

діаграми розподілу, однак швидше за все така нерівномірність пластичних деформацій може бути властива динамічному характеру просування тріщини.

5. Висновки

Розв'язування задачі плоского деформованого стану для компактного зразка для визначення в'язкості руйнування на триточковий згин у динамічному пружно-пластичному формулюванні з урахуванням підростання тріщини дає можливість набагато точніше визначити поля пластичних деформацій і напружень, аніж при розв'язуванні квазістатичної пружно-пластичної задачі плоского деформованого стану, а також дає можливість адекватно моделювати процес розповсюдження тріщини.

1. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского деформованого стану // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2011. – № 4. – С. 51–56. 2. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56. 3. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану. // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54. 4. Богданов В.Р. Тривимірні динамічні задачі концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 51–56. 5. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – 676 с. 6. Боли Б., Уайнер Дж. Теорія температурних напружень. – М.: Мир, 1964. – 360 с. 7. Махненко В.И. Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации. // Автоматическая сварка, – 2003. – № 10–11, – С. 112–121. 8. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – Киев: "Наукова думка", 1976. – 320 с. 9. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов. Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: "Наукова думка", 1988. – 620 с. 10. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 399 с. 11. Kubenko V.D., Bogdanov V.R. Planar problem of the impact of a shell on an elastic half-space. // International Applied Mechanics. – Vol. 31. – № 6. – 1995. – P. 483–490.

Надійшла до редколегії 15.11.10

УДК 629.7.015

О. Дехтяр, асп.,
e-mail: oleks.d@gmail.com

ВРАХУВАННЯ ОБМЕЖЕНОСТІ ТЯГИ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ МАНЕВРІВ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ З ЯДЕРНИМИ ДВИГУНАМИ ВЕЛИКОЇ ПОТУЖНОСТІ

Досліджено внутрішню геоцентричну задачу міжпланетного перельоту за модифікованим методом сфер впливу, що полягає в оптимізації маневру (між початковою круговою або еліптичною навколоземною орбітою та гіперболічною орбітою виведення до сфери впливу) космічного апарату, оснащеного ядерним ракетним двигуном великої потужності, в припущенні обмеженості тяги та врахування специфіки керування рушійною системою. Задача розв'язана із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна. Виконано порівняльний аналіз результатів для різних моделей гравітаційних полів та моделі імпульсної апроксимації. Проаналізовано властивості оптимального керування напрямом вектора тяги.

The internal geocentric problem of a space vehicle interplanetary transfer is considered. The Patched Conic Approximation is used. The internal problem consists in the optimization of a finite-thrust manoeuvre between near-earth circular or elliptic orbit and escape hyperbolic orbit. The thrust finiteness and specificity of engine control is taken into consideration. The Pontryagin's maximum principle is applied for solving of the problem. The comparative analysis is done for different models of gravitational field and for the model of impulse approximation. The features of optimal thrust direction control are analysed.

1. Актуальність проблеми та вибір напрямку дослідження

В сучасній механіці космічного польоту розвиваються два головних напрямки: механіка польоту з двигунами великої та механіка польоту з двигунами малої тяги. Для першого напрямку, якому присвячена ця стаття, характерною особливістю є мала тривалість активних ділянок в порівнянні з усією тривалістю польоту. Тому задачі оптимізації маневрів космічних апаратів (КА) з двигунами великої тяги традиційно розв'язують, застосовуючи підхід імпульсної апроксимації (ІА) активних ділянок траєкторії [2], тобто вважають, що швидкість КА змінюється миттєво на нескінченно малій активній ділянці з скінченною вітратою маси робочого тіла при необмеженому зростанні сили тяги. Такий підхід можна застосовувати, коли тягоозброєність КА $a_0 = P_{\max}/(M_0 g) \gg 1$, де P_{\max} – максимальна тяга, M_0 – стартова маса, g – прискорення вільного падіння на Землі, однак неприйнятний у випадку проміжних значень тягоозброєності. Міжпланетні експедиції, що плануються у найближчому майбутньому [7], будуть здійснюватися із застосуванням КА з ядерними ракетними двигунами (ЯРД) великої потужності, тягоозброєності яких має порядок одиниці [6, 8]. Тому при розрахунку маневрів КА з ЯРД важливо враховувати обмеженість тяги двигуна.

Задачам оптимізації маневрів КА з двигунами великої обмеженої тяги присвячено порівняно небагато праць, наприклад, [5, 9], що зумовлює актуальність задачі, розглянутої в даній статті.

2. Постановка внутрішньої геоцентричної задачі ММСВ

Розглядається задача синтезу й оптимізації міжпланетного перельоту Земля-Марс, сформульована при використанні модифікованого методу сфер впливу (ММСВ). В якості критерію оптимальності обрано максимізацію корисного навантаження $m_{\pi} \rightarrow \max$. Нехай прийнято плоску кругову модель руху планет навколо Сонця. Відповідно до ММСВ міжпланетну траєкторію розділено на ділянки переважного впливу одного небесного тіла, що дозволило на кожній з ділянок звести задачу до вивчення руху КА в постановці обмеженої задачі двох тіл. Нехай обрано таку схему міжпланетного перельоту, що а) на геліоцентричній ділянці необхідно реалізувати напівеліптичний переліт Гомана та б) міжпланетна траєкторія містить дві активні ділянки – по одній в межах кожної сфери впливу планет.

