УДК 517.946

А. Громик, викл., І. Конет, д-р фіз.-мат. наук

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки початково-крайових задач теплопровідності в обмежених багатошарових просторових середовищах.

The method of integral transformations builds up the exact analytical solution for initial boundary problems of heat conductivity in the limited multilayered spatial environments.

1. Вступ

Нестаціонарні (початково-крайові) задачі феноменологічної теорії теплопровідності для кусково-однорідних (багатошарових) середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [8,10,19,20]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач в однорідних і кусково-однорідних середовищах присвячені монографії [11, 14, 15, 17]. Зокрема, в [15] розглянуто випадок обмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ (просторів, просторів з порожниною, суцільних тіл і тіл з порожниною). Необмежені двоскладові й тришарові просторові середовища та напівобмежені кусково-однорідні просторові середовища розглянуто у працях [2-5,12, 13, 16]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків початково-крайових задач теплопровідності для обмежених багатошарових просторових середовищ у декартовій системі координат.

2. Постановка задачі

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в ортотропному обмеженому $(n+1)$-шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \left\{(t,x,y,z)\middle| t>0; (x,y)\in\Omega_2 = \langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle; z\in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}(l_{j-1};l_j); l_0\ge 0; l_k<l_{k+1}; l_{n+1}\equiv l<\infty\right\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності [9, 21]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t}-\left[a_{xj}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T_j+\chi_j^2T_j=f_j(t,x,y,z); z\in I_j; j=\overline{1,n+1}, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$T_j(t,x,y,z)\big|_{t=0}=g_j(x,y,z); z\in I_j; j=\overline{1,n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)T_1\Big|_{z=l_0}=g_0(t,x,y), \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)T_{n+1}\Big|_{z=l}=g_l(t,x,y), \tag{3}$$

умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases} \left[\left(R_k\dfrac{\partial}{\partial z}+1\right)T_k-T_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k}=0, \\ \left(\nu_k\dfrac{\partial T_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\dfrac{\partial T_{k+1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k}=0, k=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{4}$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2, де $a_{xj}, a_{yj}, a_{zj}\ge 0$ – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей $x,y,z\left(j=\overline{1,n+1}\right)$; $\chi_j^2\ge 0$ – коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(t,x,y,z)= =\{f_1(t,x,y,z), f_2(t,x,y,z),..., f_{n+1}(t,x,y,z)\}$ – інтенсивність теплових джерел; $g(x,y,z)=\{g_1(x,y,z), g_2(x,y,z),..., g_{n+1}(x,y,z)\}$ – температура середовища в початковий момент часу; $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ – деякі дійсні сталі; $g_0(t,x,y)$, $g_l(t,x,y)$ – задані обмежені неперервні функції в області $(0;+\infty)\times\Omega_2$; $R_k\ge 0$ – коефіцієнти термоопору; $\nu_k, \nu_{k+1}\ge 0$ – коефіцієнти теплопровідності; $T(t,x,y,z)=\{T_1(t,x,y,z), T_2(t,x,y,z),..., T_{n+1}(t,x,y,z)\}$ – шукана температура.

Зазначимо, що випадки областей $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times(-\infty;+\infty)$, $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times(0;+\infty)$ розглянуто у праці авторів [6], випадки областей $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times(0;b)$, $\Omega_2=(0;+\infty)\times(0;+\infty)$ – в [7].

3. Основна частина

3.1. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(0;+\infty)\times(0;b)\times\left\{z\in K_n^+\right\}$

Розглянемо область $\Omega_2=(0;+\infty)\times(0;b)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)T_j\Big|_{x=0}=\omega_j(t,y,z), \frac{\partial^k T_j}{\partial x^k}\Bigg|_{x=+\infty}=0; k=0,1; j=\overline{1,n+1}, \tag{5}$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)T_j\Big|_{y=0}=\omega_{1j}(t,x,z);\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)T_j\Big|_{y=b}=\omega_{2j}(t,x,z),\ j=\overline{1,n+1},\tag{6}$$

