

УДК 620.179

В. Богданов, канд. фіз.-мат. наук, Г. Сулим, д-р фіз.-мат. наук,
e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

ДИНАМІЧНИЙ РОЗВИТОК ТРІЩИНИ У КОМПАКТНОМУ ЗРАЗКУ ЗА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ ПЛОСКОГО ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

З використанням різницевих методів досліджується плоский напружений стан тонкого компактного зразка для визначення в'язкості руйнування (тріщиновитримності) в нестационарній пружно-пластичній постановці з урахуванням підростання тріщини за навантаження, яке прикладене до локалізованої області та змінюється з часом за лінійним законом. Тріщина підостає за умови відсутності максимальних напружень в області вістря тріщини. В ролі основного незалежного параметра для виявлення розвитку полів напружень, деформацій, параметра Одквіста, пружних і пластичних складових енергії деформації та інших величин вибрано розрахункові значення коефіцієнта інтенсивності напружень біля тріщини у статичній задачі для пружно деформованого компактного зразка. Виявлені особливості зміни напружень при досягненні згаданими коефіцієнтами інтенсивності напружень певних критичних значень.

On the base of developed method of solving problems of planar stress state in non-stationary plastic-elastic model the problem of crack cleavage was solved when non-stationary pressure is applied. The non-stationary pressure time dependence is linear and area of that pressure has not changed. The crack is growing when maximal stresses in the area of top of crack are absent. There were determined dependences of plastic and elastic deformation energies and areas of plastic deformations for different values of stress intensity.

1. Вступ

У працях В.І.Махненка [7, 8] запропоновано для аналізу процесів руйнування застосувати поряд із експериментальними також і розрахункові методи із використанням квазістатичної пружно-пластичної моделі матеріалу. Ці результати узагальнено у [1–4], де визначальні співвідношення для пружно-пластичного деформування поєднано із динамічними рівняннями у припущенні, що тріщина є нерухомою. Запропоновані моделі дали можливість істотно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів, однак їхнє застосування можна вважати коректним лише у разі повільного підростання тріщини.

У цьому дослідженні методика праці [3] поширена на той випадок, коли тріщина динамічно просувається у пружно-пластичному зразку після його динамічного навантаження.

2. Математичне формулювання задачі

Розглядається деформування компактного (балкового) зразка у формі прямокутника $\Sigma = L \times B$ ($-L/2 \leq x \leq L/2$; $0 \leq y \leq B$) з пропилом-тріщиною початкової довжини $l = l_0$ уздовж відрізка $\{x = 0; 0 \leq y \leq l_0\}$ і контактує з двома нерухомими опорами уздовж $\{L_* \leq |x| \leq L_* + a; y = 0\}$. Товщина w зразка вважається настільки великою, щоб можна було використовувати залежності плоского деформованого стану ($\sigma_{zz} = \text{const}$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$).

Зверху на тіло падає абсолютно жорсткий ударник, що контактує уздовж відрізка $\{|x| \leq A; y = B\}$. Його дію на тіло замінимо рівномірно розподіленим в області контакту нормальним напруженням $-P$, що змінюється з часом як лінійна функція $P = p_{01} + p_{02}t$. З огляду на симетрію процесу деформування відносно лінії $x = 0$ далі розглядається лише права частина поперечного перерізу (рис. 1а). Вважатимемо, що матеріал є пружно-пластичним із зміцненням, причому розрахунок полів напружень, деформацій та їхніх приростів, зокрема й приростів інтенсивності пластичних $d\varepsilon_i^p$, а також параметра Одквіста $k = \int d\varepsilon_i^p$ будемо нижче здійснювати на основі числового розв'язування відповідної динамічної пружно-пластичної задачі. При здійсненні розрахунків використаємо відомі методики дослідження квазістатичної пружно-пластичної [7, 8] моделі, що враховують нестационарність навантаження і застосовують числове інтегрування, зреалізоване в розрахунку динамічної пружної моделі [11]. При розрахунку динамічних полів напружень і деформацій не враховуємо взаємодії хвильових полів, відбиття від межі тіла і можливої при цьому контактної взаємодії між берегами розрізу.

Розглядаються рівняння плоскої динамічної теорії, для якої компоненти вектора зміщень $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші, а рівняння руху середовища густиною ρ мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.$$

Крайові умови задачі, які враховують зміну довжини тріщини, однак виходять із припущення про незмінність області прикладання реакції, розташування опор, а також визначення опорних реакцій за допомогою методів статички, запишуться так:

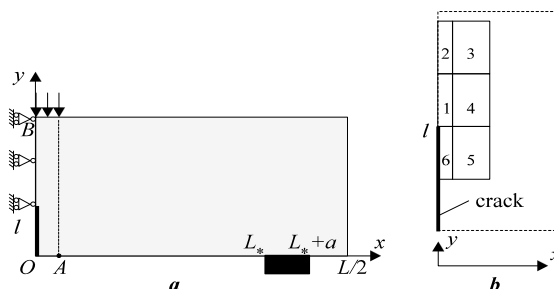


Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad 0 < y < l: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 x = 0; \quad l < y < B: & \quad u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 x = L/2, \quad 0 < y < B: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad 0 < x < L^*: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad L^* < x < L^* + a: & \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad L^* + a < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = B, \quad 0 < x < A: & \quad \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = B, \quad A < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Початкові умови мають вигляд

$$u_x|_{t=0} = 0, \quad u_y|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_x|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_y|_{t=0} = 0, \quad l|_{t=0} = l_0, \tag{2}$$

