УДК 517.945:519.46

М. Сєров, д-р фіз.-мат. наук, проф., Н. Ічанська, канд. фіз.-мат. наук, доц.
k26@pntu.poltava.ua, natasha.ichanska@mail.ru

ОПЕРАТОРИ Q-УМОВНОЇ ІНВАРІАНТНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Досліджено Q-умовну симетрію нелінійних рівнянь теплопровідності відносно інволютивних множин двох операторів. Знайдено нові інволютивні множини з двох операторів відносно яких ці рівняння є Q-умовно інваріантними.

Q-conditional symmetry of equations of nonleanar heat equations with respect to an involute set consisting of two operators was investigated. The new involutes set consisting of two operators Q-conditional symmetry of equations of this class was find.

Вступ

Принципи симетрії відіграють фундаментальну роль у природознавстві. Закони збереження енергії, імпульсу, моменту кількості руху є наслідком однорідності, ізотропності чотиривимірного простору-часу. По відношенню до диференціальних рівнянь, симетрію можна також розглядати як принцип, за допомогою якого із найрізноманітніших логічно допустимих моделей (рівнянь, співвідношень) відбираються тільки ті, котрі володіють широкою симетрією. Це пов'язано, перш за все, з тим, що основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною чи умовною, геометричною чи негеометричною, локальною чи нелокальною симетріями. Усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвела і т.д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Саме ця властивість виділяє їх із множини інших диференціальних рівнянь. Одними з таких рівнянь є нелінійні рівняння теплопровідності, які внаслідок свого широкого застосування є цікавим об'єктом дослідження багатьох науковців. Задачею дослідження симетрійних властивостей лінійного рівняння теплопровідності займався ще Софус Лі. На прикладі лінійного рівняння теплопровідності Дж. Блумен і І.Д. Коул [12] ввели поняття некласичної симетрії диференціальних рівнянь.

Виявляється, що є цілі класи рівнянь, що широко застосовуються при описанні конкретних фізичних процесів, які не володіють ліївською симетрією, а це означає, що метод Лі для них є малоефективним. І тому актуальною стала задача узагальнити метод Лі з метою побудови принципово нових анзаців і точних розв'язків, які не можуть бути отримані стандартним алгоритмом Лі. В 1969 році Дж. Блумен та І.Д. Коул в [12] ввели поняття некласичних симетрій для пошуку нових анзаців і точних розв'язків. Продовження розвитку ідей Блумена і Коула спостерігається в працях Олвера та Розенау [18, 19], В.І. Фущича і І.М. Цифри [15]. На основі цих досліджень в працях В.І. Фущича, В.І. Чопика і М.І. Сєрова [5, 11, 9, 10] було розроблено новий метод знаходження симетрій, який отримав назву метод умовної симетрії. За допомогою цього методу можна одержати такі підмножини розв'язків диференціальних рівнянь, симетрія яких ширша, а іноді і зовсім відрізняється, від симетрії всієї множини розв'язків. Результати досліджень умовної симетрії деяких конкретних рівнянь представлені в [6, 10, 14, 17].

Задача дослідження Q-умовної симетрії рівняння теплопровідності розглядалася багатьма авторами. Так, Q-умовну інваріантність лінійного одновимірного рівняння теплопровідності вивчено в [13, 20]. Задачу про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності розв'язано в [3]. В [4, 6, 7, 8, 14, 9] досліджено умовну та Q-умовну симетрію одновимірних (1+1) нелінійних рівнянь теплопровідності

$$H(u)u_0 + u_{11} = F(u). \tag{1}$$

Ця стаття присвячена дослідженню Q-умовної симетрії нелінійних (1+2)-вимірних рівнянь теплопровідності:

$$H(u)u_0 + \Delta u = F(u), \tag{2}$$

де $u = u(x) \in \mathbb{R}^1$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $H(u)$ та $F(u)$ – довільні гладкі функції. Будь-яке рівняння (2) за допомогою заміни $u \to \int H(u)du$ можна привести до вигляду

$$u_0 + \nabla(g(u)\nabla u) = f(u), \tag{3}$$

де $g(u)$ та $f(u)$ записуються через $H(u)$ та $F(u)$.