Для реалізації вимоги (а) на границях сфер впливу планет в планетоцентричних системах координат КА повинен мати задані вектори швидкості $\vec{v}_{\text{сфЕ}} = \vec{v}_{\text{ПЕ}} - \vec{v}_{\text{Е}}$ та $\vec{v}_{\text{сфМ}} = \vec{v}_{\text{АЕ}} - \vec{v}_{\text{М}}$, де в геліоцентричній системі координат $\vec{v}_{\text{ПЕ}}$, $\vec{v}_{\text{АЕ}}$ – вектори швидкості КА в периферії та апоцентрі напівеліпса Гомана, а $\vec{v}_{\text{Е}}$, $\vec{v}_{\text{М}}$ – вектори швидкості обертан-

ня Землі та Марсу навколо Сонця. Вектори $\vec{v}_{\text{сфЕ}}$ та $\vec{v}_{\text{сфМ}}$, у випадку перельоту Гомана, елементарно визначаються з розв'язку геліоцентричної задачі. Відповідно до ММСВ, при розв'язанні внутрішніх задач радіуси сфер впливу вважаються нескінченними. Тому вектори швидкості $\vec{v}_{\text{сфЕ}}$ та $\vec{v}_{\text{сфМ}}$ на сферах впливу можна вважати векторами асимптотичної швидкості КА при русі по деяких планетоцентричних гіперболах.

Тоді, при врахуванні припущення (б), задача по виходу КА на міжпланетну траєкторію зводиться до задачі оптимізації маневру між початковою навколосемною орбітою (круговою або еліптичною) та геоцентричною гіперболічною орбітою з заданим вектором асимптотичної швидкості. Гіперболічна орбіта в загальному випадку має бути обрана оптимальним чином. Розглянемо цю задачу детальніше.

3. Варіаційна постановка задачі маневру на активній ділянці

Далі використовуються безрозмірні величини, формули переходу до яких містяться в [3]. Вважаємо, що величина тяги ЯРД є фіксованою та відповідає максимуму швидкості витікання реактивного струменя. Відповідно до моделі керування тягою ЯРД, запропонованої в [3], тяга характеризується формулою $P_D = a_0 \sqrt{N_{\text{max}} q_D}$, де q_D – рівень витрати робочого тіла, за якого реалізується максимальна швидкість реактивного струменя для максимального значення N_{max} теплової потужності ядерного реактора. У випадку постійного рівня величини тяги задача максимізації корисного навантаження $m_\pi \rightarrow \max$ рівносильна задачі максимальної швидкодії $J = \tau(t_1) \rightarrow \min$.

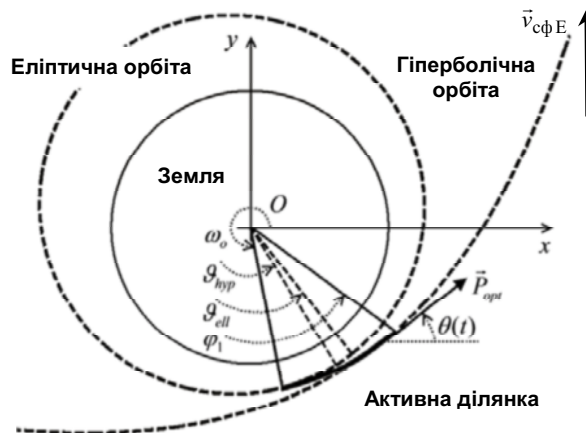


Рис. 1. Схема виконання маневру між еліптичною та оптимальною гіперболічною орбітами.

Схему геоцентричного маневру зображено на рис.1. Для постановки задачі введено інерціальну прямокутну декартову систему координат Oxy з початком координат в центрі Землі. Вісь Oy направлено за вектором асимптотичної швидкості $\vec{v}_{\text{сфЕ}}$. Тоді в Oxy рух КА при виконанні маневру на активній ділянці описується системою рівнянь (1). Функціонал та множина допустимих керувань мають вигляд (2).

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, & \dot{v}_x = \frac{a_0 \sqrt{N_{\text{max}} q_D} \cos \theta}{1 - a_0 q_D \tau} - g_x(x, y), & \dot{t} = 1. \\ \dot{y} = v_y, & \dot{v}_y = \frac{a_0 \sqrt{N_{\text{max}} q_D} \sin \theta}{1 - a_0 q_D \tau} - g_y(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

$$\omega_0, \phi_1, \vartheta_{\text{hyp}} \rightarrow \text{opt}, \quad J = \tau(t_1) \rightarrow \min, \quad \omega_0, \phi_1, \vartheta_{\text{hyp}}, \theta(\tau) \in [0; 2\pi], \quad (2)$$

де x, y, v_x, v_y – складові радіус-вектора та вектора швидкості центра мас КА; τ – час; $\theta(\tau)$ – кут нахилу вектора тяги до осі Ox , g_x, g_y – складові вектора гравітаційного прискорення, ω_0, ϕ_1 – істинні аномалії початку та завершення активної ділянки; ϑ_{hyp} – аргумент перицентру гіперболи. Всі кутові координати відраховуються від осі Ox проти ходу годинникової стрілки.

Для моделі центрального ньютонівського гравітаційного поля (ЦНГП) $\vec{g} = \{C \cdot x / (x^2 + y^2)^{3/2}, C \cdot y / (x^2 + y^2)^{3/2}\}$, де $C = \mu \cdot g \cdot Q_{\text{max}}^4 / P_{\text{max}}^4$ – безрозмірний гравітаційний параметр Землі, μ – гравітаційний параметр Землі; Q_{max} – максимальна витрата робочого тіла в розмірних змінних. У цьому випадку система рівнянь руху КА (1) є системою нелінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, розв'язок якої слід знаходити чисельно.

У випадку, коли траєкторія лежить у межах тонкого сферичного шару ($\Delta r / r_g \ll 1$, де $r_g = \text{const}$ – деякий характерний радіус шару, а Δr – його товщина) можна застосовувати модель центрального однорідного гравітаційного поля (ЦОГП) $\vec{g} = \{C \cdot x / r_g^3, C \cdot y / r_g^3\} = \{c \cdot x, c \cdot y\}$, де $c = C / r_g^3$. В цьому випадку система рівнянь руху КА (1) є системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, розв'язок якої можна записати в квадратурах.