В основу визначальних співвідношень механічної моделі покладено теорію неізотермічного пластичного течіння середовища із зміцненням за умови текучості Губера – Мізеса. Ефектами повзучості і температурним розширенням нехтуємо. Тоді, вважаючи компоненти тензора деформацій сумою пружних і пластичних його складових, отримаємо для них

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \varphi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda. \tag{3}$$

тут $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – компоненти девіатора тензора напружень; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль зсуву; $K_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$, $K = 3K_1$ – модуль об’ємного стиску, що зв’язує у співвідношенні $\varepsilon = K\sigma + \varphi$ об’ємне розширення 3ε (температурне розширення $\varphi \equiv 0$); E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуасона; $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ – середнє напруження; $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається умовою пластичності (формою поверхні навантаження) і з огляду на згаданий вище його вибір квадратично залежить від компонент девіатора напружень s_{ij} [8].

Матеріал зміцнюється з коефіцієнтом зміцнення η^* [7]:

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0} \right)^{\eta^*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}, \quad T_0 = 20^\circ \text{C}, \tag{4}$$

де $\sigma_S(T)$ – межа текучості після зміцнення матеріалу за температури T .

Перепишемо (3) у розгорнутій формі:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{xx} &= d \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{xx} - \sigma) d\lambda, \quad d\varepsilon_{yy} = d \left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{yy} - \sigma) d\lambda, \\
 d\varepsilon_{zz} &= d \left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{zz} - \sigma) d\lambda, \quad d\varepsilon_{xy} = d \left(\frac{\sigma_{xy}}{2G} \right) + \sigma_{xy} d\lambda,
 \end{aligned} \tag{5}$$

причому

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= \left\{ 0, \quad (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T) < 0); \quad \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, \quad (f = 0, \quad df = 0) \right\}, \\
 d\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left((d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2 \right)^{1/2}, \\
 \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{xy}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

На відміну від традиційної плоскої деформації, коли $\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \text{const}$, для уточненого опису деформування зразка з урахуванням можливого приросту поздовжнього видовження $\Delta\varepsilon_{zz}$ подамо його у вигляді [1, 6, 8]

$$\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \Delta\varepsilon_{zz}^0 + \Delta\chi_x x + \Delta\chi_y y. \tag{7}$$

де невідомі $\Delta\chi_x$ і $\Delta\chi_y$ характеризують згин призматичного тіла (яке моделює в механіці деформівного твердого тіла стан плоскої деформації) в площинах Ozx і Ozy відповідно, а $\Delta\varepsilon_{zz}^0$ – прирости за згаданого згину деформації вздовж волокон $x = y = 0$.

3. Схема розв’язування задачі.

Нехай нестационарна взаємодія відбувається в інтервалі часу $t \in [0, t^*]$. Тоді для кожного моменту часу t з цього інтервалу:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^e &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma, \quad \varepsilon_{yy}^e = \frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma, \quad \varepsilon_{zz}^e = \frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2G} + K\sigma, \quad \varepsilon_{xy}^e = \frac{\sigma_{xy}}{2G}, \\
 \frac{d\varepsilon_{xx}^p}{dt} &= (\sigma_{xx} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{dt} = (\sigma_{yy} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_{zz}^p}{dt} = (\sigma_{zz} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{dt} = \sigma_{xy} \frac{d\lambda}{dt}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Для числового інтегрування за часом використовувалася квадратурна формула Грегорі [10] порядку $m_1 = 3$ з коефіцієнтами D_n . Після рівномірної дискретизації за часом з вузлами $t_k = k\Delta t \in [0, t^*]$ ($k = \overline{0, K}$) для кожного значення k запишемо відповідні вузлові значення приростів деформацій:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{xx,k} &= B_1 \sigma_{xx,k} + B_2 \sigma_{yy,k} - \beta_{xx}, \quad B_1 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{3} \left(K + \frac{1}{G} + 2D_0 \Delta \lambda_k \right), \\ \Delta \varepsilon_{yy,k} &= B_2 \sigma_{xx,k} + B_1 \sigma_{yy,k} - \beta_{yy}, \quad B_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3} \left(K - \frac{1}{2G} - D_0 \Delta \lambda_k \right), \\ \Delta \varepsilon_{zz,k} &= \alpha_1 \sigma_{zz,k} + \alpha_2 (\sigma_{xx,k} - \sigma_{yy,k}) - b_{zz}, \quad B_3 = \frac{1}{2G} + D_0 \Delta \lambda_k, \quad \Delta \varepsilon_{xy,k} = B_3 \sigma_{xy,k} - b_{xy}, \\ \beta_{xx} &= b_{xx} - \alpha_2 (b_{zz} + \Delta \varepsilon_{zz}) / \alpha_1, \quad \beta_{zz} = -(b_{zz} + \Delta \varepsilon_{zz}) / \alpha_1, \quad \beta_{yy} = b_{yy} - \alpha_2 (b_{zz} + \Delta \varepsilon_{zz}) / \alpha_1, \\ b_{ij} &= \frac{1}{2G} \sigma_{ij,k-1} + \delta_{ij} \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma_{k-1} - \sum_{n=1}^{m_1-1} D_n (\sigma_{ij,k-n} - \delta_{ij} \sigma_{k-n}) \Delta \lambda_{k-n}, \quad (i, j = x, y). \end{aligned} \tag{9}$$