Q-умовну симетрію рівнянь (3) відносно оператора

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B^a(x,u)\partial_a + C(x,u)\partial_u, \tag{4}$$

вивчено в [2], де проведено повний опис операторів (4), відносно яких за умови $H(u) \neq 0$ рівняння (2) є Q-умовно інваріантними. В [2] подано результати вичерпної групової класифікації в класі рівнянь (2) з точки зору перетворень еквівалентності, що наведені в теоремі 1.

Теорема 1 Максимальною локальною групою $G^{\sim}$ точкових перетворень еквівалентності рівнянь (2) є група, що складається з перетворень

$$\begin{gathered} x_0 \to \beta_0 x_0 + \alpha_0,\ x_a \to \beta_1\gamma_{ab}x_b + \alpha_a,\ u \to \beta_2 u + \alpha_3, \\ H \to \beta_0\beta_1^{-2}H,\ F \to \beta_2\beta_1^{-2}F, \end{gathered} \tag{5}$$

де $\beta_0\beta_2 \neq 0$, $\beta_1 > 0$, α_l, γ_{ab} –0 сталі, $(\gamma_{ab}) \in O(2)$, $a, b = 1;2$, $l = \overline{0,3}$.

Використовуючи результати праць [1, 16, 2] для рівнянь (3), подамо результати групової класифікації у вигляді наступної теореми.

Теорема 2 Для будь-яких значень функцій $H(u)$ та $F(u)$ з точністю до групи еквівалентності (5) групова класифікація нелінійних рівнянь (2) вичерпно описується випадками, що наведені в таблиці 1.

Зауваження. Зазначимо також, що локальними перетвореннями

$$x_0 \to \frac{1}{\lambda_0 k}e^{\lambda_0 k x_0},\quad u \to e^{\lambda_0 x_0}u \text{ та } x_0 \to -\frac{1}{\lambda_0}e^{-\lambda_0 x_0},\quad u \to u - \lambda_0 x_0 \tag{6}$$

Рівняння $u^k u_0 + \Delta u = \lambda_0 u^{k+1} + \lambda u,\quad e^u u_0 + \Delta u = \lambda_0 e^u + \lambda$ зводяться, відповідно, до рівнянь $u^k u_0 + \Delta u = \lambda u,\quad e^u u_0 + \Delta u = \lambda.$

Тому в таблиці 1 випадки, що мають один номер зводяться один до другого, а саме $3a \to 3\,(k = 1,\ m = 0)$, $4a \to 4\,(m = 1)$, $6a \to 6,\ \ 7a \to 7$.

Таблиця 1. **Ліївська симетрія нелінійного рівняння теплопровідності**

№	$H(u)$	$F(u)$	**Ліївська симетрія**	**Зауваження**
1	$\forall$	$\forall$	$A = \langle \partial_0,\ \partial_1, J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 \rangle$	
2	$\forall$	**0**	$A + \langle D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a \rangle$	
3	e^{ku}	λe^{mu}	$A + \langle D_1 = 2(m-k)x_0\partial_0 + mx_a\partial_a - 2\partial_u \rangle$	$m \neq k$
3a	e^u	$\lambda_0 e^u + \lambda$	$A + \langle D_4 = e^{\lambda_0 x_0}(\partial_0 + \lambda_0\partial_u) \rangle$	$\lambda \neq 0$
4	u^k	λu^m	$A + \langle D_2 = 2(m-k-1)x_0\partial_0 + (m-1)x_a\partial_a - 2u\partial_u \rangle$	$(k,m) \neq (0,0),\ m \neq k+1$
4a	u^k	$\lambda_0 u^{k+1} + \lambda u\mathbb{F}$	$A + \langle D_5 = e^{-\lambda_0 k x_0}(\partial_0 - \lambda_0 u\partial_u) \rangle$	$\lambda \neq 0$
5	**1**	$\lambda u \ln u$	$A + \langle e^{\lambda x_0}(\partial_a + \frac{\lambda}{2}x_a u\partial_u),\ e^{\lambda x_0}u\partial_u \rangle$	
6	u^k	**0**	$A + \langle D,\ D_3 = kx_a\partial_a - 2u\partial_u \rangle$	$k \neq 0$
6a	u^k	$\lambda_0 u^{k+1}$	$A + \langle D_3,\ D_5 \rangle$	$k \neq 0$
7	e^u	**0**	$\langle \partial_0,\ x_0\partial_0 + \partial_u,\ \xi^a(\vec{x})\partial_a - 2\xi_1^1\partial_u \rangle$	$\xi_2^1 + \xi_1^2 = 0,\ \xi_1^1 = \xi_2^2$
7a	e^u	$\lambda_0 e^u$	$A + \langle D_4,\ \xi^a(\vec{x})\partial_a - 2\xi_1^1\partial_u \rangle$	$\xi_2^1 + \xi_1^2 = 0,\ \xi_1^1 = \xi_2^2$