При виконанні маневру мають бути задоволені такі граничні умови:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \frac{p_{ell} \cos \omega_0}{1 + e_{ell} \cos(\omega_0 - \vartheta_{ell})}; & x(t_1) &= \frac{p_{hyp} \cos \phi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\phi_1 - \vartheta_{hyp})}; \\ y(t_0) &= \frac{p_{ell} \sin \omega_0}{1 + e_{ell} \cos(\omega_0 - \vartheta_{ell})}; & y(t_1) &= \frac{p_{hyp} \sin \phi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\phi_1 - \vartheta_{hyp})}; \\ v_x(t_0) &= \frac{-K}{\sqrt{p_{ell}}} (e_{ell} \sin \vartheta_{ell} + \sin \omega_0); & v_x(t_1) &= \frac{-K}{\sqrt{p_{hyp}}} (e_{hyp} \sin \vartheta_{hyp} + \sin \phi_1); \\ v_y(t_0) &= \frac{K}{\sqrt{p_{ell}}} (e_{ell} \cos \vartheta_{ell} + \cos \omega_0); & v_y(t_1) &= \frac{K}{\sqrt{p_{hyp}}} (e_{hyp} \cos \vartheta_{hyp} + \cos \phi_1). \end{aligned} \quad \tau(t_0) = 0; \quad \tau(t_1) \rightarrow \min; \quad (3)$$

Тут $K = \sqrt{\mu g_0} Q_{max}^2 / P_{max}^2$ – безрозмірний комплекс розмірних величин, e_{ell} – ексцентриситет початкової орбіти; $p_{ell} = r_{pell}(1 + e_{ell})$ – параметр еліптичної орбіти, що відповідає фіксованому значенню радіуса перицентру r_{pell} ; $\vartheta_{ell} = \arcsin(-K^2 / (v_{cфE}^2 \cdot (r_p + K^2 / v_{cфE}^2)))$ – аргумент перицентру початкової орбіти, що відповідає дотику еліптичної та гіперболічної орбіт при нескінченному зростанні тяги. Параметри гіперболічної орбіти подано через аргумент перицентру гіперболічної орбіти та величину асимптотичної швидкості: $e_{hyp} = -1/\sin \vartheta_{hyp}$ та $p_{hyp} = K^2(1 + e_{hyp}^2) / v_{cфE}^2$.

Таким чином окреслено всі математичні та фізичні припущення стосовно природи об'єкта управління. Тому постановка варіаційної задачі (в даному випадку задачі Майєра) полягає у відшуванні оптимальної програми керування напрямком вектора тяги $\theta_{opt}(t)$ та параметрів $\omega_0, \phi_1, \vartheta_{hyp}$ з множини допустимих керувань (2), що забезпечують переведення КА, рух якого описується системою рівнянь (1), з початкової орбіти на оптимальну гіперболічну орбіту, при виконанні граничних умов (3), за мінімальний проміжок часу (2).

4. Застосування принципу максимуму Понтрягіна до розв'язання задачі

Аналіз оптимального керування виконано за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Згідно принципу максимуму, тільки те керування є оптимальним, яке зумовлює максимум функції Гамільтона (4)

$$\begin{aligned} H &= \psi_x v_x + \psi_y v_y + \psi_\tau + \psi_{vx} \left(\frac{a_0 \sqrt{N_{max} q_D} \cos \theta}{1 - a_0 q_D \tau} - g_x(x, y) \right) + \\ &+ \psi_{vy} \left(\frac{a_0 \sqrt{N_{max} q_D} \sin \theta}{1 - a_0 q_D \tau} - g_y(x, y) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\psi_x, \psi_y, \psi_{vx}, \psi_{vy}, \psi_\tau$ є спряженими функціями. Оптимальний закон керування напрямом тяги має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \cos \theta(t) &= \psi_{vx} / \sqrt{\psi_{vx}^2 + \psi_{vy}^2}, \\ \sin \theta(t) &= \psi_{vy} / \sqrt{\psi_{vx}^2 + \psi_{vy}^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Система спряжених функцій $\dot{\psi} = -\partial H / \partial \bar{x}$ має вигляд

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = \psi_{vx} \frac{C}{r_g^3}, & \dot{\psi}_{vx} = -\psi_x, \\ \dot{\psi}_y = \psi_{vy} \frac{C}{r_g^3}, & \dot{\psi}_{vy} = -\psi_y, \end{cases} \quad \dot{\psi}_\tau = -\frac{a_0^2 \sqrt{N_{max} q_D^3 (\psi_{vx}^2 + \psi_{vy}^2)}}{(m_0 - a_0 q_D \tau)^2}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = C \left(\psi_{vx} \frac{-2x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \psi_{vy} \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right), & \dot{\psi}_{vx} = -\psi_x, \\ \dot{\psi}_y = C \left(\psi_{vx} \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \psi_{vy} \frac{-2x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right), & \dot{\psi}_{vy} = -\psi_y, \end{cases} \quad \dot{\psi}_\tau = -\frac{a_0^2 \sqrt{N_{max} q_D^3 (\psi_{vx}^2 + \psi_{vy}^2)}}{(m_0 - a_0 q_D \tau)^2}, \quad (7)$$

