

### Напівгрупа $IC(B_n)$

**Теорема 6.** Усі відношення Гріна на напівгрупі  $IC(B_n)$  збігаються з відношенням рівності.

**Доведення.** Оскільки  $IC(B_n)$  є піднапівгрупою  $IF(B_n)$ , то з рівностей (1) випливає, що кожен  $R$ -клас напівгрупи  $IC(B_n)$  буде міститися в деякому  $R$ -класі напівгрупи  $IF(B_n)$ . Але тоді з теореми (1) випливає, що на напівгрупі  $IC(B_n)$   $R$ -відношення збігається з відношенням рівності. Аналогічно з теореми (2) випливає, що  $L$ -відношення також збігається з відношенням рівності. Для решти відношень Гріна твердження теореми випливає з рівностей  $H = L \cap R$ ,  $D = L \circ R$  і  $J = D$ .

### Висновки

В роботі розглянуто відношення Гріна на трьох напівгрупах часткових ін'єктивних перетворень булеану:  $IF(B_n)$ ,  $IO(B_n)$  та  $IC(B_n)$ . Показано, що для напівгруп  $IF(B_n)$  і  $IC(B_n)$  усі відношення Гріна співпадають з відношенням рівності. Для відношень Гріна  $L$ ,  $R$  і  $H$  на напівгрупі  $IO(B_n)$  знайдено необхідні і достатні умови належності елементів до одного класу та встановлено необхідні умови належності елементів даної напівгрупи до одного  $D$ -класу.

1. Айзенштат А.Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества // Сиб. матем. ж. – 1962. – Т. 3, № 4. – С. 161-169.
2. Стронська Г.О. Напівгрупа стискаючих перетворень булеану скінченого множини // Вісник Київського університету. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 2. – С. 57-62.
3. Fernandes V.H. Semigroups of order-preserving mapping on a finite chain: a new class of divisors // Semigroup Forum. – 1997. – Vol. 54, № 2. – P. 230-236.
4. Fernandes V.H. The monoid of all injective order-preserving partial transformations on a finite chain // Semigroup Forum. – 2001. – № 62. – P. 178-204.
5. Ganyushkin O., Mazorchuk V. Classical Finite Transformation Semigroups. An Introduction. – Algebra and Applications. – London: Springer-Verlag, 2009. – № 9. – XII, 314 p.
6. Ganyushkin O., Mazorchuk V. On the Structure of  $IO_n$  // Semigroup Forum. – 2003. – № 66. – P. 455-483.
7. Howie J. Combinatorial and arithmetical aspects of the theory of transformation semigroups // Seminario do Centro de Álgebra, University of Lisbon. – 1992. – P. 1-14.
8. Laragji A., Umar A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // J. Algebra. – 2004. – Vol. 278, № 1. – P. 342-359.
9. Pin J. Variétés de langages formels. – Paris: Masson, 1984. – 160 p.
10. Stronska A. Nilpotent subsemigroups of a semigroup of order-decreasing transformations of a rooted tree // Algebra and Discrete Mathematics. – 2006. – № 4. – P. 126-140.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 512.552

Т. Журавльова, асп.

## ТОЧНА ПОСЛІДОВНІСТЬ МОДУЛІВ І ГОМОМОРФІЗМІВ НАД ЧЕРЕПИЧНИМ ПОРЯДКОМ

*Побудована точна послідовність модулів над черепичним порядком. Описані ядра цієї послідовності.*

*The exact sequence of modules over tiled order has been built. Kernels of this sequence are described.*

### 1. Вступ

Нехай  $A$  – кільце,  $M$  – правий  $A$ -модуль. Для довільних  $A$ -під модулів  $X_1, X_2$  модуля  $M$  існує коротка точна послідовність  $0 \rightarrow X_1 \cap X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1 + X_2 \rightarrow 0$ .

