переноситься на маневр з малою тягою.

Ефективність оптимізації електричної потужності проілюстровано на рис. 4. Для порівняння наведено криві, що відповідають імпульсній апроксимації активних ділянок. Криві побудовані для достатньо великого значення теплової потужності реактора $N = 2200$ МВт. По осі абсцис відкладені значення N_{el} , що перебиралися з постійним кроком, по осі ординат – значення m_π , у випадку скінченної тяги отримані внаслідок розв'язання задачі (2)-(4), а у випадку імпульсної апроксимації – отримані за рахунок чисельної оптимізації по параметру v_∞^e [4]. Як випливає з цих рисунків,

при обраному значенні N , максимуми корисного навантаження спостерігаються при практично однакових значеннях N_{el} . При виконанні першого маневру включення ділянки малої тяги виявилось неоптимальним, як у випадку застосування імпульсної апроксимації, так і у випадку урахування обмеженості тяги. При виконанні другого маневру були отримані такі значення: при застосуванні імпульсної апроксимації $N_{el\,opt} = 2700$ кВт, при урахуванні обмеженості тяги – $N_{el\,opt} = 2600$ кВт. У той же час, урахування обмеженості тяги приводить до помітного зниження корисного навантаження внаслідок гравітаційних втрат.

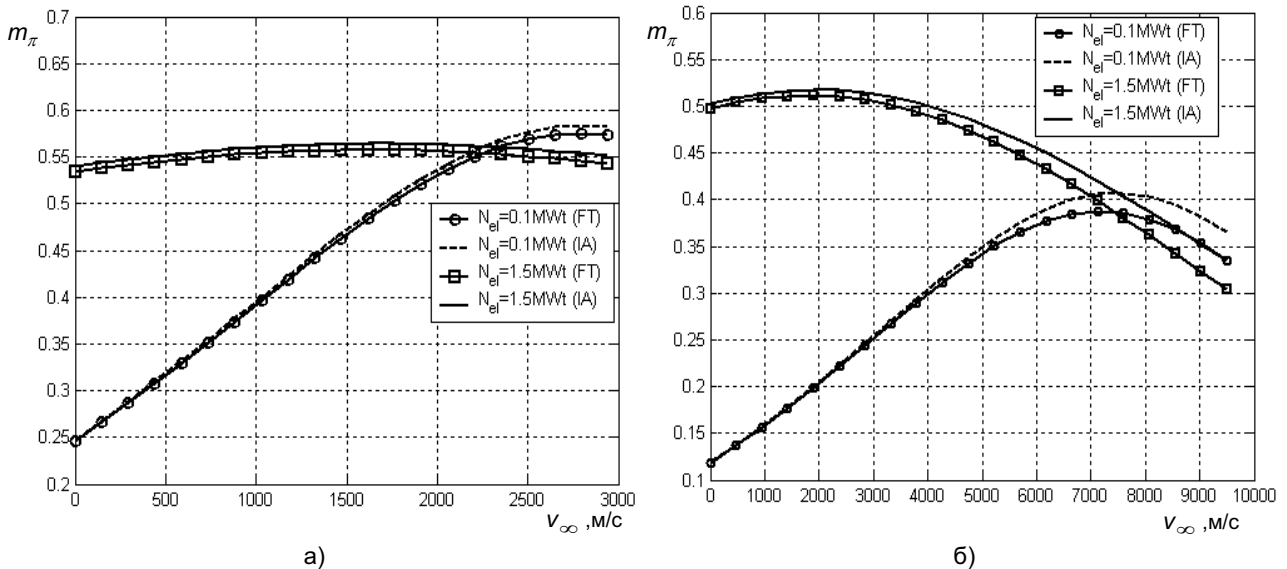


Рис. 3. Залежності маси корисного навантаження від швидкості КА на сфері впливу.

а) переліт до тіла, що рухається по круговій орбіті з радіусом $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км,

б) – з радіусом $R_2 = 1000 \cdot 10^6$ км. FT – урахування обмеженості тяги, IA – імпульсна апроксимація