у випадку ЦОГП та ЦНГП відповідно. Перші чотири рівняння системи спряжених функцій (6) для моделі ЦОГП мають аналітичний розв'язок:

$$\begin{cases} \psi_x = D_2 \sin \sqrt{ct} + D_1 \cos \sqrt{ct}, & \psi_{vx} = (D_2 \cos \sqrt{ct} - D_1 \sin \sqrt{ct}) / \sqrt{c}, \\ \psi_y = D_4 \sin \sqrt{ct} + D_3 \cos \sqrt{ct}, & \psi_{vy} = (D_4 \cos \sqrt{ct} - D_3 \sin \sqrt{ct}) / \sqrt{c}. \end{cases}$$

Тому оптимальний закон керування напрямом тяги (5) постає як функція часу, що дозволяє знайти розв'язок в квадратурах системи рівнянь руху (1) для моделі ЦОГП:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\sqrt{c}t) + v_{x0} \frac{\sin(\sqrt{c}t)}{\sqrt{c}} + \frac{a_0 \sqrt{N_{\max} q_D}}{\sqrt{c}} \cdot \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{c}(t-\tau))}{m_0 - a_0 q_D \tau} \frac{\psi_{vx}(\tau)}{\sqrt{\psi_{vx}^2(\tau) + \psi_{vy}^2(\tau)}} d\tau; \\ y(t) = y_0 \cos(\sqrt{c}t) + v_{y0} \frac{\sin(\sqrt{c}t)}{\sqrt{c}} + \frac{a_0 \sqrt{N_{\max} q_D}}{\sqrt{c}} \cdot \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{c}(t-\tau))}{m_0 - a_0 q_D \tau} \frac{\psi_{vy}(\tau)}{\sqrt{\psi_{vx}^2(\tau) + \psi_{vy}^2(\tau)}} d\tau; \\ v_x(t) = -x_0 \sqrt{c} \sin(\sqrt{c}t) + v_{x0} \cos(\sqrt{c}t) + a_0 \sqrt{N_{\max} q_D} \cdot \int_0^t \frac{\cos(\sqrt{c}(t-\tau))}{m_0 - a_0 q_D \tau} \frac{\psi_{vx}(\tau)}{\sqrt{\psi_{vx}^2(\tau) + \psi_{vy}^2(\tau)}} d\tau; \\ v_y(t) = -y_0 \sqrt{c} \sin(\sqrt{c}t) + v_{y0} \cos(\sqrt{c}t) + a_0 \sqrt{N_{\max} q_D} \cdot \int_0^t \frac{\cos(\sqrt{c}(t-\tau))}{m_0 - a_0 q_D \tau} \frac{\psi_{vy}(\tau)}{\sqrt{\psi_{vx}^2(\tau) + \psi_{vy}^2(\tau)}} d\tau. \end{cases}$$

Для моделі ЦНГП аналітичні розв'язки системи спряжених функцій та системи рівнянь руху знайти не вдається, а тому їх вивчення потребує застосування методів чисельного інтегрування.

Умови трансверсальності записуються так:

$$[\delta\tau - H\delta t + \psi_x \delta x + \psi_y \delta y + \psi_{vx} \delta v_x + \psi_{vy} \delta v_y + \psi_\tau \delta\tau]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (8)$$

Аналіз умов трансверсальності (8) дозволяє зменшити кількість невідомих констант. У випадку моделі ЦОГП константи інтегрування D_2, D_3, D_4 можна подати через $D_1, \omega_0, \vartheta_{hyp}, \phi_1, t_1$, а у випадку моделі ЦНГП ψ_{x0} – через $\psi_{y0}, \psi_{vx0}, \psi_{vy0}, \omega_0, \vartheta_{hyp}, \phi_1, t_1$. Застосування принципу максимуму Понтрягіна дозволяє звести оптимізаційну задачу до двоточкової крайової задачі, для розв'язання якої у випадку ЦОГП необхідно знайти 5 констант: $D_1, \omega_0, \vartheta_{hyp}, \phi_1, t_1$, а у випадку ЦНГП – 7 констант: $\psi_{y0}, \psi_{vx0}, \psi_{vy0}, \omega_0, \vartheta_{hyp}, \phi_1, t_1$. Ці константи знаходяться чисельно за допомогою методу пристрілки з умови мінімізація зваженої нев'язки. Вирази для нев'язки мають вигляд (9) та (10) у випадку ЦОГП та ЦНГП відповідно.

$$\begin{aligned} nev &= \sqrt{nev_1^2 + nev_2^2 + nev_3^2 + nev_4^2 + nev_5^2} \rightarrow 0, \\ nev_1 &= \frac{\rho_{hyp} \cos \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})} - x_1 = 0; \quad nev_3 = \frac{-K}{\sqrt{\rho_{hyp}}} (e_{hyp} \sin \vartheta_{hyp} + \sin \varphi_1) - v_{x1} = 0; \quad nev_5 = H = 0; \\ nev_2 &= \frac{\rho_{hyp} \sin \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})} - y_1 = 0; \quad nev_4 = \frac{K}{\sqrt{\rho_{hyp}}} (e_{hyp} \cos \vartheta_{hyp} + \cos \varphi_1) - v_{y1} = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} nev &= \sqrt{nev_1^2 + nev_2^2 + nev_3^2 + nev_4^2 + nev_5^2 + nev_6^2 + nev_7^2} \rightarrow 0, \\ nev_1 &= \frac{\rho_{hyp} \cos \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})} - x_1 = 0; \quad nev_3 = \frac{-K}{\sqrt{\rho_{hyp}}} (e_{hyp} \sin \vartheta_{hyp} + \sin \varphi_1) - v_{x1} = 0; \quad nev_5 = H = 0; \\ nev_2 &= \frac{\rho_{hyp} \sin \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})} - y_1 = 0; \quad nev_4 = \frac{K}{\sqrt{\rho_{hyp}}} (e_{hyp} \cos \vartheta_{hyp} + \cos \varphi_1) - v_{y1} = 0; \\ nev_6 &= \psi_{x1} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \psi_{y1} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + \psi_{vx1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial \varphi_1} + \psi_{vy1} \frac{\partial v_{y1}}{\partial \varphi_1} = 0; \quad nev_7 = \psi_{x1} \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_{hyp}} + \psi_{y1} \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_{hyp}} + \psi_{vx1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial \vartheta_{hyp}} + \psi_{vy1} \frac{\partial v_{y1}}{\partial \vartheta_{hyp}} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Пошук початкових наближень у випадку ЦОГП виконати нескладно, оскільки чотири з п'яти констант мають визначений фізичний зміст. У випадку ж ЦНГП пошук початкових наближень значно ускладнений і потребує розробки спеціальних методів, що ґрунтуються на використанні оптимальних імпульсних розв'язків та розв'язків при врахуванні обмеженості тяги для моделі ЦОГП.