В [4] Jansen W. і Odenthal C. для обчислення глобальної розмірності черепичного порядку використовували коротку точну послідовність з трьома незвідними модулями, а Sakai Y. в [1] отримав точну послідовність  $0 \rightarrow X_1 \cap X_2 \cap X_3 \rightarrow (X_1 \cap X_2) \oplus (X_2 \cap X_3) \oplus (X_1 \cap X_3) \rightarrow X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \rightarrow X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow 0$  і в окремих випад-

ках знайшов ядро  $\psi$  точної послідовності  $\bigoplus_{i=1}^m (X_i \cap X_{i-1}) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=1}^m X_i \rightarrow \sum_{i=1}^m X_i \rightarrow 0$ .

У даній статті ми поширюємо точну послідовність для більшої кількості незвідних модулів над черепичним порядком.

### 2. Необхідні теоретичні відомості

**Означення 1.** Модуль  $M$  називається дистрибутивним, якщо для довільних його підмодулів  $K, L, N$  справедлива рівність  $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$ .

Очевидно, що підмодуль та фактор-модуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним. Модуль називається напівдистрибутивним, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце  $A$  називається напівдистрибутивним справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль  $A_A$  ( $_AA$ ) є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа та зліва кільце називається напівдистрибутивним.

Очевидно, що кожний ланцюговий модуль є дистрибутивним модулем та кожний напівланцюговий модуль є напівдистрибутивним модулем.

**Означення 2.** Кільце ендоморфізмів нерозкладного проективного модуля над напівдосконалим кільцем називається головним кільцем ендоморфізмів.

Ми будемо писати  $SPSD$ -кільце  $A$  для напівдосконалого напівдистрибутивного кільця  $A$ .

**Означення 3.** Кільце  $A$  називається напівмаксимальним, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента  $e \in A$  кільце  $eAe$  є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним), тобто всі головні кільца ендоморфізмів кільця  $A$  є дискретно нормованими кільцями.

**Твердження 1.** [2] Напівмаксимальне кільце є прямим добутком скінченого числа первинних напівмаксимальних кілець.

**Теорема 1.** [2] Наступні умови для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця  $A$  еквівалентні:

- (а) кільце  $A$  – напівдистрибутивне;

(b) кільце  $A$  є прямим добутком напівпростого артінового кільца та напівмаксимального кільца.

**Теорема 2.** [2] Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \varnothing & \pi^{\alpha_{12}}\varnothing & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\varnothing \\ \pi^{\alpha_{21}}\varnothing & \varnothing & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\varnothing \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\varnothing & \pi^{\alpha_{n2}}\varnothing & \dots & \varnothing \end{pmatrix}, \text{ де } n \geq 1, \varnothing - \text{дискретно нормоване кільце з простим елементом } \pi,$$

$\alpha_{ij}$  – цілі раціональні числа такі, що  $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$  для всіх  $i, j, k$  та  $\alpha_{ii} = 0$  для всіх  $i$ .

**Означення 4.** Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком.

З теорем 1 та 2 отримуємо, що черепичний порядок – це первинне нетерове справа  $SPSD$ -кільце з ненульовим радикалом Джекобсона.

Позначимо через  $M_n(B)$  кільце всіх  $n \times n$  матриць над кільцем  $B$ .

**Означення 5.** Цілочисельна матриця  $\varepsilon = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$  називається

- матрицею показників, якщо  $\varepsilon$  – матриця показників і  $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$  та  $\alpha_{ii} = 0$  для всіх  $i, j, k$ ;
- зведеною матрицею показників, якщо  $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$  для всіх  $i, j, i \neq j$ .

Ми використовуємо наступне позначення:  $A = \{\varnothing, \varepsilon(A)\}$ , де  $\varepsilon(A) = (\alpha_{ij})$  – матриця показників кільця  $A$ , тобто

$$A = \sum_{i,j=1}^n e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\varnothing, \text{ де } e_{ij} \text{ – матричні одиниці. Якщо черепичний порядок зведенний, тобто } A/R(A) \text{ є прямим добутком}$$

тіл, то  $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$  при  $i \neq j$ , тобто матриця показників  $\varepsilon(A)$  є зведенюю. Тут  $R(A)$  – радикал Джекобсона кільця  $A$ .

Черепичний порядок  $A$  має класичне кільце часток  $Q = M_n(D)$ , де  $D$  – класичне тіло часток дискретно нормованого кільця  $\varnothing$ .