Функція $\psi = 1/(2G) + \Delta \lambda$, що характеризує умову текучості, з урахуванням (6), (7) дорівнює:

$$\begin{aligned} \psi &= \left\{ \frac{1}{2G} \quad (f < 0), \quad \frac{1}{2G} + \frac{3\Delta \varepsilon_f^p}{2\sigma_f} \quad (f = 0, \quad df = 0) \right\}, \\ \Delta \varepsilon_f^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left((\Delta \varepsilon_{xx}^p - \Delta \varepsilon_{yy}^p)^2 + (\Delta \varepsilon_{xx}^p - \Delta \varepsilon_{zz}^p)^2 + (\Delta \varepsilon_{yy}^p - \Delta \varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(\Delta \varepsilon_{xy}^p)^2 \right), \\ \varepsilon_{xx}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{xx} + \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma, \quad \Delta \varepsilon_{xx}^p = \Delta \varepsilon_{xx} - \Delta \varepsilon_{xx}^e, \\ \varepsilon_{yy}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{yy} + \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma, \quad \Delta \varepsilon_{yy}^p = \Delta \varepsilon_{yy} - \Delta \varepsilon_{yy}^e, \\ \varepsilon_{zz}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{zz} + \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma, \quad \Delta \varepsilon_{zz}^p = \Delta \varepsilon_{zz} - \Delta \varepsilon_{zz}^e, \\ \varepsilon_{xy}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy}, \quad \Delta \varepsilon_{xy}^p = \Delta \varepsilon_{xy} - \Delta \varepsilon_{xy}^e. \end{aligned} \tag{10}$$

Урахування під час розрахунків величини $\Delta \varepsilon_{zz}^p$ виявило, що її вплив настільки малий, що без зменшення точності обчислень можна вважати $\Delta \varepsilon_{zz}^p = 0$.

Для урахування фізичної нелінійності, що міститься в залежностях (10), застосовується метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [8]:

$$\begin{aligned} \psi^{(n+1)} &= \left\{ \psi^{(n)} \rho + \frac{1-\rho}{2G} \quad (Q_i < -Q); \quad \psi^{(n)} \quad (|Q_i| < Q); \quad \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(T)} \quad (Q_i > Q) \right\}, \\ Q_i &= \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T). \end{aligned} \tag{11}$$

де Q – найбільше відхилення інтенсивності напружень від зміцненої межі текучості; емпірична стала $0 \leq \rho \leq 1$ визначається для різних типів матеріалів.

Розв'язок системи (9) дає вирази для компонент тензора напружень на кожному кроці:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,k} &= A_1 \Delta \varepsilon_{xx,k} + A_2 \Delta \varepsilon_{yy,k} + Y_{xx}, \quad Y_{xx} = A_1 \beta_{xx} + A_2 \beta_{yy}, \quad A_1 = B_1 / (B_1^2 - B_2^2), \\ \sigma_{yy,k} &= A_2 \Delta \varepsilon_{xx,k} + A_1 \Delta \varepsilon_{yy,k} + Y_{yy}, \quad Y_{yy} = A_2 \beta_{xx} + A_1 \beta_{yy}, \quad A_2 = -B_2 / (B_1^2 - B_2^2), \\ \sigma_{zz,k} &= -\alpha_2 (\sigma_{xx,k} + \sigma_{yy,k}) / \alpha_1 - \beta_{zz}, \quad \sigma_{xy,k} = A_3 \Delta \varepsilon_{xy,k} + Y_{xy}, \quad Y_{xy} = A_3 b_{xy}, \quad A_3 = 1/B_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Невідомі $\Delta \chi_x$, $\Delta \chi_y$ і $\Delta \varepsilon_{zz}^0$ в (7) визначаються з умов врівноваженості парних щодо x нормальних напружень σ_{zz}

$$\int_{\Sigma} \int \sigma_{zz}(x, y) \xi dx dy = M_{\xi}, \quad (\xi = 1, x, y) \quad \text{при} \quad M_1 = M_x = M_y = 0, \tag{13}$$

де M_1 – проекція на вісь z головного вектора контактних напружень, а M_x, M_y – відповідні проекції головного моменту зусиль, що діють на опору (кручення, як зазначалося, відсутнє). З огляду на симетрію задачі та $\sigma_{zz}(x, y) = \sigma_{zz}(-x, y)$ це рівняння у разі $\xi = x$ задовольняється автоматично.