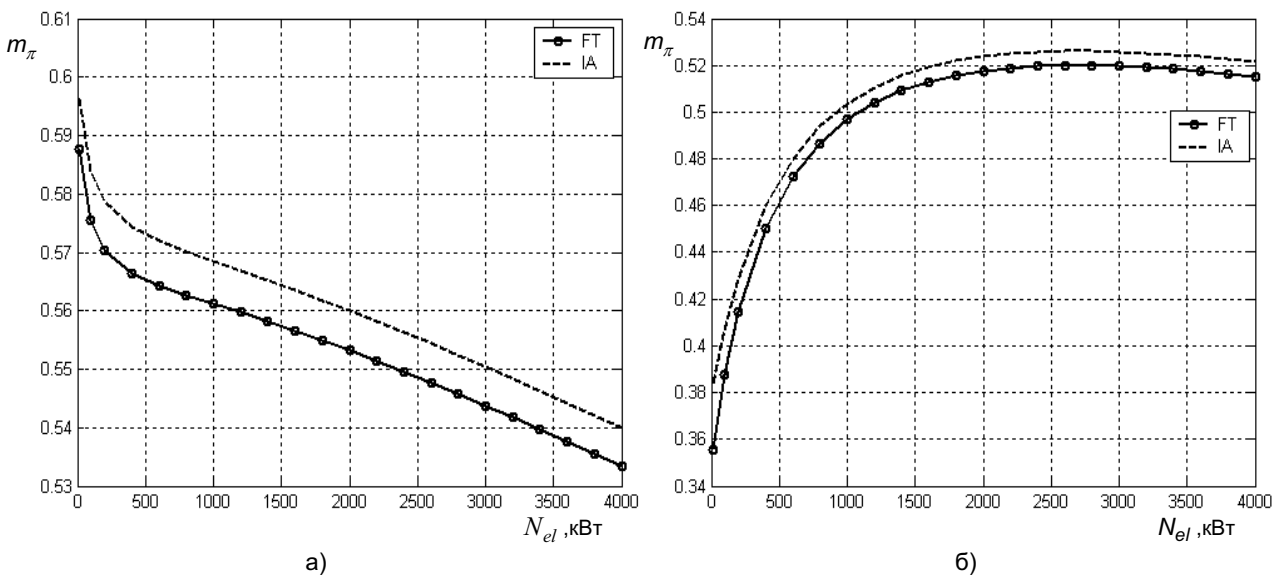


Рис.4. Залежності маси корисного навантаження від електричної потужності.

а) переліт до тіла, що рухається по круговій орбіті з радіусом $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км,

б) – з радіусом $R_2 = 1000 \cdot 10^6$ км. FT – урахування обмеженості тяги, IA – імпульсна апроксимація

Для аналізу впливу гравітаційних втрат на оптимальні параметри проведемо розв'язання задачі при різних значеннях тяги ЯРД великої тяги. Зазначимо, що тяга ЯРД великої тяги визначається через теплову потужність за допомогою співвідношення $P = \hat{\gamma} \sqrt{Nq_D}$ [5], де P – тяга, [Н], N – максимальна теплова потужність ядерного реактора, [Вт], q_D – значення секундної масової витрати, що відповідає максимуму ефективної швидкості витікання, [кг/с], $\hat{\gamma} = 1.37$ – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, що використовується у моделі [5].

Максимальна теплова потужність ЯРД змінювалася у діапазоні 1100-4000МВт з кроком 100МВт, що відповідає зміні тяги у діапазоні 220-800кН [8,9]. Вплив урахування гравітаційних втрат на значення функціоналу та на вибір

оптимального значення максимальної теплової потужності N можна проаналізувати за допомогою рис.5, де надано залежності оптимальних мас корисного навантаження (оптимізованих і по v_{∞}^e і по N_{el}) від N . Для першого маневру було отримано оптимальне значення $N_{opt}=1500$ МВт, при цьому значенні завищення значення функціоналу m_{π} при застосуванні імпульсної апроксимації і неврахуванні гравітаційних втрат склало 2,9% (для цього маневру застосування малої тяги неоптимальне, як при врахуванні обмеженості тяги, так і при застосуванні імпульсної апроксимації); для другого маневру $N_{opt}=1300$ МВт, при $N_{el\,opt}=2700$ кВт, $v_{\infty\,opt}^e=999,1$ м/с (при застосуванні імпульсної апроксимації для цього значення N отримано $N_{el\,opt}=2700$ кВт, $v_{\infty\,opt}^e=1192,4$ м/с), відповідне завищення значення функціоналу m_{π} становить 3,0%. Отже, застосування імпульсної апроксимації дозволяє достатньо точно проводити оптимізацію таких параметрів, як v_{∞}^e та N_{el} і веде до незначних завищень значень корисного навантаження внаслідок неврахування гравітаційних втрат.