Тут $\lambda \neq 0,\ m,k$ – сталі, $\lambda \in \{-1;1\} \bmod G^{\sim}$. У випадку 3 стала $k \in \{0;1\} \bmod G^{\sim}$ та $m \in \{0;1\} \bmod G^{\sim}$. У випадках 1 та 2, наведені алгебри є максимальними, якщо рівняння не є еквівалентним рівнянням, наведеним у випадках 3 – 7.

Розв'яжемо задачу: дослідити Q-умовну інваріантність нелінійних рівнянь теплопровідності відносно інволютивної множини двох операторів

$$Q_a = A^a(x,u)\partial_0 + B^{ab}(x,u)\partial_b + C^a(x,u)\partial_u \tag{7}$$

де $A, \mathrm{B}^a, C,\ A^a, B^{ab}, C^a$ – довільні гладкі функції своїх аргументів, $a,\ b = 1;2$.

Оскільки будь-який оператор ліївської інваріантності є також оператором Q-умовної інваріантності, з іншого боку дослідження буде проводитися з точки зору перетворень еквівалентності, тому шукаємо оператори Q-умовної інваріантності, які не є еквівалентними ліївським. Зазначимо, що функції $H(u)$ та $F(u)$, при яких рівняння (2) зводяться локальною заміною до лінійного рівняння теплопровідності ми також не розглядаємо, так як це рівняння досліджено в [3].

З точністю до еквівалентності множин операторів Q-умовної симетрії можливі три різні випадки :

1. Якщо координати операторів Q_a пропорційні, то множина (7) еквівалентна одному оператору (4);

2. Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} B^{11} & B^{12} \\ B^{21} & B^{22} \end{vmatrix} \neq 0$ то множина (7) еквівалентна множині операторів вигляду

$$\vec{Q} = \vec{A}\partial_0 + \vec{\partial} + \vec{C}\partial_u, \tag{8}$$

де $\vec{A} = \vec{A}(x,u)$, $\vec{C} = \vec{C}(x,u)$ – довільні гладкі функції;

3. Якщо $\Delta = 0$, то множина (7) еквівалентна множині операторів

$$Q_1 = \partial_0 + C\partial_u,\quad Q_2 = B\partial_1 + \partial_2 + D\partial_u \tag{9}$$

де $C = C(x,u),\ B = B(x,u),\ D = D(x,u)$ – довільні гладкі функції.

У даній статті досліджено Q-умовну інваріантність рівняння (2) відносно інволютивної множини двох операторів (8).

Методи дослідження

Нами використовується поняття інваріантності рівняння відносно операторів Q-умовної симетрії [11] та відносно інволютивних множин Q-умовних операторів [21]. Подамо основні означення.

Означення 1 [22] Множина диференціальних операторів першого порядку

$$Q_a = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ai}(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_a(x,u)\frac{\partial}{\partial u},\quad a = 1,\dots,m, \tag{10}$$

називається інволютивною, якщо існують такі гладкі функції $\mu_{ab}^{c}(x,u),\ \ a,b,c = 1,\dots,m$, що $\left[Q_a, Q_b\right] = \sum_{c=1}^{m} \mu_{ab}^{c}(x,u)Q_c$.