5. Властивості розв'язку задачі для моделі ЦНГП

Проаналізуємо розв'язок задачі у випадку застосування моделі ЦНГП. Параметри маневру та космічного апарату обрано таким чином: вектор швидкості на сфері впливу Землі $v_{c\varphi E} = 2945$ м/с; висота перицентра еліптичної орбіти над поверхнею Землі $H_0 = 404$ км, її ексцентриситет $e_{ell} = 0,15$; початкова маса КА $M_0 = 10^5$ кг; тяга двигуна $P_D = 246$ кН, швидкість витікання реактивного струменя $v_{S\max} = 9090$ м/с. Дослідження ефективності оптимізації параметрів маневру та перевірка локальної оптимальності розв'язків містяться в [4].

На рис. 2 та 4 показано схеми виконання маневру для неоптимальних значень координат початку та завершення активної ділянки. Програми керування напрямом тяги (перераховані як кут $\tilde{\theta}(t)$ нахилу вектора тяги до траєкторії), які відповідають таким маневрам, зображені на рис. 3 та 5. Схема виконання оптимального маневру та оптимальна програма $\tilde{\theta}_{opt}(t)$ керування напрямом тяги показані на рис. 6.

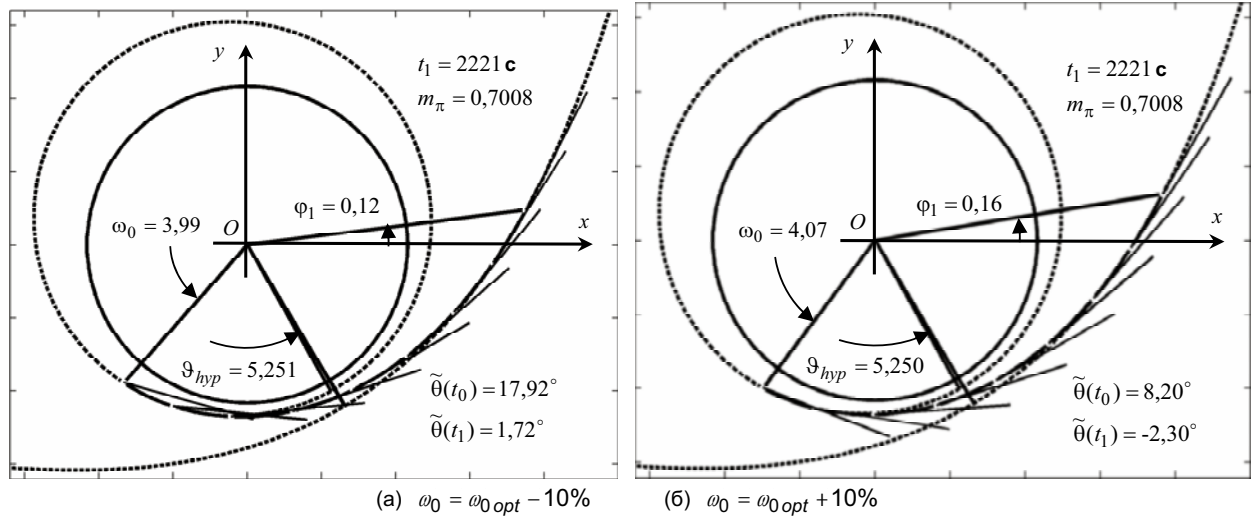


Рис. 2. Схеми виконання маневру для неоптимальних значень істинної аномалії початку активної ділянки

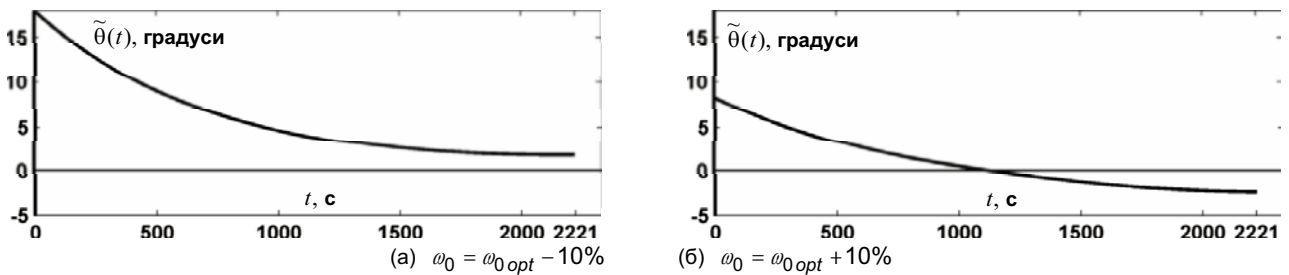


Рис. 3. Програми керування напрямом тяги $\tilde{\theta}(t)$ для неоптимальних значень істинної аномалії початку активної ділянки