**Означення 6.** Нехай  $A$  – черепичний порядок. Правою (лівою)  $A$ -граткою називається правий (лівий)  $A$ -модуль, який є скінченнопородженим вільним  $\varnothing$ -модулем.

Зокрема, всі скінченнопороджені проективні  $A$ -модулі є  $A$ -гратками.

Серед всіх  $A$ -граток виділяються так звані незвідні  $A$ -гратки, тобто  $A$ -гратки, які містяться у простому правому (лівому)  $Q$ -модулі  $U$  (відповідно  $V$ ). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину  $S_r(A)$  (відповідно  $S_l(A)$ ) відносно включення. Будь-яка права (відповідно ліва) незвідна  $A$ -гратка  $M$  (відповідно  $N$ ), яка лежить в  $U$  (відповідно в  $V$ ), є  $A$ -модулем з  $\varnothing$ -базисом  $(\pi^{\alpha_1}e_1, \dots, \pi^{\alpha_n}e_n)$ , причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases}, \quad (1)$$

де літера  $T$  означає операцію транспонування.

Для наших цілей досить розглянути зведений черепичний порядок  $A$ . У цьому випадку елементи  $S_r(A)$  ( $S_l(A)$ ) знаходяться в біективній відповідності з цілочисельними рядками векторів  $\vec{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  (стовпчиками векторів  $\vec{a}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ ), де  $\vec{a}$  і  $\vec{a}^T$  задовольняють умови (1). Ми будемо записувати  $\varepsilon(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  або  $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , якщо  $M \in S_r(A)$ .

Нехай  $\vec{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ . Відношення порядку  $\vec{a} \prec \vec{b}$  в  $S_r(A)$  визначається наступним чином:  $\vec{a} \prec \vec{b} \Leftrightarrow \alpha_i \geq \beta_i$  для  $i = 1, \dots, n$ .

Оскільки кільце  $A$  є напівдистрибутивним, то  $S_r(A)$  та  $S_l(A)$  є дистрибутивними гратками відносно додавання та перетину.

**Твердження 2.** [5] Нехай  $\Lambda$  – черепичний порядок,  $M$  – незвідний і непроективний  $\Lambda$ -модуль,  $X$  – максимальний підмодуль модуля  $M$ . Тоді існує проективний підмодуль  $M'$ , який не є підмодулем  $X$ .

**Твердження 3.** [5] Нехай  $X_1, \dots, X_s$  – всі максимальні підмодулі незвідного і не проективного  $\Lambda$ -модуля  $M$  з  $\varepsilon(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  та  $\varepsilon(X_i) = \varepsilon(M) + e_{ij}$ , де  $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots, 0)$ . Тоді  $P(M) = \bigoplus_{i=1}^s \pi^{\alpha_{ji}} P_{ji}$  та  $M = \sum_{i=1}^s \pi^{\alpha_{ji}} P_{ji}$ .

**Лема 1.** [5] Нехай  $M_1, M_2, M_3$  – підмодулі дистрибутивного модуля  $M$  та  $\varphi: M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \rightarrow M_1 + M_2 + M_3$  – епіморфізм прямої суми незвідних модулів на їх суму, визначений за правилом:  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3$ . Тоді  $\ker \varphi = \{(m_{12} - m_{31}, m_{23} - m_{12}, m_{31} - m_{23}) \mid m_{12} \in M_1 \cap M_2, m_{23} \in M_2 \cap M_3, m_{31} \in M_3 \cap M_1\}$ .

**Теорема 3.** [5] Нехай  $M_1, \dots, M_n$  – підмодулі дистрибутивного модуля  $M = \sum_{i=1}^n M_i$  та епіморфізм  $\varphi : \bigoplus_{i=1}^n M_i \mapsto M$

діє за правилом  $\varphi(m_1, \dots, m_n) = m_1 + \dots + m_n$ . Тоді  $\ker \varphi = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \mid y_i = \sum_{j \neq i} m_{ij}, m_{ij} = -m_{ji} \in M_i \cap M_j \right\}$ .