Означення 2 [21] Диференціальне рівняння з частинними похідними S є Q-умовно інваріантним відносно інволютивної множини диференціальних операторів (10), якщо $\left. \underset{r}{Q_a} S \right|_{S=0,\, M} = 0,$

де M – множина всіх диференціальних наслідків рівнянь $Q_a[u^b] = 0$, порядок яких як диференціальних рівнянь не перевищує порядку рівняння S.

Означення 3 [21] Множини диференціальних операторів першого порядку $Q=\{Q_a\}$ та $\tilde{Q}=\{\tilde{Q}_a\}$ називаються еквівалентними, якщо вони задовольняють умову $\tilde{Q}=\mathrm{A}(x,u)Q$, де $A=\mathrm{A}(x,u)$ – невироджена функціональна матриця.

Означення 4 [3] Дві інволютивні множини називаються еквівалентними відносно групи перетворень, якщо існує перетворення з групи, що перетворює одну інволютивну множину в еквівалентну іншій.

Інволютивні множини з двох операторів Q-умовної інваріантності

Дослідимо інваріантність рівняння (2) відносно множини операторів (8). Справедливе наступне твердження.

Теорема 3. Рівняння (2) є Q-умовно інваріантним відносно множини операторів (8), якщо

$$
\begin{aligned}
&A_u^b(\vec{A}^2)u=\vec{A}^2A_{uu}^b,\\
&C^1C_u^2+C_1^2+A^1C_0^2=C^2C_u^1+C_2^1+A^2C_0^1,\\
&C^1A_u^2+A_1^2+A^1A_0^2=C^2A_u^1+A_2^1+A^2A_0^1,\\
&\vec{A}^2C_{uu}^a+2A^bA_{bu}^a+2\vec{A}\vec{C}A_{uu}^a+2(A_b^a+C^bA_u^a)[A_u^b-\frac{A^b}{\vec{A}^2}(\vec{A}^2)_u]-2A_u^a[(\vec{A}\vec{C})_u+A_b^b-H]=0, \qquad (11)\\
&C^a\dot{H}-A_0^aH=3A_u^aF-2C_b^bA_u^a+2A_b^aC_u^b-2A_b^aA_0^b-\\
&-2A_u^a\vec{A}_0\vec{C}+\frac{2A^b}{\vec{A}^2}(A_b^a+C^bA_u^a)[H-A_d^d+\frac{1}{2}(\vec{A}^2)_0-(\vec{A}\vec{C})_u-\vec{A}\vec{C}_u]+\Delta A^a+2C^bA_{bu}^a+\vec{C}^2A_{uu}^a+2A^bC^a{}_{bu}+2\vec{A}\vec{C}C_{uu}^a,\\
&C^a\dot{F}-C_u^aF=C_0^aH+(A_b^a+C^bA_u^a)\left[\frac{2A^b}{\vec{A}^2}(F-C_d^d-\frac{1}{2}(\vec{C}^2)_u+\vec{A}\vec{C}_0)-2C_0^b\right]+\Delta C^a+2C^bC_{bu}^a+\vec{C}^2C_{uu}^a,\ a,b,d=1;2.
\end{aligned}
$$

Доведення. Умови Q-умовної інваріантності рівняння (2) відносно операторів (8) мають вигляд

$$
\left.\underset{2}{Q_a}S\right|_{D^k(Q_au)=0,\,S=0}=0,\qquad \left.\underset{1}{Q_a}(Q_bu)\right|_{Q_cu=0}=0,
$$

де $S=Hu_0+\Delta u-F.$ Якщо використати формули продовження, диференціальні наслідки рівнянь $Q_au=0,$ порядок яких не перевищує порядку рівняння (2), та взяти до уваги те, що функції $\vec{A}$, $\vec{C}$, H – не залежать від похідних функції u, то одержимо рівності (11).

Теорему 3 доведено.