щодо змінної y, де $p\geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x=0$; $\omega_j(t,y,z)=pT_j^c(t,y,z), T_j^c(t,y,z)$ – температура середовища на поверхні $x=0$; $h_1\geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=0$; $\omega_{1j}(t,x,z)=h_1T_j^{c1}(t,x,z), T_j^{c1}(t,x,z)$ – температура середовища на поверхні $y=0$; $h_2\geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=b$; $\omega_{2j}(t,x,z)=h_2T_j^{c2}(t,x,z), T_j^{c2}(t,x,z)$ – температура середовища на поверхні $y=b$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(6) виконуються умови узгодженості [6, 7]:

Припустимо, що розв'язок початково-крайової задачі (1)-(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [18, 17].

До задачі (1)-(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0;+\infty)$ щодо змінної x [18]:

$$F_{+x}[g(x)]=\int_0^{+\infty}g(x)K_x(x;\sigma)dx\equiv\tilde g(\sigma),\tag{7}$$

$$F_{+x}^{-1}[\tilde g(\sigma)]=\int_0^{+\infty}\tilde g(\sigma)K_x(x;\sigma)d\sigma\equiv g(x),\tag{8}$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2\tilde g(\sigma)+K_x(0;\sigma)\left(-\frac{dg}{dx}+pg\right)\Big|_{x=0},\tag{9}$$

де ядро перетворення $K_x(x;\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma\cos(\sigma x)+p\sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2+p^2}}$.

Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\left\{(t,y,z)\mid t>0; y\in(0;b);\, z\in K_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial\tilde T_j}{\partial t}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde T_j+\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde T_j=\tilde F_j(t,\sigma,y,z); z\in I_j\tag{10}$$

з початковими умовами

$$\tilde T_j(t,\sigma,y,z)\big|_{t=0}=\tilde g_j(\sigma,y,z); z\in I_j; j=\overline{1,n+1},\tag{11}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde T_1\Big|_{z=l_0}=\tilde g_0(t,\sigma,y);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)\tilde T_{n+1}\Big|_{z=l}=\tilde g_l(t,\sigma,y),\tag{12}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)\tilde T_j\Big|_{y=0}=\tilde\omega_{1j}(t,\sigma,z);\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)\tilde T_j\Big|_{y=b}=\tilde\omega_{2j}(t,\sigma,z)\tag{13}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\tilde T_k-\tilde T_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k}=0,\\ \left(\nu_k\frac{\partial\tilde T_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial\tilde T_{k+1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k}=0;\ k=\overline{1,n},\end{cases}\tag{14}$$

де $\tilde F_j(t,\sigma,y,z)=\tilde f_j(t,\sigma,y,z)+a_{xj}^2K_x(0;\sigma)\omega_j(t;y;z); j=\overline{1,n+1}$.

До задачі (10)-(14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0;b]$ щодо змінної y [18]:

$$\Lambda_{yk}[g(y)]=\int_0^b g(y)\,v_k(y)dy\equiv g_k,\tag{15}$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}[g_k]=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{v_k(y)}{\|v_k\|^2}\equiv g(y),\tag{16}$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-\gamma_k^2g_k+v_k(0)\left(-\frac{d}{dy}+h_1\right)g\Big|_{y=0}+v_k(b)\left(\frac{d}{dy}+h_2\right)g\Big|_{y=b},\tag{17}$$