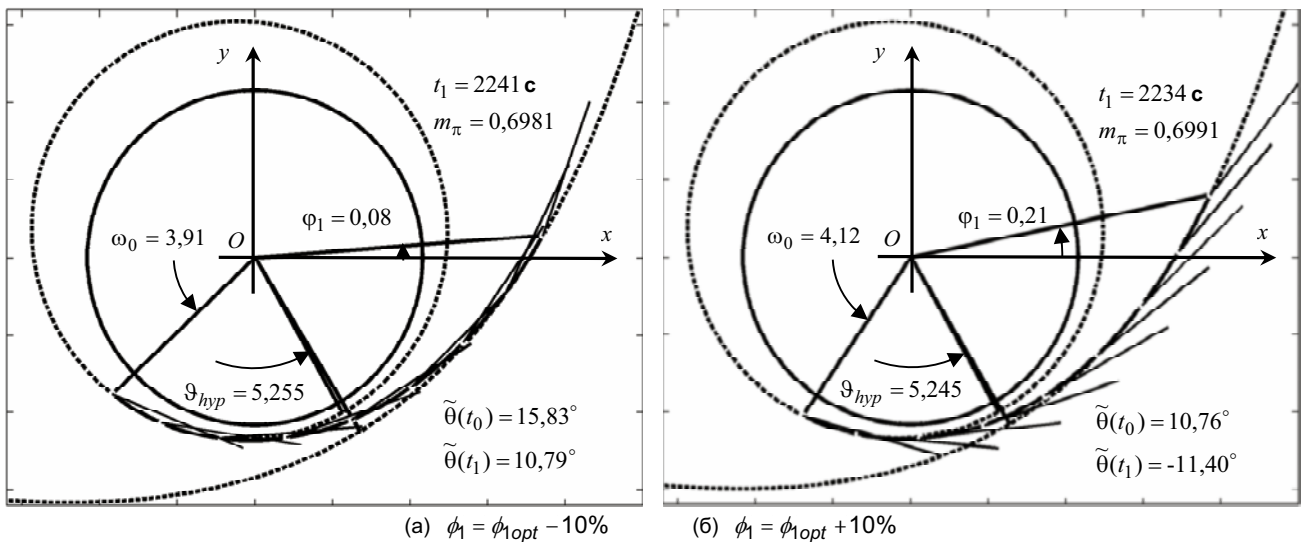


Рис. 4. Схеми виконання маневру для неоптимальних значень істинної аномалії завершення активної ділянки

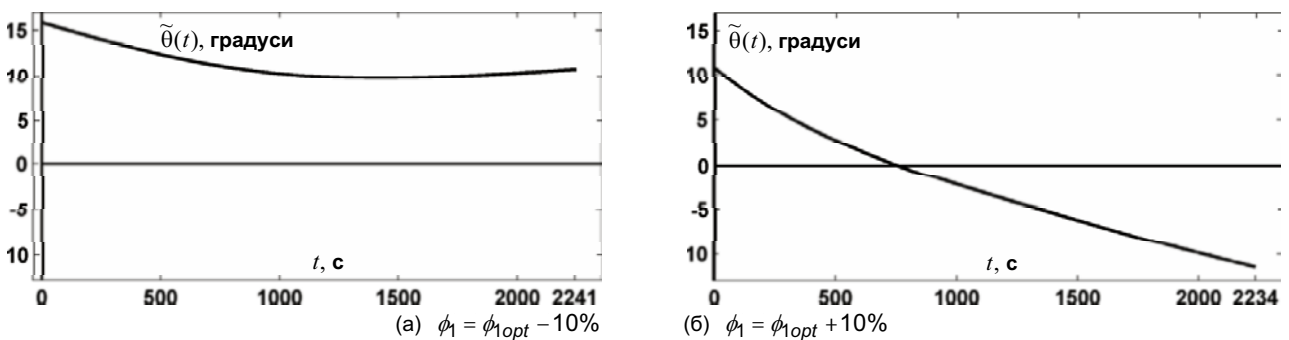


Рис. 5. Програми керування напрямом тяги $\tilde{\theta}(t)$ для неоптимальних значень істинної аномалії кінця активної ділянки

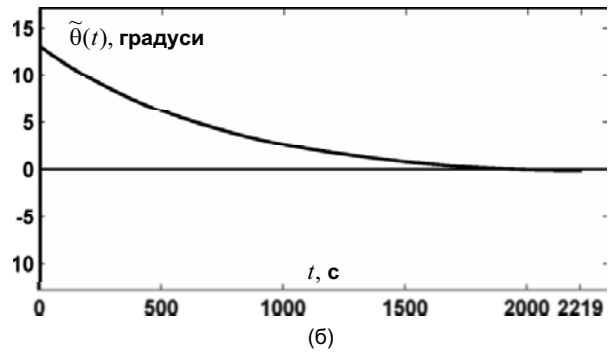
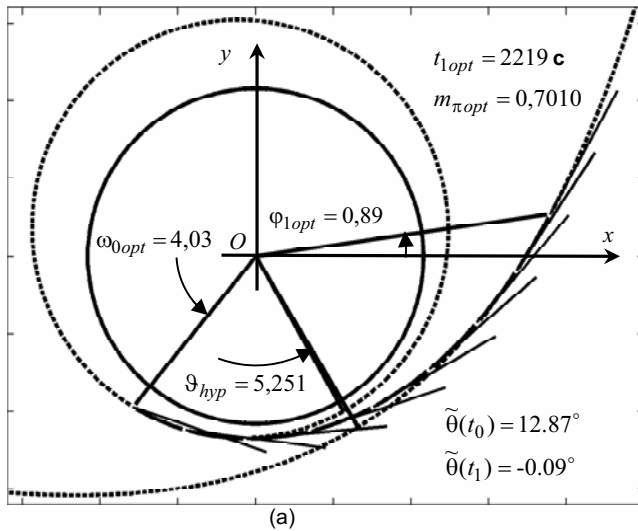