У тому випадку, коли функції A^a та C^a залежать тільки від u, система визначальних рівнянь (11) значно спрощується і стає можливим знайти її загальний розв'язок.

Теорема 4. Будь-яка множина операторів

$$\vec{Q}=\vec{A}(u)\partial_0+\vec{\partial}+\vec{C}(u)\partial_u \qquad (12)$$

Q-умовної симетрії нелінійного рівняння теплопровідності (2) або є еквівалентною множині операторів лиївської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень з групи еквівалентності (5) та додаткових перетворень (6) є еквівалентною одній з множин, які наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. **Оператори Q – умовної інваріантності нелінійного рівняння теплопровідності**

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори	Зауваження
1	$-\left(\frac{G_u}{u}+\frac{1}{2}G_{uu}\right)$	$G\left(G_u+\frac{\lambda_0}{u^2}\right)$	$\vec{Q}=-\frac{\vec{a}}{u}\partial_0+\vec{\partial}+\vec{a}\,G\,\partial_u$	$G(u)=\frac{1}{u}P_3(u)$
2	$-\left(\frac{G_u}{u}+\frac{1}{2}G_{uu}\right)$	$G\left(G_u+\frac{\lambda_0}{u^2}\right)$	$\vec{Q}=(\vec{a}\,t+\vec{b}\,)\,\partial_0+\vec{\partial}+\vec{a}\,G\,\partial_u$	$G(u)=\frac{1}{1+t^2}P_3(t),\ t=tg\,u$

Тут $\vec{a}$, $\vec{b}$ – сталі вектори такі, що $\vec{a}^2=\vec{b}^2=1,$ $\vec{a}\vec{b}=0,$ $P_3(\tau)=\lambda_0+\lambda_1\tau+\lambda_2\tau^2+\lambda_3\tau^3$ – довільний многочлен третього порядку відносно τ.

Доведення. У тому випадку, коли функції A^a та C^a залежать тільки від u, система визначальних рівнянь (11) має вигляд

$$C^1C_u^2=C^2C_u^1,\ C^1A_u^2=C^2A_u^1,\ A_u^a(\vec{A}^2)_u=\vec{A}^2A_{uu}^a, \qquad (13)$$

$$\vec{A}^2C_{uu}^a+2\vec{A}\vec{C}A_{uu}^a+2A_u^a[\vec{C}\vec{A}_u-\frac{\vec{A}\vec{C}}{\vec{A}^2}(\vec{A}^2)_u]=2A_u^a[(\vec{A}\vec{C})_u-H], \qquad (14)$$

$$C^a\dot{F}-C_u^aF=2A_u^a\frac{\vec{A}\vec{C}}{\vec{A}^2}[F-\frac{1}{2}(\vec{C}^2)_u]+\vec{C}^2C_{uu}^a, \qquad (15)$$

$$C^a\dot{H}=3A_u^aF+2A_u^a\frac{\vec{A}\vec{C}}{\vec{A}^2}[H-(\vec{A}\vec{C})_u-\vec{A}\vec{C}_u]+\vec{C}^2A_{uu}^a+2\vec{A}\vec{C}C_{uu}^a. \qquad (16)$$

Після інтегрування рівнянь (13) маємо:

$$C^2 = k_1 C^1,\ A^2 = k_1 A^1 + k_2,\ A_u{}^a = m_a(\vec{A})^2. \qquad (17)$$

Інтегрування останнього рівняння (17) задає два різні випадки: $\vec{A} = -\frac{\vec{a}}{u}$ та $\vec{A} = \vec{a}\, tg\, u + \vec{b}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$ – такі сталі вектори, що $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$, $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Розглянемо перший випадок, для другого випадку доведення проводиться аналогічно. Підставивши $\vec{A} = -\frac{\vec{a}}{u}$ в рівняння (13), одержуємо $\vec{C} = \vec{a}\, G(u)$, де $G(u)$ – довільна гладка функція. Після підстановки функцій $\vec{A}$ та $\vec{C}$ в рівняння (14) та (15) отримаємо $H = -\frac{1}{2}(G_{uu} + \frac{2}{u}G_u)$, $F = G(G_u + \frac{\lambda_0}{u^2})$, де λ_0 – довільна стала. Підставивши знайдені H та F в рівняння (16), одержуємо $G_{uuu} = -\frac{6\lambda_0}{u^4}$. Звідки остаточно отримуємо вигляд функції G з пункту 1 таблиці 2: $G = \frac{1}{u}P_3(u)$, де $P_3(u) = \lambda_0 + \lambda_1\tau + \lambda_2\tau^2 + \lambda_3\tau^3$ – довільний поліном третього степеня.

