

$$\text{Покладемо } A_i = \left\{ H_i \in \left(\hat{H}_n^{(i)} - \alpha_i \left(\frac{p}{m} \right), \hat{H}_n^{(i)} + \beta_i \left(\frac{p}{m} \right) \right) \right\}, 1 \leq i \leq m, \text{ де } \hat{H}_n^{(i)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\log_2 \hat{S}_n^{(i)}}{n} \right), n \geq 1,$$

$$\alpha_i(t) = -\frac{1}{2} \frac{\ln \left(\left(2^{2-2H_i^*} - 1 \right) - \frac{K_0 \sqrt{A_n(H_i^*)}}{\sqrt{2^n}} \varphi_+(t) \right)}{n}, \beta_i(t) = \frac{1}{2} \frac{\ln \left(\left(2^{2-2H_i^*} - 1 \right) + \frac{K_0 \sqrt{A_n(H_i^*)}}{\sqrt{2^n}} \varphi_+(t) \right)}{n}, t \in (0, 1).$$

Внаслідок леми 1 маємо, $P \left\{ H \in \prod_{i=1}^m \left(\hat{H}_n^{(i)} - \alpha_i \left(\frac{p}{m} \right), \hat{H}_n^{(i)} + \beta_i \left(\frac{p}{m} \right) \right) \right\} \geq 1 - p.$

Перейдемо тепер до оцінювання інтервалу надійності кубічної розмірності d .

Лема 2. Нехай a_1, a_2, \dots, a_n та b_1, b_2, \dots, b_n – набори дійсних чисел. Тоді справедлива наступна нерівність

$$|\min(a_1, a_2, \dots, a_n) - \min(b_1, b_2, \dots, b_n)| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|. \quad (3)$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Перевіримо правильність нерівності (3) при $n = 2$. Тоді якщо $\min(a_1, a_2) = a_1$ та $\min(b_1, b_2) = b_1, i = 1, 2$, то нерівність очевидна. Нехай тепер $\min(a_1, a_2) = a_1, \min(b_1, b_2) = b_2$ (ви-падок $\min(a_1, a_2) = a_2, \min(b_1, b_2) = b_1$ розглядається аналогічно). Якщо $a_1 \leq b_2 \leq b_1$, то $b_2 - a_1 \leq b_1 - a_1$. Якщо $b_2 < a_1 \leq a_2$, то $a_1 - b_2 \leq a_2 - b_2$. Отже, нерівність (3) для $n = 2$ виконується.

Припустимо, що для довільних наборів a_1, a_2, \dots, a_{n-1} та b_1, b_2, \dots, b_{n-1} дійсних чисел нерівність справедлива при $n \geq 3$. Покажемо, що тоді нерівність буде виконуватись і для a_1, a_2, \dots, a_n та b_1, b_2, \dots, b_n :

$$\begin{aligned} |\min(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) - \min(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n)| &= |\min(a_n, \min(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})) - \min(b_n, \min(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}))| \\ &\leq \max \{ |a_n - b_n|, |\min(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) - \min(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})| \} \leq \max \left\{ |a_n - b_n|, \max_{1 \leq i \leq n-1} |a_i - b_i| \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|. \end{aligned}$$

Отже, нерівність (3) справедлива для будь-якого n . Лему доведено.

З леми 2 випливає, що інтервал

$$\left(\hat{d}_n - a \left(\frac{p}{m} \right), \hat{d}_n + a \left(\frac{p}{m} \right) \right),$$

де $a_i(p) = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \alpha \left(\frac{p}{m} \right), \beta \left(\frac{p}{m} \right) \right\}$, $a(p) = \max_{1 \leq i \leq m} a_i(p)$, є інтервалом надійності кубічної розмірності d дробового анізотропного вінерівського поля $B^{(H)}$ з рівнем довіри $1 - p$.

Висновок

За допомогою бакстерівських статистик отримано сильно конзистентну оцінку невідомого параметра Хюрста H для дробового анізотропного вінерівського поля $B^{(H)}$. Побудовано неасимптотичні області надійності для рівня довіри $1 - p$ та знайдено оцінку кубічної розмірності графіка $B^{(H)}$.

1. Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы – М.: Наука, 1970. – 384 с. 2. Ламперти Дж. Случайные процессы. Обзор математической теории. – Киев: Вища школа. Головное изд-во: Пер. с англ., 1983. – 224 с. 3. Курченко О.О. Одна сильно конзистентная оценка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей і математична статистика. – 2002. – Вип. 67. – с. 45–54. 4. Baxter G. A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – Vol. 7 (3). – 1956. – P. 522–527. 5. Breton J-C., Nourdin I., Peccati G. Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics. – Vol. 3. – 2009. – P. 416–425. 6. Kamont A. On the fractional anisotropic Wiener field // Probability and Mathematical Statistics. – Vol. 16. Fasc. 1. – 1996. – P. 85–98.