Рис. 6 а) Оптимальна схема виконання маневру та б) оптимальна програма керування напрямом тяги $\tilde{\theta}_{opt}(t)$

З рис. 2-6 видно, що у випадку врахування обмеженості тяги, на противагу підходу ІА, спостерігається зміна напрямку вектора тяги. Крім того, аналізуючи оптимальні та неоптимальні схеми перельоту, слід відзначити, що за умов оптимальності схеми перельоту і оптимального вибору кута між напрямом на перицентр еліптичної орбіти та вектором асимптотичної швидкості гіперболічної орбіти, тяга в кінцевій точці активної ділянки направлена по дотичній до траєкторії, як це показано на рис. 6. Цей висновок підтверджує аналіз умов трансверсальності, виконаний в [1]. Для неоптимальних схем перельоту відхилення кута напрямку тяги в кінцевій точці можуть бути суттєвими.

6. Порівняння розв'язків для моделей ЦНГП, ЦОГП та імпульсної апроксимації

Виконаємо порівняння розв'язків, отриманих у випадку врахування обмеженості тяги для моделей ЦОГП та ЦНГП з підходом ІА для різних значень тяги ЯРД без врахування зміни маси рушійної системи.

На рис. 7 показано залежність параметрів активної ділянки для різних значень тяги ЯРД. Для моделі ІА масу корисного навантаження знаходимо за формулою Цюлковського $m_{\pi imp} = m_0 \exp((v_{0 imp} - v_{1 imp})/v_S)$, а тривалість виконання імпульсу розраховуємо з умови вигорання пального $t_{1 imp} = (m_0 \exp((v_{0 imp} - v_{1 imp})/v_S)) / a_0 q_D$, де $v_{0 imp}$, $v_{1 imp}$ – швидкість КА в перицентрі еліпса та гіперболи, що дотикаються, а v_S – швидкість реактивного струменя, кутову координату виконання імпульсу розраховуємо з умови дотику еліптичної та гіперболічної орбіт при нескінченному зростанні тяги: $\vartheta_{imp} = \arcsin(-K^2 / (v_{сфЕ}^2 \cdot (r_p + K^2 / v_{сфЕ}^2)))$.

З графіків видно, що підхід ІА значно переоцінює корисне навантаження m_{π} , а протяжність активної ділянки, навіть для недосяжних на даний час значень тяги, суттєво відрізняється від моделі імпульсу.

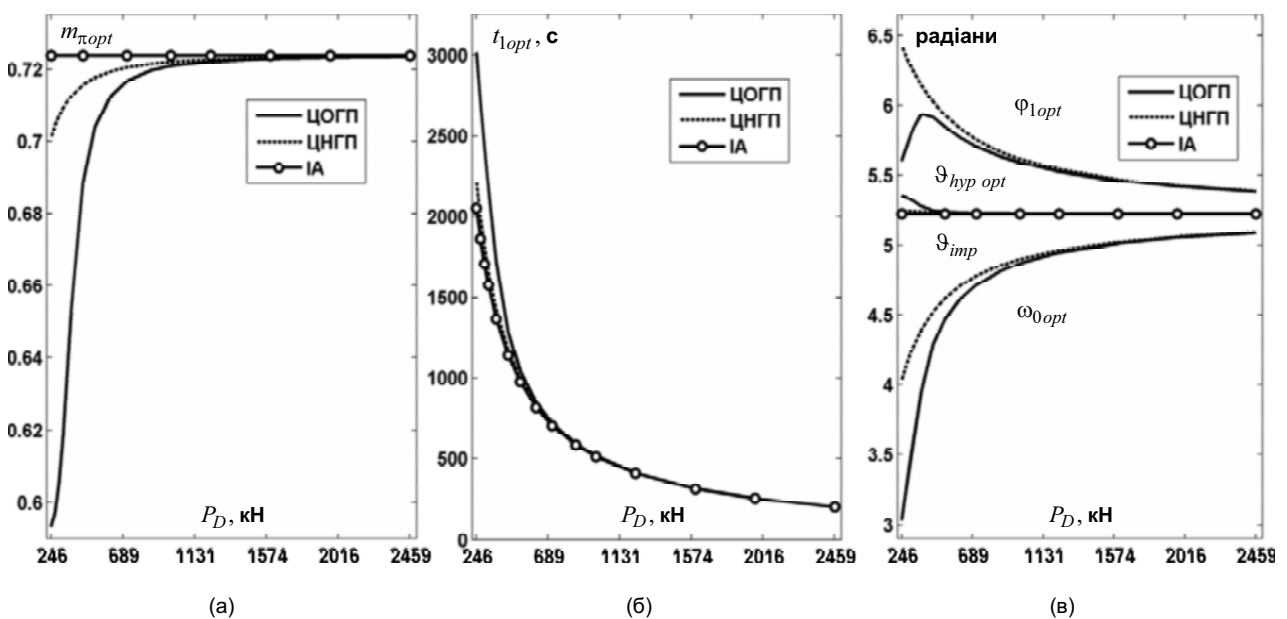


Рис. 7 Порівняння розв'язків для ЦНГП, ЦОГП та ІА:

- а) оптимальна маса корисного навантаження $m_{\pi opt}$; б) тривалість маневру t_{1opt} в безрозмірних величинах,
- в) оптимальні значення кутових координат ω_{0opt} , ϕ_{1opt} , $\vartheta_{hyp opt}$ в радіанах

7. Висновки

Розв'язано внутрішню геоцентричну задачу міжпланетного перельоту із врахуванням обмеженості тяги для моделей центрального однорідного та центрального ньютонівського гравітаційних полів. Задача, на відміну від класичних робіт, сформульована як задача оптимального перельоту з заданої планетоцентричної орбіти (кругової або еліптичної) на оптимальну гіперболічну орбіту. Виявлено, що у випадку врахування обмеженості тяги спостерігається зміна напрямку вектора тяги. До того ж за умови оптимальної схеми виконання маневру тяга в кінцевій точці активної ділянки направлена по дотичній до траєкторії. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів для моделей центрального однорідного та центрального ньютонівського гравітаційних полів з підходом імпульсної апроксимації та підтверджено важливість врахування обмеженості тяги.