Якщо у (13) підставити (7) і (12), з урахуванням симетричності області інтегрування щодо x і парності функцій $\sigma_{xx,k}, \sigma_{yy,k}, b_{zz}$, матимемо $\Delta \chi_x = 0$. Для обчислення $\Delta \varepsilon_{zz}^0$, $\Delta \chi_y$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{zz}^0 L_{\xi 1} + \Delta \chi_y L_{\xi y} = \bar{M}_{\xi}, \quad L_{\xi r} = \int_{\Sigma} \frac{\xi r dx dy}{\alpha_1}, \\ \bar{M}_{\xi} = \int_{\Sigma} \int \frac{\alpha_2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - b_{zz}}{\alpha_1} \xi r dx dy, \quad (r, \xi = 1, y). \end{aligned} \tag{14}$$

Інтенсивність напружень і деформацій, що використовуються вище, визначалися для кожної елементарної комір-ки із числового розв'язку. Незалежним параметром, який характеризує процес навантаження, є час $t_k = k\Delta t$, а відтак і відповідна цьому моменту часу сила $F = 2AP$ контактної взаємодії ударника зі зразком. Оскільки в механіці руйнування в'язкість руйнування (тріщиновитримність) переважно отримують у квазістатичних експериментах та зіставляють її із граничним значенням коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) K_I , отриманим із пружного розв'язку, то для опису зміни окремих характеристик в ролі незалежного параметра (змінної) будемо вважати наближене значення КІН K_I^e (нижче називатимемо його пружним КІН) для багатьох залежностей для пружної задачі триточкового зги-ну балки з тріщиною [9]:

$$K_I^e = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left(1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left(\frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left(\frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left(\frac{l}{B} \right)^4 \right). \quad (15)$$

Більш вірогідним є використання локального критерію крихкого руйнування: якщо в комірці 1, головне напружен-ня σ_1 досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування $S_C(k) = [C_1 + C_2 \exp(-A_d k)]^{-1/2}$ за умови, що ефективне напруження $\sigma_{eff} = \sigma_i - \sigma_{02}$ при $\sigma_{02}(T) = a_1 - c(T + 273) + b \exp(-h(T + 273))$ не є від'ємним, то вважається, що ця комірка руйнується [1], довжина тріщини збільшується на висоту цієї комірки і відбувається пере-будова сітки так, щоби біля вістря тріщини знову була комірка 1. Параметри a_1, c, b, h, C_1, C_2 , і A_d цих залежностей характеризують властивості досліджуваного полікристалічного матеріалу. Для визначення актуальної довжини l тріщини у кожний розглядуваний момент часу використовувався такий алгоритм. Якщо найбільші значення будь-яких напружень з'являлися не в комірці 1, а в комірці 2, тоді тріщина просувалася на одну комірку вгору. Комірка 2 ставала коміркою 1. Всі напруження перераховувалися для збільшеної тріщини. Так робилося поки всі найбільші напруження не знаходилися в комірці 1.

Обчислені поля деформацій використовувалися для визначення пластичної і пружної складових енергій дефор-мації [5]:

$$U_{ij}^e = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \int \varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij} dx dy, \quad U_{ij}^p = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \int \varepsilon_{ij}^p \sigma_{ij} dx dy, \quad (i, j = x, y). \quad (16)$$

4. Числова реалізація

Для розрахунків математичної моделі компактного зразка із сталі 15X2НМФА застосовано метод скінчених різ-ниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей Ox (N елементів) і Oy (M елементів). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Характерний розмір комірок в радіусі 1-2 мм від верши-ни тріщини дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу (0,05-мм). Розбиття за часом рівномірне.

Результати розрахунків середніх напружень у комірках поблизу вістря тріщини за відносно невеликих наванта-жень, коли у дискретизованій задачі пластичні деформації відсутні, зіставлялися із розрахованими для центру комірки на основі класичних одночленних асимптотичних залежностей п. 1.2 [9] з використанням КІН (15). Для комірок 1, 6 (див. рис. 1б) при $x = 0,01$ мм, $y = 3 \pm 0,04$ мм різниця не перевищувала 0,3%.

На рис. 2-9 відображено результати обчислення деяких важливих для механіки руйнування величин за таких значень параметрів: коефіцієнт зміцнення матеріалу $\eta = 0,05$; $L=60$ мм; $B=10$ мм; $l=3$ мм; $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с; $A=2,5$ мм; $\rho_{01} = 8$ МПа; $\rho_{02} = 10$ МПа; $M=60$; $N=77$. Найменший крок розбиття дорівнював 0,02 мм, а найбільший 2,6 мм ($\Delta x_{min}=0,02$ мм; $\Delta y_{min}=0,04$ мм (лише перший шар); $\Delta x_{max}=2,6$ мм; $\Delta y_{max}=0,6$ мм), $T=50^\circ$.