де ядро перетворення

$$v_k(y)=\frac{\gamma_k\cos(\gamma_ky)+h_1\sin(\gamma_ky)}{\sqrt{\gamma_k^2+h_1^2}},\quad \|v_k\|^2\equiv\int_0^b v_k^2(y)dy=\frac{b}{2}+\frac{(h_1+h_2)\left(\gamma_k^2+h_1h_2\right)}{2\left(\gamma_k^2+h_1^2\right)\left(\gamma_k^2+h_2^2\right)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1 + h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)-(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t,z) \mid t>0; z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_{jk}}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_{jk}}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2\right)\tilde{T}_{jk} = \tilde{G}_{jk}(t,\sigma,z); z \in I_j; j = \overline{1,n+1}, \quad (18)$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_{jk}(t,\sigma,z)\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jk}(\sigma,z); z \in I_j; j = \overline{1,n+1}, \quad (19)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{T}_{1k}\Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(t,\sigma); \; \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{T}_{n+1,k}\Big|_{z=l_0} = \tilde{\tilde{g}}_{lk}(t,\sigma) \quad (20)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_p \frac{\partial}{\partial z} + 1\right)\tilde{T}_{pk} - \tilde{T}_{p+1,k}\right]\Big|_{z=l_p} = 0, \\ \left(\nu_p \frac{\partial \tilde{T}_p}{\partial z} - \nu_{p+1}\frac{\partial \tilde{T}_{p+1,k}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_p} = 0; \; p = \overline{1,n}, \end{cases} \quad (21)$$

де

$$\tilde{G}_{jk}(t,\sigma,z) = \tilde{F}_{jk}(t,\sigma,z) + a_{yj}^2 v_k(0)\tilde{\omega}_{1j}(t,\sigma,z) + a_{yj}^2 v_k(b)\tilde{\omega}_{2j}(t,\sigma,z).$$

До задачі (18)-(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з n точками спряження щодо змінної z [17]:

$$F_{jn}[g(z)] = \int_{l_0}^{l} g(z)V(z,\lambda_j)\sigma(z)dz \equiv g_j, \quad (22)$$

$$F_{jn}^{-1}[g_j] = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{V(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2} \equiv g(z), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F_{jn}\left[\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \theta(z-l_{i-1})\theta(l_i - z)\frac{d^2 g}{dz^2}\right] &\equiv \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{d^2 g}{dz^2} V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz = -\lambda_j^2 g_j - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz - \\ -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0,\lambda_j)\left(\alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g\right)\Big|_{z=l_0} &+ \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l,\lambda_j)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g\right)\Big|_{z=l}. \end{aligned} \quad (24)$$

У рівностях (22)-(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\lambda_j) = \sum_{i=1}^{n+1} V_j(z,\lambda_j)\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i - z); \left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2 = \int_{l_0}^{l} V^2(z,\lambda_j)\sigma(z)dz \equiv \sum_{i=1}^{n+1}\int_{l_{i-1}}^{l_i} V_i^2(z,\lambda_j)\sigma_i(z)dz;$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i \theta(z-l_{i-1})\theta(l_i - z); V_m(z,\lambda_j) = \prod_{i=m}^{n} c_{2i} q_{n+1,j}\left[\omega_{m-1,2}(\lambda_j)\cos(q_{mj}z) - \omega_{m-1,1}(\lambda_j)\sin(q_{mj}z)\right]; m = \overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\lambda_j) = \omega_{n2}(\lambda_j)\cos(q_{n+1,j}z) - \omega_{n1}(\lambda_j)\sin(q_{n+1,j}z); \; c_{1k} = 1; \; c_{2k} = \frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}; \; q_{sj} = a_s^{-1}\left(\lambda_j^2 + k_s^2\right)^{1/2} \equiv a_s^{-1} b_{sj};$$

$$\sigma_k = \prod_{j=k}^{n}\frac{\nu_j a_{n+1}}{\nu_{j+1}a_k^2}; \; \sigma_n = \frac{\nu_n a_{n+1}}{\nu_{n+1}a_n^2}; \; \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}; \; \nu_{11}^{k1}(q_{sj}l_k) = -R_k q_{sj}\sin(q_{sj}l_k) + \cos(q_{sj}l_k); \; \nu_{21}^{k1}(q_{sj}l_k) = -q_{sj}\sin(q_{sj}l_k);$$

$$\nu_{12}^{k1}(q_{sj}l_k) = -\nu_k^* q_{sj}\sin(q_{sj}l_k); \nu_{22}^{k1}(q_{sj}l_k) = \nu_k^* q_{sj}\cos(q_{sj}l_k); \nu_{11}^{k2}(q_{sj}l_k) = R_k q_{sj}\cos(q_{sj}l_k) + \sin(q_{sj}l_k); \nu_{21}^{k2}(q_{sj}l_k) = q_{sj}\cos(q_{sj}l_k);$$