Теорему 4 доведено.

Крім розв'язків системи (11), наведених в таблиці 2, можна знайти й інші, коли функції A^a та C^a залежать не тільки від u. Так, наприклад,

$$H(u) = 2\ln u, \qquad F(u) = u(ln\, u - ln^2 u + \lambda), \quad \lambda = const,$$

$$A^1 = 1, \quad A^2 = 1, \quad C^1 = 0, \quad C^2 = -e^{x_1 - x_0}u.$$

В результаті одержимо Q-умовні оператори

$$Q_1 = \partial_0 + \partial_1,\ Q_2 = \partial_0 + \partial_2 - e^{x_1 - x_0}u\,\partial_u \qquad (18)$$

для рівняння

$$2ln\, u\, u_0 + \Delta u = u\,(ln\, u - ln^2 u + \lambda). \qquad (19)$$

Узагальнення результатів для рівнянь більшої розмірності

Одержувати Q-умовні оператори багатовимірних рівнянь (2) можна з вже відомих операторів ліївської або Q-умовної симетрії одновимірних рівнянь (1) шляхом їх узагальнення. Справедливість застосування одного з таких методів узагальнення доводить наступна теорема.

Теорема 5. Якщо оператор

$$Q = A(x_0, \omega, \varphi)\partial_0 + B(x_0, \omega, \varphi)\partial_\omega + C(x_0, \omega, \varphi)\partial_\varphi \qquad (20)$$

є оператором ліївської або Q-умовної інваріантності (1+1)-вимірного рівняння

$$S(\varphi, \varphi_0, \varphi_\omega^2, \varphi_{\omega\omega}) = 0,\ \varphi = \varphi(x_0, \omega), \qquad (21)$$

то оператори $\vec{Q} = \vec{\alpha}A(x_0, \vec{\alpha}\vec{x}, u)\partial_0 + B(x_0, \vec{\alpha}\vec{x}, u)\vec{\partial} + \vec{\alpha}C(x_0, \vec{\alpha}\vec{x}, u)\partial_u$, утворюють множину операторів Q-умовної інваріантності (1+1)- вимірного рівняння

$$S(u, u_0, u_a u_a, \Delta u) = 0, \qquad (22)$$

де $u = u(x_0, \vec{x})$, $\vec{\alpha} = const$, $(\vec{\alpha})^2 = 1$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Доведення. Теорема доводиться методом дослідження умовної симетрії, наведеним в [11]. Для цього треба показати, що $\underset{2}{Q}{}_a S = \lambda_1 S + \lambda_2 Q_a u$, де $\lambda_1\ \lambda_2$ – деякі диференціальні оператори.

Подіявши продовженим оператором Q_a на рівняння (22) і використавши той факт, що рівняння (21) є Q-умовно інваріантним відносно оператора (20), тобто $\underset{2}{Q}{}_a S = \lambda_1 S + \lambda_2 Q\varphi$, одержуємо

$$\underset{2}{Q}{}_a S = \alpha_a \lambda_1 S + \lambda_2 Q_a u + \left[\frac{1}{B}(\Delta B + 2B_{bu}u_b + B_{uu}u_b u_b + B_u \Delta u)\alpha_c S_{\Delta u} + \frac{2}{B}(B_b u_b + B_u u_b u_b)\alpha_c S_{u_a u_a} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{B}(B_0 + B_u u_0)\alpha_c S_{u_0} + \alpha_c - 2(B_b + B_u u_b)\partial_c \right](\alpha_c Q_a u - \alpha_a Q_c u).$$

що і треба було довести.