Надійшла до редколегії 09.11.11

УДК 512.5, 519.61

I. Дудченко, канд. фіз.-мат. наук, M. Плахотник, канд. фіз.-мат. наук

АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ІНДЕКСУ ТА ВІДПОВІДНОГО ВЛАСНОГО ВЕКТОРА МАТРИЦІ СУМІЖНОСТІ СИЛЬНО ЗВ'ЯЗНОГО САГАЙДАКА

Описано числовий алгоритм знаходження індексу та відповідного йому додатного власного вектора для матриці суміжності сильно зв'язного сагайдака без петель та кратних стрілок.

The numerical algorithm for calculating index and correspond eigen vector of adjacency matrix of strongly connected simply laced quiver is described in the article.

1. Вступ

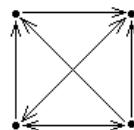
Будемо слідувати П. Габрієлю (P. Gabriel), який в [10], присвяченій скінченно вимірним алгебрам над алгебраїчно замкненим полем з нульовим квадратом радикала, запропонував називати орієнтований граф сагайдаком (див. [11, § 11.10]). Сильно зв'язним сагайдаком називається такий сагайдак, для якого з кожної вершини існує орієнтований шлях в кожну іншу.

Одним зі способів задання сагайдака $[Q]$ є його матриця суміжності Q , для якої, як і для довільної матриці, визначено поняття характеристичного многочлена, спектру, індексу (найбільшого за модулем власного числа) власних векторів. Всі ці параметри матриці ми також для простоти називатимемо відповідними параметрами сагайдака.

Ідея виділення сильнозв'язних сагайдаків, безумовно, не нова, оскільки це поняття введено не нами та вивчалося, наприклад в [7], де, зокрема, наведено перелік сагайдаків, які мають не більше чотирьох вершин. Цікаво, що цей перелік має помилку. О.Г. Ганюшкін звернув увагу на те, що в цьому списку є неточності. Так сагайдаки з номерами 18 та 22 збігаються. Дійсно, сагайдаки, які в книзі [7] занумеровано як 18 та 22 мають вигляд



Ці сагайдаки ізоморфні, оскільки збігаються, якщо в одному з них ліву верхню та ліву нижню вершину переставити місцями. Крім того, пропущено сагайдак



Має місце критерій, який зводить питання про ізоморфність сильнозв'язних сагайдаків до питання про рівність їх характеристичних многочленів та власних векторів, що відповідають індексам.

Теорема 1. Сильнозв'язні сагайдаки на чотирьох вершинах ізоморфні тоді і лише тоді, коли їх характеристичні многочлени збігаються, а ліві та праві додатні власні вектори однієї норми збігаються з точністю до перестановки компонент [3].

Сильнозв'язні сагайдаки та їх матриці суміжності були використані при вивчені алгебри Фуджити в [4-6].

Наведене вище свідчить про актуальність задачі про дослідження матриць суміжності сильнозв'язних сагайдаків без петель та кратних стрілок.

2. Побудова та доведення коректності алгоритму

У цій статті запропоновано алгоритм, який за матрицею суміжності сильнозв'язного сагайдака без петель та кратних ребер дозволяє знайти його індекс та додатний власний вектор, що відповідає індексам. Задача, яка розв'язується, є коректною в тому сенсі, що такий вектор завжди існує і єдиний з точністю до дійсного множника.

Перенумерації вершин сагайдака Q , заданої перестановкою σ , відповідає задана цією самою перестановкою перенумерація рядків та стовпців матриці. Отриману таким чином матрицю називатимемо результатом дії перестановки σ на матрицю $[Q]$, або на сагайдак Q .

Наведемо декілька простих зауважень, які корисно використовувати при формулюванні, розумінні та доведенні коректності роботи цього алгоритму, який буде запропоновано.

Зауваження 1. Нехай маємо сагайдак Q та його матрицю суміжності $[Q]$. Тоді степені матриці $[Q]$ мають такий геометричний зміст: для натурального t елемент a_{ij} матриці $[Q]^t$ дорівнює кількості різних шляхів довжиною t в графі Q , які виходять з вершини i та закінчуються у вершині j .