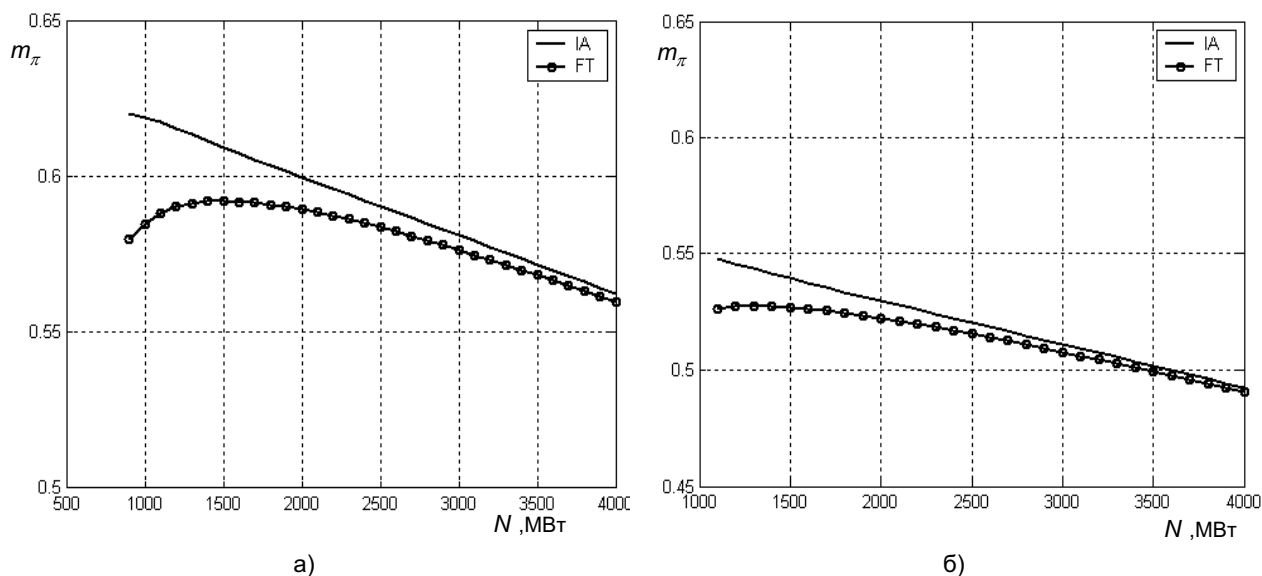


Рис.5. Залежності маси корисного навантаження від теплової потужності.

а) переліт до тіла, що рухається по круговій орбіті з радіусом $R_1=227.94 \cdot 10^6$ км,

б) – з радіусом $R_2=1000 \cdot 10^6$ км. FT – врахування обмеженості тяги, IA – імпульсна апроксимація

В той же час, імпульсна апроксимація не дозволяє оцінювати оптимальне значення максимальної теплової потужності. Неврахування гравітаційних втрат веде до того, що завжди буде оптимальною рушійна система, що має найменшу масу (отже, і мінімальну теплову потужність). Таким чином, повне розв'язання сукупної задачі оптимізації керувань та параметрів КА та його рушійної системи при застосуванні імпульсної апроксимації неможливе.

Висновки.

У статті розглянуто задачу оптимального керування рухом космічного апарату при виконанні маневру зустрічі з небесним тілом із комбінуванням великої та малої тяги. Проаналізовано важливість врахування обмеженості тяги і проведено порівняння результатів із класичним підходом імпульсної апроксимації, при якому тяга вважається нескінченною. Показано, що підхід імпульсної апроксимації дозволяє достатньо точно оцінити оптимальний розподіл характеристичної швидкості між ділянками великої та малої тяги. В той же час, оптимізація параметрів підсистеми великої тяги при застосуванні підходу імпульсної апроксимації неможлива. Отже, повне розв'язання сукупної задачі оптимізації керувань та параметрів КА та його рушійної системи можливе лише при врахування обмеженості тяги.

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с. 2. Ильин В.А., Кузмяк Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. – М.: Наука, 1976. – 744 с. 3. Летов А.М. Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 359 с. 4. Харитонов О.М. Дослідження ефективності комбінування великої та малої тяги при міжпланетних перельотах // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: Математика та механіка. – 2011. – №26. – С.27-32. 5. Харитонов А.М. К проблеме оптимизации орбитальных маневров космических аппаратов с ядерными ракетными двигателями // Проблемы управления и информатики. – 2005. – №5. – С.120–135. 6. Харитонов О.М. Оптимізація маневрів космічних апаратів з двигунами великої обмеженої тяги // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2010., т.7. – №2. – С. 427-434. 7. Kharytonov O.M., Kiforenko V.M. Finite-thrust optimization of interplanetary transfers of space vehicle with bimodal nuclear thermal propulsion // 61st International Astronautical Congress, Prague, Czech Republic, September 27-October 1, 2010. Proceedings, Paper IAC-10-C1.9.7. – 11 pp. 8. Taraba M., Zwintz K., Bombardelli C. et al. Project M³ – a study for manned Mars mission in 2031 // Acta Astronautica, 58 (2006). – P.88-104. 9. Borowski S.K. "Bimodal" nuclear thermal rocket (BNTR) propulsion for future human Mars exploration missions // NASA/CP-2004-212963. – 2004. – vol.1. – P.305-323.