$$\nu_{12}^{k2}(q_{sj}l_k) = \cos(q_{sj}l_k); \nu_{22}^{k2}(q_{sj}l_k) = \sin(q_{sj}l_k); \nu_k^* = \frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}; \delta_{sm}^k(q_{kj}l_k; q_{k+1,j}l_k) = \nu_{11}^{ks}(q_{kj}l_k)\nu_{22}^{km}(q_{k+1,j}l_k) - \nu_{21}^{ks}(q_{kj}l_k)\nu_{12}^{km}(q_{k+1,j}l_k);$$

$$\omega_{01}(\lambda_j) = -\nu_{11}^{01}(q_{1j}l_0); \; \omega_{02}(\lambda_j) = -\nu_{11}^{02}(q_{1j}, l_0); \; \omega_{sm}(\lambda_j) = \omega_{s-1,2}(\lambda_j)\delta_{sm}^k(q_{sj}l_s; q_{s+1,j}l_s) - \omega_{s-1,1}(\lambda_j)\delta_{2m}^k(q_{sj}l_s; q_{s+1,j}l_s);$$

λ_j – корені трансцендентного рівняння $\Delta_n(\lambda) \equiv \nu_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}l)\omega_{n1}(\lambda) - \nu_{22}^{n+1,1}q_{n+1}(\lambda)l\omega_{n2}(\lambda) = 0$, що утворюють дискретний спектр, $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [22].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\sigma,k)\right)\tilde{T}_{1k}(t,\sigma,z) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\sigma,k)\right)\tilde{T}_{2k}(t,\sigma,z) \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\sigma,k)\right)\tilde{T}_{n+1,k}(t,\sigma,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1k}(t,\sigma,z) \\ \tilde{G}_{2k}(t,\sigma,z) \\ \dots\dots \\ \tilde{G}_{n+1,k}(t,\sigma,z) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_{1k}(t,\sigma,z) \\ \tilde{T}_{2k}(t,\sigma,z) \\ \dots\dots \\ \tilde{T}_{n+1,k}(t,\sigma,z) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1k}(\sigma,z) \\ \tilde{g}_{2k}(\sigma,z) \\ \dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,k}(\sigma,z) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

де $q_j^2(\sigma,k) = a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2$; $a_j^2 \equiv a_{zj}^2$; $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор F_{jn}, який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z,\lambda_j)\sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z,\lambda_j)\sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(z,\lambda_j)\sigma_{n+1} dz\right] \tag{27}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt} + \lambda_j^2 + q_i^2(\sigma,k) + k_i^2\right)\tilde{T}_{ikj} = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{G}_{ikj} - \sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma) + \sigma_{n+1}a_{n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}(t,\sigma), \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{T}_{ikj}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{ikj}, \tag{29}$$

де $\tilde{T}_{ikj} \equiv \tilde{T}_{ikj}(t,\sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{T}_{ik}(t,\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz, \tilde{G}_{ikj} \equiv \tilde{G}_{ikj}(t,\sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{G}_i(t,\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz,$

$$\tilde{g}_{ikj} \equiv \tilde{g}_{ikj}(\sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{g}_{ik}(\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz;\ i = \overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\right\} = q_1^2$ і покладемо всюди $k_i^2 = q_1^2 - q_i^2$, $i = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{T}_{kj}}{dt} + \left(\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2\gamma_k^2 + \chi_1^2\right)\tilde{T}_{kj} = \tilde{G}_{kj}(t,\sigma) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma) + \frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}(t,\sigma), \tag{30}$$

$$\tilde{T}_{kj}(t,\sigma)\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{kj}(\sigma), \tag{31}$$

де $\tilde{T}_{kj}(t,\sigma) = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{T}_{ikj}(t,\sigma)$, $\tilde{G}_{kj}(t,\sigma) = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{G}_{ikj}(t,\sigma)$, $\tilde{g}_{kj}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{ikj}(\sigma)$.