Графіки розрахованої залежності від КІН K_I^e середніх напружень на продовженні осі включення біля його вістря (комірка 1 на схемі рис. 1б) двовимірної моделі компактного зразка (рис. 2) свідчать, що з розвитком процесу дефо-рмування зразка в разі перевищення пружним КІН K_I^e рівня $K_I^e = K_{I*}^e = 78,3 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, деякі напруження (наприклад σ_{yy}) у цій точці монотонний характер збільшення змінюють на коливний, а в разі перевищення пружним КІН K_I^e рівня $K_I^e = K_{I**}^e = 111,7 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, коливання напружень набувають більшої інтенсивності. Суцільна, суцільна з трикут-ником, пунктирна, суцільна з хрестиком і суцільна з кружечком лінії стосуються відповідно напружень σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , напруження текучості σ_S та інтенсивність напружень σ_j .

Обчислення виявили, що при температурі зразка $T = 50^\circ \text{C}$ тріщина починала збільшуватися в разі перевищення пружним КІН рівня $K_I^e = K_{Ic}^e \equiv 60,1 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$. Дослідження залежності довжини тріщини від K_I^e (рис. 3) дає можли-вість стверджувати, що коли інтенсивність напружень набуває значення $K_I^e = K_{I*}^e$, процес збільшення довжини трі-щини стає інтенсивнішим (із набагато більшими приростами довжини із збільшенням K_I^e).

Після досягнення пружним КІН значення $K_I^e = K_{Id}^e \equiv 169,4 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ напруження σ_{xx} і σ_{yy} починають зменшува-тися (див. рис. 2). В цей момент параметр Одквіста (рис. 4) в комірці 1 має коливний характер із затухаючою амплі-тудою і довжина тріщини досягає $l = 5,94$ мм. З цього моменту, скоріш за все, починається подальше доломлюван-ня зразка.

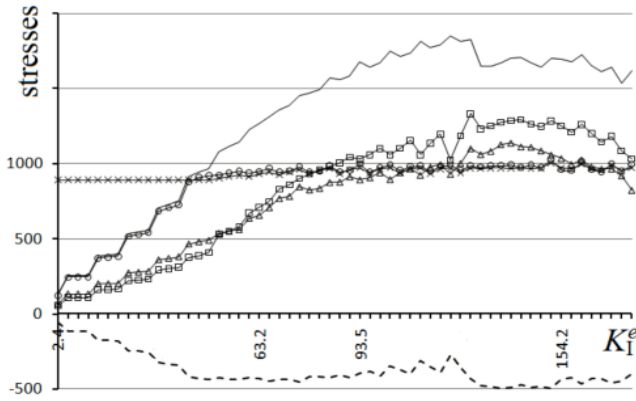


Рис. 2. Залежність напруження у комірці 1 на продовженні осі тріщини від K_I^e

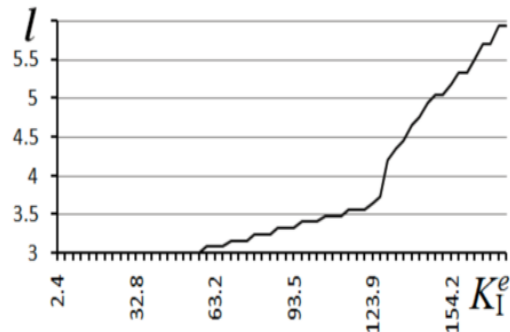


Рис. 3. Залежність довжини тріщини l від K_I^e

Обчислення залежності параметра Одквіста κ , який характеризує накопичену у комірці 1 (без посередньо перед вистрям тріщини) пластичну деформацію від K_I^e , відображає рис. 4. Поки деформування є пружним $\kappa=0$, потім у комірці 1 починають монотонно накопичуватися пластичні деформації і у момент, коли тріщина робить перший стрибок, відбувається зміна розташування комірки 1 у зону з меншими значеннями параметра κ (значення κ стрибком зменшується) і знову йде процес накопичення κ . Через це при перевищенні пружним КІН значення K_{Ic}^e зміна κ , а разом із тим і величина накопиченої в комірці 1 пластичної деформації має осциляційний (немонотонний) характер. У разі, коли $K_I^e = K_{Ic}^e$ амплітуда осциляцій параметру κ збільшується, і, як зазначалося вище, при $K_I^e = K_{Ic}^e$ його зростання уповільнюється.

Рис. 5 і 6 відображають відповідно залежності від температури T середнього напруження σ та параметра Одквіста κ у комірці 1, отримані за фіксованого значення $K_I^e = K_{I0}^e = 75,3 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}} = K_{Ic}^e$ у разі врахування розвитку тріщини (суцільні лінії) при досягненні навантаженням такого рівня, а також у припущенні, що тріщина свого первісного розміру не змінює [1] (штрихові лінії). Для порівняння приведено відповідні результати задачі плоского напруженого стану (лінії із трикутником). У тих випадках, коли рівень температури забезпечує можливість збільшення розміру тріщини при заданому $K_I^e = K_{I0}^e$ (зокрема і при $T=50^\circ$) в разі плоского напруженого стану зразка з нерухоною тріщиною в зоні перед кінчиком тріщини властивий вищий рівень середніх напружень і накопичених пластичних деформацій. Якщо ж при певній температурі (у даному випадку це $T < -100^\circ$) рівень напружень для руху тріщини недостатній, то обидва підходи дають однакові результати.