**Наслідок 1.** [5] Нехай  $M$  – незвідний  $\Lambda$ -модуль і  $P(M) = \bigoplus_{i=1}^s \pi^{\alpha_{ji}} P_{ji}$ ,  $M = \sum_{i=1}^s \pi^{\alpha_{ji}} P_{ji}$ . Тоді ядро епіморфізму  $\varphi : P(M) \mapsto M$  має вигляд  $\ker \varphi = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \mid y_i = \sum_{k \neq i} m_{ik}, m_{ik} = -m_{ki} \in \pi^{\alpha_{ji}} P_{ji} \cap \pi^{\alpha_{jk}} P_{jk} \right\}$ .

### 3. Основні результати

Ядро  $K$  як підмодуль в  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  можна формально записати у вигляді  $K = \sum_{i < j} M_i \cap M_j (e_i - e_j)$ , де

$$e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots, 0).$$

За теоремою 3 розв'язки рівняння  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0$  подаються у вигляді:  $m_1 = m_{12} + m_{13} + \dots + m_{1n}$ ,  $m_2 = -m_{12} + m_{23} + \dots + m_{2n}$ , ...  $m_k = -m_{1k} - m_{2k} - \dots - m_{(k-1)k} + m_{kk+1} + \dots + m_{kn}$ , ...  $m_n = -m_{1n} - m_{2n} - \dots - m_{(n-1)n}$ .

Тоді  $(y_1, \dots, y_n) = (m_{12} + m_{13} + \dots + m_{1n}, -m_{12} + m_{23} + \dots + m_{2n}, \dots, -m_{1n} - m_{2n} - \dots - m_{(n-1)n}) = (m_{12}, -m_{12}, 0, \dots, 0) + (m_{13}, 0, -m_{13}, 0, \dots, 0) + \dots + (m_{1n}, 0, \dots, 0, -m_{1n}) + (0, m_{23}, -m_{23}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, m_{n-1n}, -m_{n-1n})$ .

Нехай  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in Z^n$ . Покладемо  $m_{e_i} = (0, \dots, 0, m, 0, \dots, 0)$ . Тоді  $(y_1, \dots, y_n) = m_{12}(e_1 - e_2) + m_{13}(e_1 - e_3) + \dots + m_{1n}(e_1 - e_n) + m_{23}(e_2 - e_3) + \dots + m_{n-1n}(e_{n-1} - e_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij}(e_i - e_j)$ .

Тому  $\ker \varphi = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (M_i \cap M_j)(e_i - e_j)$ .

Нехай  $M_{ij} = M_i \cap M_j$ . Задамо на множині  $\{M_{12}, M_{13}, \dots, M_{1n}, M_{23}, \dots, M_{n-1n}\}$  відношення порядку наступним чином:  $M_{ij} \leq M_{kl}$  тоді і тільки тоді, коли  $j < l$  або  $i \leq k$ ,  $j = l$ .

Розглянемо епіморфізм  $\psi : \bigoplus_{i < j} M_{ij} \rightarrow \ker \varphi$ , що діє за правилом  $\psi(m_{12}, m_{13}, m_{23}, \dots, m_{n-1n}) = m_{12}(e_1 - e_2) + m_{13}(e_1 - e_3) + m_{23}(e_2 - e_3) + \dots + m_{n-1n}(e_{n-1} - e_n)$ .

Оскільки  $\psi(m_{12}, m_{13}, m_{23}, \dots, m_{n-1n}) = (m_{12} + m_{13} + \dots + m_{1n}, -m_{12} + m_{23} + \dots + m_{2n}, \dots, -m_{1n} - m_{2n} - \dots - m_{n-1n})$ , то його зручно записати формально у вигляді  $\psi(m_{12}, \dots, m_{n-1n}) = (m_{12}, \dots, m_{n-1n}) \cdot A$ , де  $A = (a_{ij}) - (C_n^2 \times n)$  матриця,  $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ .