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв'язком задачі (30), (31) є функція

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{kj}(t,\sigma) = \int_0^t \exp\left[-\left(\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2\gamma_k^2 + \chi_1^2\right)(t-\tau)\right] \times \Big[\tilde{G}_{kj}(\tau,\sigma) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}(\tau,\sigma) + \\ + \frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}(\tau,\sigma) + \delta_+(\tau)\tilde{g}_{jk}(\sigma)\Big]d\tau,\end{aligned} \tag{32}$$

де $\delta_+(\tau)$ – міра Дірака, зосереджена в точці $\tau = +0$ [22].

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2} \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{T}_{kj}(t,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{T}_{kj}(t,\sigma)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (18)-(21):

$$\tilde{T}_{ik}(t,\sigma,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{T}_{kj}(t,\sigma)\frac{V_i(z,\lambda_j)}{\left\|V_i(z,\lambda_j)\right\|^2};i=\overline{1,n+1}. \tag{34}$$

До функцій $\tilde{T}_{ik}(t,\sigma,z)$ послідовно застосуємо обернені оператори Λ_{yk}^{-1} за правилом (16) та F_{+x}^{-1} за правилом (8). Виконавши елементарні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{gathered}T_i(t,x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\times\left[f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)+\delta_+(\tau)g_k(\xi,\eta,\zeta)\right]\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau+\\+\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_0^b\left[W_i^1(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)+W_i^2(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_l(\tau,\xi,\eta)\right]d\xi d\eta d\tau+\\+a_{xi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xik}(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta)\omega_k(\tau,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\tau+\\+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}\left[W_{yik}^1(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_{1k}(\tau,\xi,\zeta)+W_{yik}^2(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_{2k}(\tau,\xi,\zeta)\right]\sigma_k d\xi d\zeta d\tau,i=\overline{1,n+1},\end{gathered} \tag{35}$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (35) застосовано компоненти:
фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{gathered}E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\lambda_j^2+a_{xi}^2\sigma^2+a_{yi}^2\gamma_r^2+\chi_i^2\right)t\right]\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\left\|V_i(z,\lambda_j)\right\|^2}\times\\\times\frac{v_r(y)v_r(\eta)}{\left\|v_r\right\|^2}K_x(x;\sigma)K_x(\xi;\sigma)d\sigma;\quad i,k=\overline{1,n+1},\end{gathered}$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{i1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна $W_i^2(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\sigma_{n+1}a_{n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{i,n+1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l)$, абсцисної матриці Гріна $W_{xik}(t,x,y,\eta,z,\zeta)=E_{i,k}(t,x,0,y,\eta,z,\zeta)$, лівої та правої ординатних матриць Гріна $W_{yik}^1(t,x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(t,x,\xi,y,0,z,\zeta)$, $W_{yik}^2(t,x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(t,x,\xi,y,b,z,\zeta)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(6).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_i^s(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{xjk}(t,x,y,\eta,z,\zeta),W_{yjk}^s(t,x,\xi,y,\eta,z)(s=1,2)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умові (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [22].

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2=a_{yi}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2\ge 0$ формули (35) визначають структуру нестаціонарного температурного поля в ізотропному обмеженому ($n+1$)-шаровому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. При $R_k=0\left(k=\overline{1,n}\right)$ безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0,\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $z=l_0,z=l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Параметри $p,h_j\left(j=1,2\right)$ дозволяють виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $x=0;y=0,y=b$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 6. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(t,x,y,z\right),g_j\left(x,y,z\right)$ $\omega_j\left(t,y,z\right),\omega_{1j}\left(t,x,z\right),\omega_{2j}\left(t,x,z\right)\left(j=\overline{1,n+1}\right),g_0\left(t,x,y\right)$ та $g_l\left(t,x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

3.2. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(0;a)\times(0;b)\times\{z\in K_n^+\}$