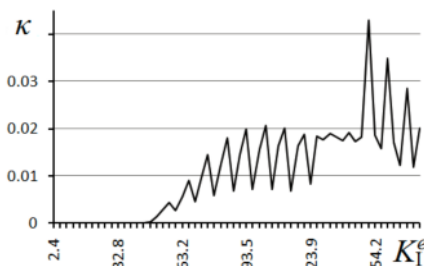


Рис. 4. Залежність параметра Одквіста κ від КІН K_I^e у комірці 1

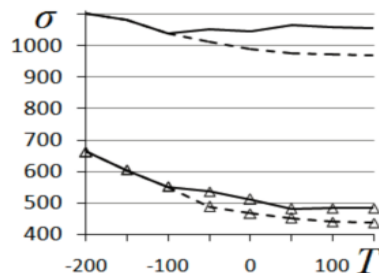


Рис. 5. Залежність середніх напружень σ від температури T у комірці 1

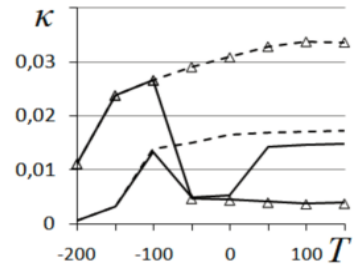
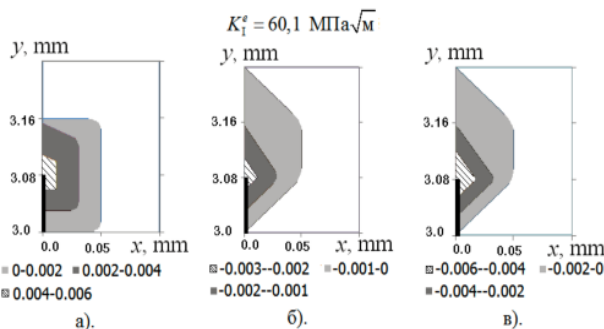


Рис. 6. Залежність параметра Одквіста κ від температури T у комірці 1



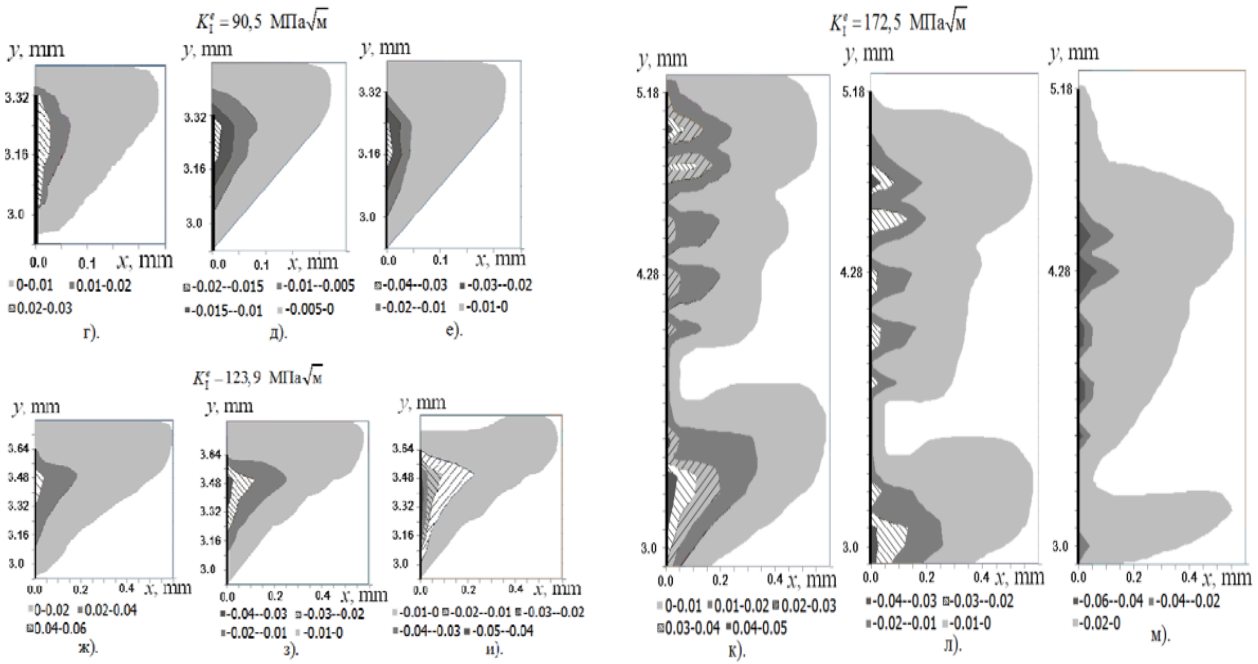


Рис. 7. Діаграми розподілу максимальних досягнутих пластичних деформацій ϵ_{xx}^p (а, г, ж і к), ϵ_{yy}^p (б, д, з і л) і ϵ_{xy}^p (в, е, и і м) у зоні тріщини