Використовуючи теорему 5, з відомих операторів Q-умовної інваріантності (1+1)-вимірного рівняння теплопровідності [6, 14] шляхом узагальнення $u = \varphi(x_0, \omega)$, $\omega = \vec{\alpha}\vec{x}$, $\vec{\alpha}^2 = 1$ одержуються нові оператори Q-умовної симетрії для рівняння (2).

Крім методу запропонованого в теоремі 5, можна застосувати й інші методи, наприклад, якщо використати інваріантність рівняння (2) відносно алгебри $AO(3)$. В таблиці 3 наведено деякі результати, що отримані такими способами.

Таблиця 3. **Оператори Q –умовної симетрії нелінійного рівняння теплопровідності**

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори
1	**1**	λu^3	$Q_a = \frac{1}{3}\alpha_a(\vec{\alpha}\,\vec{x})\partial_0 + \partial_a + \frac{\alpha_a u}{\vec{\alpha}\,\vec{x}}\partial_u$
2	**1**	$F(u)$	$Q_a = \vec{\alpha}\,\vec{x}\,\partial_a + \alpha_a F(u)\partial_u, \quad F\ddot{F} = 2(\dot{F}-1)$
3	**1**	$2P_3(u)$	$Q_a = \alpha_a\,\partial_0 + 3u\,\partial_a + 3\alpha_a P_3(u)\partial_u$, **де** $P_3(u) = u^3 + \lambda_1 u + \lambda_0$
4	**1**	$F(u)$	$Q_a = 2\sqrt{x_0}\partial_a + \alpha_a F(u)\partial_u, \quad F\ddot{F} = 2$
5	$\frac{1}{u}$	$\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u}$	$Q_a = \alpha_a\partial_0 + \frac{u}{\vec{\alpha}\vec{x}}\partial_a + \alpha_a(\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u, \quad F\ddot{F} = 2(\dot{F}-1)$
6	$3\lambda_3 + \frac{\lambda_2}{u}$	$(2\lambda_3 + \frac{\lambda_2}{u})P_3$	$Q_a = \alpha_a\,\partial_0 + u\,\partial_a + \alpha_a P_3(u)\partial_u$, **де** $P_3(u) = \lambda_3 u^3 + \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$
7	$\lambda_1 u - \lambda_2$	$\lambda_3 u^3 - 2u$	$Q_a = \frac{1}{3}\alpha_a\lambda_2\partial_0 + th(\vec{\alpha}\vec{x})\partial_a + \frac{\alpha_a u}{ch^2(\vec{\alpha}\vec{x})}\partial_u$
8	$\frac{1}{u^4}$	$m^2 u + \frac{\lambda}{u^3}$	$Q_a = 2m\alpha_a e^{-2m\vec{\alpha}\vec{x}}\partial_0 + \partial_a + m\alpha_a u\partial_u$
9	$\lambda_1 u^2 + \lambda_2$	$\lambda_3 u^3 + 2u$	$Q_a = \alpha_a\lambda_2\cos^2(\vec{\alpha}\vec{x})\partial_0 - \frac{1}{2}\sin(2\vec{\alpha}\vec{x})\partial_a - \alpha_a u\partial_u$
10	$\lambda_1 u^2 + \lambda_2$	$\lambda_3 u^3$	$Q_a = \frac{\alpha_a}{3}\lambda_2(\vec{\alpha}\vec{x})^2\partial_0 + \vec{\alpha}\vec{x}\partial_a + \alpha_a u\partial_u$
11	e^u	e^u	$Q_a = \vec{\alpha}\vec{x}\partial_a - 2\,\alpha_a\partial_u$
12	e^u	e^u	$Q_a = \partial_a + \alpha_a tg\frac{(\vec{\alpha}\vec{x})}{2}\partial_u$
13	e^u	e^u	$Q_a = \partial_a + \alpha_a th\frac{(\vec{\alpha}\vec{x})}{2}\partial_u$
14	$\lambda_1 u^{\frac{2}{2-n}} + \lambda_2$	$\lambda_3 u^{\frac{4-n}{2-n}}$	$Q_a = \frac{\lambda_2}{4-n}\alpha_a\partial_0 + \partial_a + (2-n)\frac{\chi_\alpha}{\vec{x}^2}u\partial_u, n \neq 2,4$
15	$\frac{\lambda_1}{u}$	λ_3	$Q_a = 2kx_a\partial_0 - \partial_a + \frac{2x_a}{\vec{x}^2}u\partial_u, \partial e\ n = 4$
16	$\lambda_1 u^k$	$\lambda_2\ u^{k+1}$	$Q_a = 2x_a\partial_0 - \vec{x}^2\partial_a + \frac{2x_a}{k}u\partial_u,\ \partial e\ n = 2, k \neq 0$