Розглянемо область $\Omega_2=(0;a)\times(0;b)$. У цьому випадку на межі області виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p_1\right)T_j\Big|_{x=0}=\omega_j^1(t,y,z),\left(\frac{\partial}{\partial x}+p_1\right)T_j\Big|_{x=a}=\omega_j^2(t,y,z);z\in I_j\ , \tag{36}$$

щодо змінної x та крайові умови (6) щодо змінної y, де $p_1\ge 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x=0$; $\omega_j^1(t,y,z)=p_1T_j^{c1}(t,y,z)$, $T_j^{c1}(t,y,z)$ – температура середовища на поверхні $x=0$; $p_2\ge 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x=a$; $\omega_j^2(t,y,z)=p_2T_j^{c2}(t,y,z)$, $T_j^{c2}(t,y,z)$ – температура середовища на поверхні $x=a$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(4), (36), (6) виконуються умови узгодженості [6, 7].

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(4), (36), (6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [18, 17].

До задачі (1)-(4), (36), (6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0;a]$ щодо змінної x [18]:

$$Z_{xm}[g(x)]=\int_0^a g(x)w_m(x)dx\equiv g_m\ , \tag{37}$$

$$Z_{xm}^{-1}[g_m]=\sum_{m=1}^{\infty}g_m\frac{w_m(x)}{\|w_m\|^2}\equiv g(x)\ , \tag{38}$$

$$Z_{xm}\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\delta_m^2g_m+w_m(0)\left(-\frac{dg}{dx}+p_1g\right)\Big|_{x=0}+w_m(a)\left(\frac{dg}{dx}+p_2g\right)\Big|_{x=a}\ , \tag{39}$$

де ядро перетворення

$$w_m(x)=\frac{\delta_m\cos(\delta_m x)+p_1\sin(\delta_m x)}{\sqrt{\delta_m^2+p_1^2}},\|w_m\|^2=\int_0^a w_m^2(x)\,dx=\frac{a}{2}+\frac{(p_1+p_2)(\delta_m^2+p_1p_2)}{2(\delta_m^2+p_1^2)(\delta_m^2+p_2^2)},$$

$\{\delta_m\}_{m=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\delta\alpha)=\frac{\delta^2-p_1p_2}{\delta(p_1+p_2)}\ ,$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Z_{xm} за правилом (37) внаслідок тотожності (39) крайовій задачі (1)-(4), (36), (6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\{(t,y,z)|t>0;y\in(0;b);z\in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial T_{jm}}{\partial t}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T_{jm}-\left(a_{xj}^2\delta_m^2+\chi_j^2\right)T_{jm}=F_{jm}(t,y,z),z\in I_j \tag{40}$$

з початковими умовами

$$T_{jm}(t,y,z)\big|_{t=0}=g_{jm}(t,y,z);z\in I_j;j=\overline{1,n+1}, \tag{41}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)T_{1m}\Big|_{z=l_0}=g_{0m}(t,y);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)T_{n+,1m}\Big|_{z=l}=g_{lm}(t,y), \tag{42}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)T_{jm}\Big|_{y=0}=\omega_{1jm}(t,z);\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)T_{jm}\Big|_{y=b}=\omega_{2jm}(t,z) \tag{43}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)T_{pm}-T_{p+1,m}\right]\Big|_{z=l_p}=0,\\ \left(v_p\frac{\partial T_{pm}}{\partial z}-v_{p+1}\frac{\partial T_{p+1,m}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_p}=0,\ p=\overline{1,n},\end{cases} \tag{44}$$

де

$$F_{jm}(t,y,z)=f_{jm}(t,y,z)+a_{xj}^2W_m(0)\omega_j^1(t,y,z)+a_{xj}^2W_m(a)\omega_j^2(t,y,z).$$

До задачі (40)-(44) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0;b]$ щодо змінної y. Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (40)-(44) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t,z)\,|\, t>0; z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial T_{jmk}}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 T_{jmk}}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2 \delta_m^2 + a_{yj}^2 \gamma^2 + \chi_j^2\right) T_{jmk} = G_{jmk}(t,z), z \in I_j \tag{45}$$