Коли тріщина нерухома і інтенсивність напружень набуває значення $K_{I^e} = 60,1 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}} < K_{Ic}^e$ (див. рис. 7), пластичні деформації ϵ_{xx}^p , ϵ_{yy}^p і ϵ_{xy}^p виникають перед вістрям тріщини. Коли тріщина починає рухатися і інтенсивність напружень набуває значення $K_{Ic}^e < K_{I^e} = 90,5 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}} < K_{I^*}^e$ максимальні пластичні деформації ϵ_{xx}^p , ϵ_{yy}^p і ϵ_{xy}^p розташовуються поза вістрям тріщини.

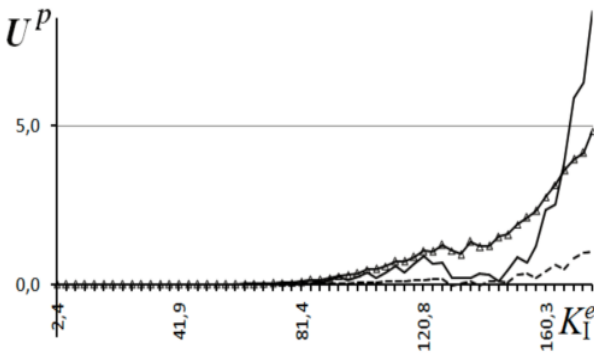


Рис. 8. Енергії пластичних деформацій U_{ij}^p

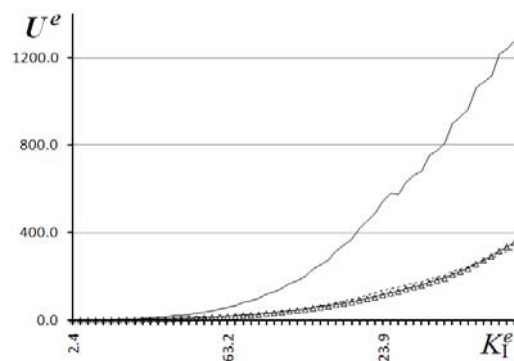


Рис. 9. Енергії пружних деформацій U_{ij}^e

Суцільна, суцільна з трикутником і пунктирна лінії (рис. 8) стосуються відповідно енергій пластичних деформацій U_{xx}^p , U_{yy}^p і U_{xy}^p . Суцільною, суцільною з трикутником і пунктирною лініями (рис. 9) зображені відповідно енергії пружних деформацій U_{xx}^e , U_{yy}^e і U_{xy}^e .

Дослідження розподілу пластичних енергій U_{ij}^p ($i, j = x, y$) (див. рис. 8) з моменту перевищення пружним коефіцієнтом інтенсивності напружень рівня $K_{I^*}^e$ свідчить про їх коливний характер. Пружні енергії U_{ij}^e ($i, j = x, y$) (див. рис. 9) збільшуються монотонно, при цьому стрибки виникають, скоріш за все, через дискретну обчислювальну схему.

Коли КІН $K_{I^e} > 123,9 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ штриховані і темніші зони на діаграмах відповідають вищим значенням деформацій. Помітно, що зони максимальних пластичних деформацій (швидше за все) прилягають до вільної поверхні тріщини і її вістря розташовується у менш пластично деформованому матеріалі (ніби намагається прорватися у таку зону). Якщо приріст довжини тріщини достатньо великий, то до берегів тріщини прилягає низка таких зон підвищеної пластичної деформації. Зрозуміло, що зменшення розмірів сітки розбиття дещо згладить зображені у нижній частині

діаграми розподілу, однак швидше за все така нерівномірність пластичних деформацій може бути властива динамічному характеру просування тріщини.

5. Висновки

Розв'язування задачі плоского деформованого стану для компактного зразка для визначення в'язкості руйнування на триточковий згин у динамічному пружно-пластичному формулюванні з урахуванням підростання тріщини дає можливість набагато точніше визначити поля пластичних деформацій і напружень, аніж при розв'язуванні квазістатичної пружно-пластичної задачі плоского деформованого стану, а також дає можливість адекватно моделювати процес розповсюдження тріщини.

1. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского деформованого стану // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2011. – № 4. – С. 51–56. 2. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56. 3. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану. // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54. 4. Богданов В.Р. Тривимірні динамічні задачі концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 51–56. 5. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – 676 с. 6. Боли Б., Уайнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 360 с. 7. Махненко В.И. Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации. // Автоматическая сварка, – 2003. – № 10–11, – С. 112–121. 8. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – Киев: "Наукова думка", 1976. – 320 с. 9. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов. Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: "Наукова думка", 1988. – 620 с. 10. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 399 с. 11. Kubenko V.D., Bogdanov V.R. Planar problem of the impact of a shell on an elastic half-space. // International Applied Mechanics. – Vol. 31. – № 6. – 1995. – P. 483–490.