Зауваження 2. Сума матриць суміжності двох сагайдаків є матриця суміжності сагайдака, отриманого об'єднанням ребер вихідних сагайдаків.

Зауваження 3. Умова нерозкладності матриці $[Q]$ суміжності сагайдака Q рівносильна умові сильної зв'язності цього сагайдака.

У цьому зауваженні під нерозкладністю матриці розуміється поняття, запропоноване в [2, с. 352]. Матриця $[Q]$ називається розкладною, якщо існує така перестановка, що результатом її дії на матрицю $[Q]$ є матриця $[Q]'$ вигляду

$$[Q]' = \begin{pmatrix} [Q_1] & 0 \\ [Q_2] & [Q_3] \end{pmatrix} \quad (1)$$

де $[Q_1]$ та $[Q_3]$ – квадратні матриці, причому відповідні їм сагайдаки Q_1 та Q_3 є компонентами зв'язності сагайдака Q .

Задача про визначення найбільшого власного числа відома давно. Так, в [1, розд. 6, § 12] розв'язано задачу про знаходження індексу та відповідного власного вектору матриці в припущеннях, що всі власні числа матриці дійсні, а індекс має кратність 1, як корінь характеристичного многочлена. Нагадаємо, що для знаходження індексу матриці A та відповідного вектора необхідно взяти довільний вектор x_0 , який не є власним, і розглянути ітераційну по-

спідовність $x_{i+1} = Ax_i$. Відомо, що ця послідовність зі швидкістю $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^n$ збігається до власного вектору матриці A ,

який відповідає індексу.

Зауважимо, що цей алгоритм можна застосовувати навіть тоді, коли не всі власні числа матриці дійсні, але найбільше за модулем дійсне власне число має кратність один і модулі (комплексні норми) всіх інших власних чисел менші за модуль даного власного числа (у відповідних доведеннях коректності алгоритму базис достатньо вважати складеним з комплексних векторів). Крім цього, для невід'ємних та, зокрема, додатних матриць мають місце важливі теореми, доведені Перроном та Фробеніусом на початку 20-го століття.

Теорема Перрона. Додатна матриця $A = (\alpha_{ij})$ розміру n завжди має дійсне і до того ж додатне власне число r , яке є простим коренем характеристичного многочлену і за модулем більше за модуль кожного іншого характеристичного числа. Цьому числу r відповідає власний вектор $z = (z_1, \dots, z_n)$ матриці A з додатними координатами ($z_i > 0 \forall i$).

Ця теорема, відповідно до посилання в [2], вперше була сформульована та доведена в [12] та [13].

Теорема Фробеніуса. Нерозкладна невід'ємна матриця $A = (\alpha_{ij})$ розміру n завжди має додатне власне число r , яке є простим коренем характеристичного многочлена. Модулі всіх інших власних чисел не більші за r . Цьому максимальному власному числу відповідає власний вектор з додатними координатами.

Якщо при цьому матриця A має h характеристичних чисел $\lambda_0 = r, \lambda_1, \dots, \lambda_{h-1}$, модулі яких дорівнюють r , тоді всі ці числа є різними коренями рівняння $\lambda^h - r^h = 0$. При $h > 0$ матрицю A перестановою рядків можна звести до вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{2,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & A_{h-1,h} \\ A_{h,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ця теорема, відповідно до посилання в [2], вперше була сформульована та доведена в [8] та [9].

Наслідком теореми Фробеніуса [2, с. 347 заув. 3] є таке твердження.

Твердження 1. Нерозкладна невід'ємна матриця не може мати двох лінійно незалежних невід'ємних власних векторів.

Враховуючи, наведені факти, запропонуємо алгоритм знаходження індексу сильно зв'язного сагайдака. Алгоритм має такий вигляд.

1. За матрицею $A = [Q]$ суміжності сагайдака Q будується матриця $B = A + A^2 + \dots + A^k$, де k вибрано так, щоб матриця B була додатною.
2. Для матриці B застосовується алгоритм з [1].
3. Знайдений власний вектор матриці B є власним вектором матриці A , котрий відповідає індексу матриці A , а тому за цим вектором можна знайти і сам індекс матриці A .

Доведемо коректність запропонованого алгоритму.

Лема 1. Нехай A – матриця суміжності сильно зв'язного сагайдака. Тоді існує таке натуральне k , що матриця $B = A + A^2 + \dots + A^k$ додатна.

Доведення. Лема є наслідком сильної зв'язності сагайдака Q , а також зауважень 1 і 2.

Для скорочення викладок, позначимо $f(x) = x + x^2 + \dots + x^k$.