Наприклад, при  $n = 3$ :  $M_{12} < M_{13} < M_{23}$  і  $\psi(m_{12}, m_{13}, m_{23}) = (m_{12}, m_{13}, m_{23}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

При такому записі  $\ker \varphi = im\psi = (M_{12}, M_{13}, M_{23}, \dots, M_{n-1n}) \cdot A$  або  $\ker \varphi = \bigoplus_{i < j} M_{ij} \cdot A$ .

Позначимо  $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k} = M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ . На множині  $\{M_{i_1 i_2 \dots i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ , задамо відношення порядку індуктивно:  $M_{i_1 \dots i_k} \leq M_{j_1 \dots j_k}$  тоді і тільки тоді, коли або  $i_k < j_k$  або  $i_k = j_k$ ,  $M_{i_1 \dots i_{k-1}} \leq M_{j_1 \dots j_{k-1}}$ .

Позначимо через  $m_{i_1, \dots, i_k}$  елемент з  $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k}$ . Якщо  $i_1 < \dots < i_k$ , то цей елемент будемо позначити через  $m_{i_1 \dots i_k}$ .

**Теорема 4.** Для довільних підмодулів  $M_1, \dots, M_n$  дистрибутивного модуля  $M$  справедлива точна послідовність модулів і гомоморфізмів  $0 \rightarrow \bigcap_{i=1}^n M_i \rightarrow \bigoplus_{k=1}^n \left( \bigcap_{i \neq k} M_i \right) \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_{k+1}} \bigoplus_{i_1 < \dots < i_k} \left( M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k} \right) \xrightarrow{f_k} \dots$

$$\xrightarrow{f_3} \bigoplus_{i < j} (M_i \cap M_j) \xrightarrow{f_2} \bigoplus_{i=1}^n M_i \xrightarrow{f_1} \sum_{i=1}^n M_i \rightarrow 0.$$

**Доведення.** Для доведення теореми нам достатньо довести точність коротких точних послідовностей  $0 \rightarrow K_2 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i \xrightarrow{f_1} \sum_{i=1}^n M_i \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow K_{m+1} \rightarrow \bigoplus_{i_1 < \dots < i_m} (M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_m}) \xrightarrow{f_m} K_m \rightarrow 0$ ,  $2 \leq m < n-1$ ,

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow \bigoplus_k (\bigcap_{i \neq k} M_i) \xrightarrow{f_{n-1}} K_{n-1} \rightarrow 0, \text{ де } K_m = \ker f_{m-1}, K_n = \ker f_{n-1} = \bigcap_{i=1}^n M_i.$$

**Лема 2.** Ядра  $K_m^{(n)}$ ,  $2 \leq m \leq n-1$ , виражаються тільки через модулі  $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_m}$ , тобто  $K_m^{(n)} = \overline{M_m^{(n)}} \cdot A_m^{(n)}$ , де  $\overline{M_m^{(n)}}$  – вектор-рядок, елементами якого є модулі  $M_{i_1 i_2 \dots i_m}$ , записані у порядку зростання,

$$A_m^{(n)} = (a_{ij}) - C_n^m \times C_n^{m-1} \text{ – матриця, } a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}. \text{ Більше того, } A_m^{(n)} = \begin{pmatrix} A_m^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^m E & A_{m-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad m \leq n-1.$$

$$\text{Доведення.} \text{ Доведемо спочатку індукцією за } n, \text{ що } K_3^n = \overline{M_3^{(n)}} \cdot A_3^{(n)} \text{ та } A_3^{(n)} = \begin{pmatrix} A_3^{(n-1)} & 0 \\ -E & A_2^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

База індукції  $n = 4$ . Маємо

$$K_2^{(4)} = (M_1 \cap M_2)(e_1 - e_2) + (M_1 \cap M_3)(e_1 - e_3) + (M_1 \cap M_4)(e_1 - e_4) + (M_2 \cap M_3)(e_2 - e_3) + (M_2 \cap M_4)(e_2 - e_4) + (M_3 \cap M_4)(e_3 - e_4) = (M_{12}, M_{13}, M_{23}, M_{14}, M_{24}, M_{34}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \overline{M_2} \cdot A_2^{(4)}.$$