з початковими умовами

$$T_{jmk}(t,z)\big|_{t=0} = g_{jmk}(z); z \in I_j;\; j = \overline{1,n+1}, \tag{46}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) T_{1mk}\Big|_{z=l_0} = g_{0mk}(t); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) T_{n+1,mk}\Big|_{z=l} = g_{lmk}(t), \tag{47}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_p \frac{\partial}{\partial z} + 1\right) T_{pmk} - T_{p+1,mk}\right]\Big|_{z=l_p} = 0, \\ \left(\nu_p \frac{\partial T_{pmk}}{\partial z} - \nu_{p+1} \frac{\partial T_{p+1,mk}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_p} = 0;\; p = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{48}$$

де $G_{jmk}(t,z) = F_{jmk}(t,z) + a_{yj}^2 \nu_k(0) \omega_{1jm}(t,z) + a_{yj}^2 \nu_k(b) \omega_{2jm}(t,z)$.

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (45)-(48) збігається із задачею (18)-(21). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0;l]$ з n точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (45)-(48) відповідно до формул (34) визначають функції

$$T_{imk}(t,z) = \sum_{j=1}^{\infty} T_{mkj}(t) \frac{V_i(z,\lambda_j)}{\left\|V_i(z,\lambda_j)\right\|^2}; i = \overline{1,n+1}. \tag{49}$$

Застосувавши послідовно до функцій $T_{imk}(t,z)$, визначених формулами (49), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та Z_{xm}^{-1}, одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(t,x,y,z) = {} & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^a \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\left[f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta) + \delta_+(\tau) g_k(\xi,\eta,\zeta)\right] \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^a \int_0^b \left[W_i^1(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z) g_0(\tau,\xi,\eta) + W_i^2(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z) g_l(\tau,\xi,\eta)\right] d\xi d\eta d\tau + \\ & + a_{xi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} \left[W_{xik}^1(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta) \omega_k^1(\tau,\eta,\zeta) + W_{xik}^2(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta) \omega_k^2(\tau,\eta,\zeta)\right] \sigma_k d\eta d\zeta d\tau + \\ & + a_{yi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^a \int_{l_{k-1}}^{l_k} \left[W_{yik}^1(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta) \omega_{1k}(\tau,\xi,\zeta) + W_{yik}^2(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta) \omega_{2k}(\tau,\xi,\zeta)\right] \sigma_k d\xi d\zeta d\tau, \end{aligned} \tag{50}$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (50) застосовано компоненти:
фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \exp\left[-\left(\lambda_j^2 + a_{xi}^2 \delta_r^2 + a_{yi}^2 j_p^2 + \chi_i^2\right) t\right] \frac{V_i(z,\lambda_j) V_k(\zeta,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2} \frac{w_r(x) w_r(\xi)}{\|w_r\|^2} \frac{\nu_p(y)\nu_p(\eta)}{\|\nu_p\|^2}; i,k = \overline{1,n+1},$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t,x,\xi,y,\eta,z) = -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} E_{i1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна $W_i^2(t,x,\xi,y,\eta,z) = \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} E_i(t,x,\xi,y,\eta,z,l)$, лівої та правої абсцисних матриць Гріна $W_{xik}^1(t,x,y,\eta,z,\zeta) = E_{ik}(t,x,0,y,\eta,z,\zeta), W_{xik}^2(t,x,y,\eta,z,\zeta) = E_{ik}(t,x,a,y,\eta,z,\zeta)$; лівої та правої ординатних матриць Гріна $W_{yik}^1(t,x,\xi,y,z,\zeta) = E_{ik}(t,x,\xi,y,0,z,\zeta), W_{yik}^1(t,x,\xi,y,z,\zeta) = E_{ik}(t,x,\xi,y,b,z,\zeta)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(4), (36), (6).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_i^s(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{xjk}^s(t,x,y,\eta,z,\zeta)$, $W_{yjk}^s(t,x,\xi,y,z,\zeta)$ $(s=1,2)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (50), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (36), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [22].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри p_j, h_j, $j = 1,2$, дають можливість виділяти із формул (50) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $x = 0, x = a; y = 0, y = b$ крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (50) в залежності від аналітичного вигляду функцій $f_j(t,x,y,z)$, $g_j(x,y,z)$, $\omega_j^s(t,y,z), \omega_{sj}(t,x,z)$, $j = \overline{1, n+1}, s = 1,2$, $g_0(t,x,y)$ та $g_l(t,x,y)$ проводиться безпосередньо.