Надійшла до редколегії 15.11.10

УДК 629.7.015

О. Дехтяр, асп.,
e-mail: oleks.d@gmail.com

ВРАХУВАННЯ ОБМЕЖЕНОСТІ ТЯГИ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ МАНЕВРІВ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ З ЯДЕРНИМИ ДВИГУНАМИ ВЕЛИКОЇ ПОТУЖНОСТІ

Досліджено внутрішню геоцентричну задачу міжпланетного перельоту за модифікованим методом сфер впливу, що полягає в оптимізації маневру (між початковою круговою або еліптичною навколоземною орбітою та гіперболічною орбітою виведення до сфери впливу) космічного апарату, оснащеного ядерним ракетним двигуном великої потужності, в припущенні обмеженості тяги та врахування специфіки керування рушійною системою. Задача розв'язана із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна. Виконано порівняльний аналіз результатів для різних моделей гравітаційних полів та моделі імпульсної апроксимації. Проаналізовано властивості оптимального керування напрямом вектора тяги.

The internal geocentric problem of a space vehicle interplanetary transfer is considered. The Patched Conic Approximation is used. The internal problem consists in the optimization of a finite-thrust manoeuvre between near-earth circular or elliptic orbit and escape hyperbolic orbit. The thrust finiteness and specificity of engine control is taken into consideration. The Pontryagin's maximum principle is applied for solving of the problem. The comparative analysis is done for different models of gravitational field and for the model of impulse approximation. The features of optimal thrust direction control are analysed.

1. Актуальність проблеми та вибір напрямку дослідження

В сучасній механіці космічного польоту розвиваються два головних напрямки: механіка польоту з двигунами великої та механіка польоту з двигунами малої тяги. Для першого напрямку, якому присвячена ця стаття, характерною особливістю є мала тривалість активних ділянок в порівнянні з усією тривалістю польоту. Тому задачі оптимізації маневрів космічних апаратів (КА) з двигунами великої тяги традиційно розв'язують, застосовуючи підхід імпульсної апроксимації (ІА) активних ділянок траєкторії [2], тобто вважають, що швидкість КА змінюється миттєво на нескінченно малій активній ділянці з скінченною вітратою маси робочого тіла при необмеженому зростанні сили тяги. Такий підхід можна застосовувати, коли тягоозброєність КА $a_0 = P_{\max}/(M_0 g) \gg 1$, де P_{\max} – максимальна тяга, M_0 – стартова маса, g – прискорення вільного падіння на Землі, однак неприйнятний у випадку проміжних значень тягоозброєності. Міжпланетні експедиції, що плануються у найближчому майбутньому [7], будуть здійснюватися із застосуванням КА з ядерними ракетними двигунами (ЯРД) великої потужності, тягоозброєності яких має порядок одиниці [6, 8]. Тому при розрахунку маневрів КА з ЯРД важливо враховувати обмеженість тяги двигуна.

Задачам оптимізації маневрів КА з двигунами великої обмеженої тяги присвячено порівняно небагато праць, наприклад, [5, 9], що зумовлює актуальність задачі, розглянутої в даній статті.

2. Постановка внутрішньої геоцентричної задачі ММСВ

Розглядається задача синтезу й оптимізації міжпланетного перельоту Земля-Марс, сформульована при використанні модифікованого методу сфер впливу (ММСВ). В якості критерію оптимальності обрано максимізацію корисного навантаження $m_{\pi} \rightarrow \max$. Нехай прийнято плоску кругову модель руху планет навколо Сонця. Відповідно до ММСВ міжпланетну траєкторію розділено на ділянки переважного впливу одного небесного тіла, що дозволило на кожній з ділянок звести задачу до вивчення руху КА в постановці обмеженої задачі двох тіл. Нехай обрано таку схему міжпланетного перельоту, що а) на геліоцентричній ділянці необхідно реалізувати напівеліптичний переліт Гомана та б) міжпланетна траєкторія містить дві активні ділянки – по одній в межах кожної сфери впливу планет.

Для реалізації вимоги (а) на границях сфер впливу планет в планетоцентричних системах координат КА повинен мати задані вектори швидкості $\vec{v}_{\text{сфЕ}} = \vec{v}_{\text{ПЕ}} - \vec{v}_{\text{Е}}$ та $\vec{v}_{\text{сфМ}} = \vec{v}_{\text{АЕ}} - \vec{v}_{\text{М}}$, де в геліоцентричній системі координат $\vec{v}_{\text{ПЕ}}$, $\vec{v}_{\text{АЕ}}$ – вектори швидкості КА в периферії та апоцентрі напівеліпса Гомана, а $\vec{v}_{\text{Е}}$, $\vec{v}_{\text{М}}$ – вектори швидкості обертан-