Епіморфізм  $\varphi$  в точній послідовності  $0 \rightarrow K_3^{(4)} \rightarrow M_{12} \oplus M_{13} \oplus M_{23} \oplus M_{14} \oplus M_{24} \oplus M_{34} \xrightarrow{\varphi} K_2^{(4)} \rightarrow 0$  діє за правилом

$$\begin{aligned} \varphi(m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{14}, m_{24}, m_{34}) &= (m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{14}, m_{24}, m_{34}) \cdot A_2^{(4)} = \\ &= (m_{12} + m_{13} + m_{14}, -m_{12} + m_{23} + m_{24}, -m_{13} - m_{23} + m_{34}, -m_{14} - m_{24} - m_{34}). \end{aligned}$$

Тому  $K_3^{(4)} = \ker \varphi$  є розв'язком системи  $(m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{14}, m_{24}, m_{34}) \cdot A_2^{(4)} = 0$ .

Останнє рівняння системи  $-m_{14} - m_{24} - m_{34} = 0$  має розв'язок  $m_{14} = m_{14,24} + m_{14,34} = 0$ ,  $m_{24} = -m_{14,24} + m_{24,34} = 0$ ,  $m_{34} = -m_{14,34} - m_{24,34} = 0$ , де  $m_{ij,kl} \in M_{ij} \cap M_{kl}$ .

Тоді система перших трьох рівнянь набуває вигляду

$$m_{12} + m_{13} + (m_{14,24} + m_{14,34}) = 0, \quad -m_{12} + m_{23} + (-m_{14,24} + m_{24,34}) = 0, \quad -m_{13} - m_{23} + (-m_{14,34} - m_{24,34}) = 0.$$

Позначимо  $\tilde{m}_{12} = m_{12} + m_{14,24}$ ,  $\tilde{m}_{24} = m_{13} + m_{14,34}$ ,  $\tilde{m}_{23} = m_{23} + m_{24,34}$ . Оскільки  $m_{ij,kl} \in M_{ij} \cap M_{kl} \subset M_{ik}$ , то  $\tilde{m}_{ik} \in M_{ik}$ . Отримали систему  $\tilde{m}_{12} + \tilde{m}_{13} = 0$ ,  $-\tilde{m}_{12} + \tilde{m}_{23} = 0$ ,  $-\tilde{m}_{13} - \tilde{m}_{23} = 0$ .

Звідси  $\tilde{m}_{12} = -\tilde{m}_{13} = \tilde{m}_{23} = m_{123} \in M_1 \cap M_2 \cap M_3$ . Тоді

$$\begin{aligned} m_{12} &= \tilde{m}_{12} - m_{14,24} = m_{123} - m_{124}, \quad m_{13} = \tilde{m}_{13} - m_{14,34} = -m_{123} - m_{134}, \\ m_{23} &= \tilde{m}_{23} - m_{24,34} = m_{123} - m_{234}, \quad m_{14} = m_{14,24} + m_{14,34} = m_{124} + m_{134}, \\ m_{24} &= -m_{14,24} + m_{24,34} = -m_{124} + m_{234}, \quad m_{34} = -m_{14,34} - m_{24,34} = -m_{134} - m_{234} \end{aligned}$$

або  $(m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{14}, m_{24}, m_{34}) = (m_{123}, m_{124}, m_{134}, m_{234}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Отже, маємо:  $K_3^{(4)} = (M_{123}, M_{124}, M_{134}, M_{234}) \cdot A_3^{(4)}$ , де  $A_3^{(4)} = \begin{pmatrix} A_3^3 & 0 \\ -E & A_2^3 \end{pmatrix}$ .

Припустимо, що  $K_3^{(n)} = M_3^{(n)} \cdot A_3^{(n)}$  і  $A_3^{(n)} = \begin{pmatrix} A_3^{(n-1)} & 0 \\ -E & A_2^{(n-1)} \end{pmatrix}$ . Оскільки  $K_2^{(n+1)} = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} M_{ij}(e_i - e_j) = \sum_{i < j \leq n} M_{ij}(e_i - e_j) + \sum_{i \leq n} M_{in+1}(e_i - e_{n+1})$ , то  $A_2^{(n+1)} = \begin{pmatrix} A_2^{(n)} & 0 \\ -E & -U \end{pmatrix}$ , де  $U = (1, 1, \dots, 1)^T$ .