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полёта (проблемы оптимизации). – М.: Наука, 1975. – 704 с. 2. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. – М.: Наука, 1976. – 744 с. 3. Харитонов А.М. К проблеме оптимизации орбитальных маневров космических аппаратов с ядерными ракетными двигателями // Проблемы управления и информатики. – 2005. – №5. – С. 120–135. 4. Харитонов О.М., Дехтяр О.Т. Оптимізація маневру переведення космічного апарату на сферу впливу планети при старті з еліптичної планетоцентричної орбіти // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2011. – Вип. 3. С. 81–84. 5. Azimov, D.M., Bishop, R.H., Transfer between Circular and Hyperbolic Orbits using Analytical Maximum Thrust Arcs, J. Spacecraft Rockets, 2003, vol. 40, no. 3, pp. 433–436. 6. Borowski, S.K., An overview of NTR /BNTR propulsion concepts, vehicle designs and future missions applications, in Proceedings of Space Nuclear Conference, San Diego, California, June 2005. 7. Rapp D. Human Missions to Mars: Enabling Technologies for Exploring the Red Planet. – Chichester, UK: Praxis Publishing Ltd, 2008. – 521 pp. 8. Taraba M., Zwintz K., Bombardelli C. et al., Project M³ – a study for manned Mars mission in 2031, // Acta Astronaut. – 2006. –58. – pp. 88–104. 9. Willis E.A. Optimal finite-thrust transfer between planet-approach and departure asymptotes with specified intermediate orbit, // NASA Technical note, NASA TN D-4534-1968. –1968.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 532.5

В. Каліон, канд. фіз.-мат. наук, О. Дідківська, студ.,
e-mail: vitaliy.kalio@gmail.com

РУХ ТРИВІСНОГО ЕЛІПСОІДА В КАПІЛЯРІ, ЩО ЗАПОВНЕНИЙ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Розглядається використання теорії збурень до розв'язання задачі про рух крові у дуже вузьких капілярах. В якості моделі червоного кров'яного тільця (або еритроцита) використовується тривісний еліпсоїд. Модель плазми крові – ньютонівська в'язка рідина. Результати порівнюються із результатами інших авторів.

Applications of perturbation method to the problems of blood flow in very narrow capillaries are examined. The red blood cell (or erythrocyte) was modeled with three-axial ellipsoid. The plasma of blood was modeled with Newtonian viscous fluid. The results were compared with results of other authors.

Вступ

Експериментальні дослідження процесів поширення поживних речовин в організмі людини зустрічаються з істотними труднощами, що обумовлені малими розмірами об'єктів, які досліджуються, похибками вимірів й, що особливо неприємно, неможливістю виміряти безпосередньо деякі параметри, як, наприклад, тиск плазми між еритроцитом та стінкою капіляра, натяг мембрани еритроцита при його переміщенні по дрібних судинах тощо Застосування математичного моделювання й обчислювальних засобів при дослідженні поширення речовин (особливо кисню) в організмі дозволило подолати ці труднощі й знайти ефективні підходи до розв'язання проблеми транспорту речовин в організмі людини. У зв'язку з обмеженістю можливостей комп'ютерів важливим є питання оптимізації розв'язання подібних математичних моделей.

До цього часу при моделюванні руху еритроцитів у вузьких капілярах усі автори використовують вісесиметричні моделі [1, 3–4]. Використання вісесиметричної моделі в якості моделі еритроциту пов'язано з роботою Дж.М. Фітц-Джеральда [3], який вперше побудував математичну модель й поставив задачу про усталений рух тривісного еліпсоїда у вузькому циліндричному капілярі. який він також показав, що з плином часу невісесиметрична форма еритроцита переходить у вісесиметричну. У той же час на усіх відомих мікрофотографіях [2] видно, що більшість еритроцитів у капілярах має суто невісесиметричну форму.

Проведені у статті дослідження дозволяють оцінити внесок "невісесиметричності" у витратні характеристики течії крові у вузьких капілярах та пояснити невідповідність математичної моделі Фітц-Джеральда й картини руху реальних еритроцитів.

Метод дослідження

Рух рідини в щілині, між еліпсоїдом та стінкою, товщина якої $H(\varphi, z) = R_0 - R_E(\varphi, z) \ll R_0$, з врахуванням припущень, що характерні для теорії мастильного шару, описується системою рівнянь Рейнольдса, яка в циліндричній системі координат (R, φ, Z) має вигляд

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\mu}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_Z}{\partial R} \right), \quad \frac{\partial (RV_R)}{\partial R} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (RV_Z)}{\partial Z} = 0, \quad (1)$$

де V_R, V_φ, V_Z – компоненти швидкості, P – тиск.

Граничні умови для системи (1) в системі відліку, що пов'язана з центром еліпсоїда, записуються у вигляді

$$R = R_0, \quad V_R = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_Z = -W_E; \quad R = R_E(\varphi, Z), \quad V_R = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_Z = 0. \quad (2)$$

Тут W_E – постійна швидкість руху еліпсоїда в нерухомій системі координат.