4. Висновки

За загальних припущень у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач в обмежених багатошарових просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М., 1964. 2. Громик А.П., Конет І.М. Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2007. – Вип.15. – С. 67-82. 3. Громик А.П., Конет І.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С.100-118. 4. Громик А.П., Конет І.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.17. – С. 31-49. 5. Громик А.П., Конет І.М. Математичне моделювання нестаціонарних процесів теплопровідності в напівобмежених багатошарових просторових середовищах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: Зб. наук. пр. Ін-ту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України та Кам'янець-Подільського нац. ун-ту. 2008. – Вип. 1. – С. 26-41. 6. Громик А.П., Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – Вип. 22. – С. 10-17. 7. Громик А.П., Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності в обмежених багатошарових просторових середовищах // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2010. – Вип. 23-24. – С. 4-11. 8. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К., 1998. 9. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М., 1964. 10. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992. 11. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К., 1998. 12. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету. Фізико-математичні науки. 2008. – Вип. 1. – С. 48-56. 13. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків початково-крайових задач теплопровідності в напівобмежених багатошарових просторових середовищах // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. 2009. – Вип. 2. – С. 29-37. 14. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001. 15. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004. 16. Конет І.М., Ленюк М.П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С. 118-134. 17. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997. 18. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4). 19. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984. – 368 с. 20. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991. 21. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1972. 22. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М., 1965.

Надійшла до редколегії 14.06.11

UDC 519.634

E. Azizbayov, c.p.-m.s., Y. Mehraliyev, c.p.-m.s.,
e-mail: azel_azerbaijan@mail.ru, Baku State University

A TIME-NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF HOMOGENEOUS BAR MOTION

Classical solution of boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous bar is studied. By using the Fourier method the problem is reduced to integral equation. By means of contracting mappings principle the local existence and uniqueness of classical solution for the given boundary value problem is proved.

У роботі досліджується класичний розв'язок однієї крайової задачі для рівнянь руху однорідної балки. За допомогою метода Фур'є задачу зведено до інтегрального рівняння. Далі, за принципом стискаючих відображень доведені існування та единість класичного розв'язку.

Introduction. Non-local problems are problems wherein instead of giving values of solution or its derivatives on fixed part of boundary, the relation of these values with values of the same functions on another inner or boundary manifolds is given. Theory of non-local boundary value problems is important in itself as a part of general theory of boundary value problems for partial equations and it is important as a field of mathematics that has numerous applications in mechanics, physics, biology and other natural science disciplines.

The most general time non-local conditions were considered by A.A.Kerefov, J.Chabrowsky [10], V.V.Shelukhin [9], G.M.Liberman [6], A.I.Kozhanov [4]. Yu.A.Mitropolsky, B.I.Moiseenkov [7], J.M.T. Thompson, H.B. Stewart [11], B.S.Bardin, S.D.Furta [1], D.V.Kostin [5] and others have situated oscillation and wave motions of an elastic bar on an elastic foundation.

Problem statement and its reduction to an integral equation. In domain $D_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ we consider equation [5]

$$u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + \beta u_{xx}(x,t) + \alpha u(x,t) + u^3(x,t) = 0 \tag{1}$$

under local boundary conditions

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

and non-local boundary conditions

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) + \delta u_t(x,T) = \psi(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

where $\beta > 0$, $\alpha > 0$, δ are given numbers, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ are given functions and $u(x,t)$ is a unknown function.