Нехай  $K_3^{(n+1)}$  – ядро епіморфізму  $\theta: \bigoplus_{i < j} M_{ij} \rightarrow K_2^{(n+1)}$ , де  $K_2^{(n+1)} = \bar{M}_2^{(n+1)} A_2^{(n+1)}$ .

Позначимо  $\bar{M}_2^{(n+1)} = (\bar{M}_2^{(n)}, \bar{M}_2^{[n+1]})$ , де  $\bar{M}_2^{(n)} = (M_{12}, M_{13}, M_{23}, \dots, M_{n-1n}), \bar{M}_2^{[n+1]} = (M_{1n+1}, M_{2n+1}, \dots, M_{nn+1})$ .

Для знаходження  $K_3^{(n+1)}$  маємо систему  $\bar{m}_2 A_2^{(n+1)} = 0$ , де  $\bar{m} \in M_2^{(n+1)}, \bar{m} = (\bar{m}_2^{(n)}, \bar{m}_2^{[n+1]})$ . З урахуванням блочного вигляду  $A_2^{(n+1)}$  отримуємо  $(\bar{m}_2^{(n)}, \bar{m}_2^{[n+1]}) \cdot \begin{pmatrix} A_2^{(n)} & 0 \\ -E & -U \end{pmatrix} = 0$  або  $\bar{m}_2^{(n)} A_2^{(n+1)} + \bar{m}_2^{[n+1]} E = 0, -\bar{m}_2^{[n+1]} U = 0$ .

Розглянемо останнє рівняння  $m_{1n+1} + m_{2n+1} + \dots + m_{nn+1} = 0$ . Розв'язки цього рівняння утворюють ядро епіморфіз-

му  $\psi: \bigoplus_{i=1}^n \rightarrow \sum_{i=1}^n M_{in+1}$ . Тому  $\ker \psi = K_2^{(n)} = \bigoplus_{i < j} (M_{in+1} \cap M_{jn+1}) A_2^{(n)} = \bigoplus_{i < j \leq n} M_{ijn+1} A_2^{(n)}$ . Тоді  $\bar{m}_2^{[n+1]} = \bar{m}_3^{[n+1]} A_2^{(n)}$ .

Система  $\bar{m}_2^{(n)} A_2^{(n)} + \bar{m}_2^{[n+1]} E = 0$  набуває вигляду  $\bar{m}_2^{(n)} A_2^{(n)} + \bar{m}_3^{[n+1]} A_2^{(n)} E = 0$  або  $(\bar{m}_2^{(n)} + \bar{m}_3^{[n+1]}) A_2^{(n)} = 0$ .

Позначимо  $m_{ij} + m_{ijn+1} = \tilde{m}_{ij} \in M_{ij}$ . Тоді  $\bar{m}_2^{(n)} + \bar{m}_3^{[n+1]} = \tilde{m}_2^{(n)} = (\tilde{m}_{12}, \tilde{m}_{13}, \tilde{m}_{23}, \dots, \tilde{m}_{n-1n})$ . Отримаємо  $\tilde{m}_2^{(n)} A_2^{(n)} = 0$ . За припущенням індукції  $\tilde{m}_2^{(n)} = \bar{m}_3^{(n)} \cdot A_3^{(n)}$ . Тому  $\bar{m}_2^{(n)} = \bar{m}_3^{(n)} \cdot A_3^{(n)} - \bar{m}_3^{[n+1]}$ .

Таким чином,  $(\bar{m}_2^{(n)}, \bar{m}_2^{[n+1]}) = (\bar{m}_3^{(n)}, \bar{m}_3^{[n+1]}) \cdot \begin{pmatrix} A_3^{(n)} & 0 \\ -E & A_2^{(n)} \end{pmatrix} = 0$  і тому  $A_3^{(n+1)} = \begin{pmatrix} A_3^{(n)} & 0 \\ -E & A_2^{(n)} \end{pmatrix} = 0$ .