Лема 2. Кожен власний вектор матриці A є власним вектором матриці B , причому власним векторам матриці A , які відповідають різним додатним власним числам, відповідають власні вектори матриці B , що відповідають різним власним числам матриці B , що знаходяться в тому самому відношенні більше/менше, що і відповідні власні числа матриці A .

Доведення. Те, що власний вектор матриці A є власним вектором матриці B випливає з того, що наслідком рівності $Av = \lambda v$ є рівність $Bv = f(\lambda)v$. Відповідне відношення між власними числами випливає з монотонності функції $x + x^2 + \dots + x^k$ при додатних значеннях аргументу.

Лема 3. Матриця B має таке дійсне власне число кратності 1, що норми всіх інших власних чисел матриці B менші за нього.

Доведення. Лема випливає з зауваження 3 та теореми Перрона.

Лема 4. Власний вектор матриці B , який відповідає індексу матриці B , є власним вектором матриці A , який відповідає індексу матриці A .

Доведення. Нехай v – додатний власний вектор матриці B , що відповідає власному числу λ , тобто виконується рівність $Bv = \lambda v$.

Покажемо, що у цьому разі вектор Av також буде власним вектором матриці B . Дійсно, оскільки за побудовою $B = f(A)$, то матриці B та A комутують, звідки маємо, що $B(Av) = A(Bv) = \lambda Av$, що і потрібно.

Оскільки за побудовою матриця B додатна, то вона задоволяє умови твердження 1, тобто всі невід'ємні власні вектори матриці B лінійно залежні. Звідси випливає лінійна залежність векторів Av та v , тобто виконання рівності $Av = \mu \cdot v$ для деякого додатнього числа μ .

Враховуючи, що з побудови матриці B та рівності $Av = \mu \cdot v$ випливає рівність $Bv = f(\mu)v$, маємо $\lambda = f(\mu)$.

Покажемо, що число μ є індексом матриці A . Якщо це не так, тоді існує більше власне число μ_1 матриці A та відповідний власний вектор v_1 . Не обмежуючи загальності число μ_1 можна вважати індексом матриці A і тоді за теоремою Фробеніуса вектор v_1 буде невід'ємним. Але в цьому разі вектор v_1 буде власним вектором матриці B , що відповідатиме власному числу $\lambda_1 = f(\mu_1)$. З монотонності функції f маємо нерівність $\lambda_1 > \lambda$, яка суперечить тому, що число λ є індексом матриці B і, в свою чергу, доводить лему.

З доведених лем випливає така теорема.

Теорема 2. Запропонований вище алгоритм знаходження індексу та відповідного власного вектору матриці суміжності сильно зв'язного сагайдака коректний.

3. Висновки

Побудовано алгоритм знаходження індексу та відповідного власного вектора матриці суміжності сильно зав'язного сагайдака без петель та кратних стрілок. Коректність та збіжність цього алгоритму строго доведено.

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы // Наука. – Москва. – 2003. – 630 С. 2. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц // Наука. – Москва. – 1966. – 576 С. 3. Дудченко И.В. Сильносвязные колчаны, их индексы и собственные векторы // Кий. – 2007. – С. 28. (Препр./ НАН України. Інститут математики). 4. Дудченко И.В. Властиности алгебры Фуджити // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. – Серія фіз.-мат. науки. – 2005. – № 6. – С. 126-130. 5. Дудченко И.В. Алгебра Фуджити // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Серія фіз.-мат. науки. – 2011. – №1. 6. Дудченко И.В. Алгебра Фуджити // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Серія фіз.-мат. науки. – 2011. – №2. 7. Харари Ф. Теория графов, пер. с англ., М., 1973. 8 Frobenius G., Über Matrizen aus nicht-negativen Elementen // Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse. – Berlin, 1912 – S. 456-477. 9 Frobenius G., Uber Matrizen aus positiven Elementen // Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse. – Berlin, 1908. – S. 471-476; Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse. – Berlin, 1909. – S. 514-518. 10 Gabriel P., Unserlegbare Darstellungen 1 // Man. Math., 1972, v.6, p.71-103. 11 Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V., Algebras, Rings and Modules, V.I, Mathematics and Its Applications // V.575, Kluwer Academic Publishers, 2004, 380 p. 12 Perron O., Jacobischer Kettenbruchalgorithmus//Math. Ann. – 1907. – Bd. 64. – S. 1-76. 13 Perron O., Ueber Matrizen // Math. Ann. – 1907. – Bd. 64. – S. 248-263.