Тут $m, \lambda, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \vec{\alpha}, n, k$ – довільні сталі.

Висновки

Розв'язано задачу знаходження інволютивних множин Q-умовних операторів інваріантності (1+2)-вимірного рівняння теплопровідності вигляду (8).

Зокрема, за умови, що координати операторів залежать тільки від змінної u, проведено повний опис множин двох операторів (7) Q-умовної інваріантності рівняння (2). За відомими операторами лiївської та Q-умовної інваріантності (1+1) – вимірного рівняння теплопровідності отримано оператори Q-умовної інваріантності (1+n) – вимірного рівняння теплопровідності.

1. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двух и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т.19. – С.1215–1223. 2. Ічанська Н.В. Q – умовна інваріантність нелінійних (1+2) – вимірних рівнянь реакції – дифузії // Математичний вісник НТШ – 2010 р. – Т.7. – С.45 –74. 3. Попович Р.О., Корнєва І.П. Про Q–умовну симетрію лінійного n–вимірного рівняння теплопровідності // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. – 1998. – Т.19. – С.200–211. 4. Сєров Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр.мат.журн. – 1990. – Т.42, №10. – С.1370–1376. 5. Фущич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр.мат.журн.– 1991– 43, №11.– С.1456–1470. 6. Фущич В.И., Сєров Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – Сер.А, №7. – С.24–27. 7. Фущич В.И., Сєров Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности // Доклады АН Украины. – 1992. – №1. – С.26–30. 8. Фущич В.И., Сєров Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – . №11. – С.15–18. 9. Фущич В.И., Сєров Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1988. – Сер. А, №9. – С.17–20. 10. Фущич В.І., Чопик В.І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь // Укр.мат.журн. – 1993. – Т. 45, '№10. – С.1433–1443. 11. Фущич В.И., Штелень В.М., Сєров Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – Киев: Наукова думка. – 1989. – 339с. 12. Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – Vol. 18, №11. – P. 1025–1042. 13. Fushchish W.I., Serov N.I., Shtelen W.M., Popovich R.E. Q–conditional symmetry of the linear heat equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. 1992. – №12. – P.27–32. 14. Fushchich W.I., Serov N.I. , Tulupova L.A. The Conditional Invariance, Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. – 1993. – №4. – P.37–40. 15. Fushchych W., Tsyfra I. On reduction, exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. –Vol. 20. – P. L 45–L 47. 16. Ibragimov N.H. (Editor) Lie group analysis of differential equations – symmetries, exact solutions , conservation laws // Boca Raton, FL, Chemical Rubber Company. – 1994. – Vol. 1. 17. Levi D., Winternitz P. Non–classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – Vol. 22, №15. – P. 2915–2924. 18. Olver P., Rosenau P. Group–invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. M ath. – 1987. – Vol.47. – P.263–278. 19. Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat , wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – Vol. 118, №4. – P.172–176. 20. Popovych R.O. On reduction , Q–conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Phisics". – Kyiv: Institute of Mathematics. – 1997. – Vol. 2. – P.437–443. 21. Popovych R.O. Equivalence of Q–conditional symmetries under group of local transformation // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2000. – Vol. 30, Part 1. – P.184–189. 22. Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – Vol. 238, №1. – P.101–123.

Надійшла до редколегії 07.07.11