Надійшла до редколегії 17.10.11

УДК 512.534

Т. Жуковська, асп,
e-mail: t.zhukovska@ukr.net

ВІДНОШЕННЯ ГРІНА НА ДЕЯКИХ НАПІВГРУПАХ ЧАСТКОВИХ ІН'ЄКТИВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ БУЛЕАНУ

Вивчається будова відношень Гріна на напівгрупі $IF(B_n)$ стискуючих, напівгрупі $IO(B_n)$ монотонних та напівгрупі $IC(B_n)$ стискуючих монотонних ін'єктивних перетворень, впорядкованих, за включенням булеану B_n , множини $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Показано, що для напівгруп $IF(B_n)$ і $IC(B_n)$ усі відношення Гріна збігаються з відношенням рівності.

The structure of Green's relations on the semigroup $IF(B_n)$ of order-decreasing injective transformations, on the semigroup $IO(B_n)$ of order-preserving injective transformations and on the semigroup $IC(B_n)$ of order-decreasing order-preserving injective transformations of ordered by inclusion of boolean B_n of set $N = \{1, 2, \dots, n\}$ is studied. We proved that all Green's relations for semigroups $IF(B_n)$ and $IC(B_n)$ are coinciding with the identity relation.

Вступ

Для кожної частково впорядкованої множини (M, \leq) природно виділяються два типи перетворень цієї множини (у загальному випадку також часткові, тобто визначені на деякій підмножині з M), у певному сенсі узгоджені з даним частковим порядком. Часткове перетворення α множини M називається *стискучим* (або з пониженням порядку) (англ.: order-decreasing), якщо для довільного x із області визначення $dom\alpha$ перетворення α виконується нерівність $\alpha(x) \leq x$, і називається *монотонним* (або із збереженням порядку) (англ.: order-preserving), якщо для довільних $x, y \in dom\alpha$ із $x \leq y$ випливає $\alpha(x) \leq \alpha(y)$.

Як монотонні, так і стискучі часткові перетворення множини (M, \leq) утворюють відносно композиції перетворень напівгрупи, які позначаються відповідно $PO(M, \leq)$ і $PF(M, \leq)$ (або просто $PO(M)$ і $PF(M)$, якщо відомо, про який частковий порядок йдеться). Зрозуміло, що кожна з них є піднапівгрупою напівгрупи $PT(M)$ усіх часткових перетворень множини M . Видіlimо ще напівгрупу $PC(M) = PO(M) \cap PF(M)$ всіх стискучих часткових перетворень із збереженням порядку. Зрозуміло, що напівгрупи перетворень множини M , узгоджених із частковим порядком на M , почали вивчатися з найпростішого випадку – коли M є скінченим ланцюгом. Так, напівгрупа O_n монотонних скрізь визначених перетворень n -елементного ланцюга вперше з'явилася ще в [1], а напівгрупа F_n скрізь визначених перетворень такого ланцюга – у книзі [9]. Комбінаторика напівгрупи F_n ґрунтово вивчена в [7]. Особливо інтенсивно вивчення напівгруп перетворень скінченного ланцюга йшло протягом останніх двадцяти років (див. останню главу книги [5] і наведену там бібліографію). Але для інших часткових порядків такі напівгрупи почали вивчатися лише зовсім недавно (див. [2; 10]).

На перетворення множини M можуть накладатися додаткові обмеження. Зокрема, досить глибоко вивчена напівгрупа IO_n монотонних часткових ін'єктивних перетворень n -елементного ланцюга (видіlimо тут [4; 7]).

Елементи a і b напівгрупи S називаються *L-еквівалентними*, якщо вони породжують один і той же лівий головний ідеал (тобто aLb тоді й лише тоді, коли $S^1aS^1 = S^1bS^1$). Аналогічно, за допомогою рівності $aS^1 = bS^1$, визначається *R-відношення*. Через породжені елементами a і b двосторонніх головних ідеалів визначається *J-відношення* (тобто aJb тоді й лише тоді, коли $S^1aS^1 = S^1bS^1$). Крім того, через H позначається перетин відношень L і R , а через D – найменше з відношень еквівалентності, яке містить кожне з відношень L і R (воно збігається з деморганівським добутком $L \circ R = R \circ L$ відношень L і R).

Ці п'ять відношень – L , R , J , H і D – називаються відношеннями Гріна на напівгрупі S . Усі вони є відношенням еквівалентності. Для скінчених напівгруп відношення J і D збігаються. Відношення Гріна дозволяють визначити на напівгрупі щось на кшталт локальної системи координат, тому вони відіграють велику роль при вивчені буд-