Доведемо тепер індукцією за  $t$ , що  $K_t^{(n)} = \bar{M}_t^n \cdot A_t^{(n)}$ , де  $A_t^{(n)} = \begin{pmatrix} A_t^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^t E & A_{t-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$ .

База індукції  $t = 3$  вже розглянута. Припустимо, що  $K_l^{(n)} = \bar{M}_l^n \cdot A_l^{(n)}$  і  $A_l^{(n)} = \begin{pmatrix} A_l^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^l E & A_{l-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$  для всіх  $l \leq t$ .

$K_{t+1}^{(n)}$  є множиною розв'язків системи рівнянь  $\bar{m}_t^{(n)} \cdot A_t^{(n)} = 0$  (тут  $\bar{m}_t^{(n)} = (m_{12\dots t}, \dots, m_{n-t+1\dots n}) = (\bar{m}_t^{(n-1)}, \bar{m}_t^{[n]})$ ) або  $(\bar{m}_t^{(n-1)}, \bar{m}_t^{[n]}) \cdot \begin{pmatrix} A_t^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^t E & A_{t-1}^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0$ . Звідси отримуємо систему  $\bar{m}_t^{(n-1)} A_t^{(n-1)} + \bar{m}_t^{[n]} (-1)^t E = 0, \bar{m}_t^{[n]} A_{t-1}^{(n-1)} = 0$ .

За припущенням індукції  $\bar{m}_t^{[n]} = \bar{m}_{t+1}^{[n]} A_t^{(n-1)}$ . Тоді перша рівність системи набуває вигляду  $\bar{m}_t^{(n-1)} A_t^{(n-1)} + \bar{m}_{t+1}^{[n]} A_t^{(n-1)} (-1)^t E = 0$  або  $(\bar{m}_t^{(n-1)} + (-1)^t \bar{m}_{t+1}^{[n]}) A_t^{(n-1)} = 0$ .

Позначимо  $m_{i_1\dots i_t} + (-1)^t m_{i_1\dots i_t n} = \tilde{m}_{i_1\dots i_t} \in M_{i_1\dots i_t}, \bar{m}_t^{(n-1)} + (-1)^t \bar{m}_{t+1}^{[n]} = \tilde{m}_t^{(n-1)}$ . Отримаємо рівність  $\tilde{m}_t^{(n-1)} A_t^{(n-1)} = 0$ .

За припущенням індукції  $\tilde{m}_t^{(n-1)} = \bar{m}_{t+1}^{(n-1)} A_{t+1}^{(n-1)}$ . Тоді  $\bar{m}_t^{(n-1)} = \tilde{m}_t^{(n-1)} - (-1)^t \bar{m}_{t+1}^{[n]} = \bar{m}_{t+1}^{(n-1)} A_{t+1}^{(n-1)} + (-1)^{t+1} \bar{m}_{t+1}^{[n]}$ .

Отже,  $(\bar{m}_t^{(n-1)}, \bar{m}_t^{[n]}) = (\bar{m}_{t+1}^{(n-1)}, \bar{m}_{t+1}^{[n]}) \cdot \begin{pmatrix} A_{t+1}^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^{t+1} E & A_t^{(n-1)} \end{pmatrix}$ . Це означає, що  $K_{t+1}^{(n)}$  виражається лише через  $(M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_{t+1}})$ . Дійсно,  $K_{t+1}^{(n)} = \left\{ \bar{m}_t^{(n)} \mid \bar{m}_t^{(n)} A_t^{(n)} = 0 \right\}$ .

Ми показали, що  $\bar{m}_t^{(n)} = (\bar{m}_t^{(n-1)}, \bar{m}_t^{[n]})$  залежать від  $\bar{m}_{t+1}^{(n)} = (\bar{m}_{t+1}^{(n-1)}, \bar{m}_{t+1}^{[n]})$ , а саме  $\bar{m}_t^{(n)} = \bar{m}_{t+1}^{(n)} A_{t+1}^{(n)}$ , де  $A_{t+1}^{(n)} = \begin{pmatrix} A_{t+1}^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^{t+1} E & A_t^{(n-1)} \end{pmatrix}$ .

За лемою 2  $K_{n-1}^{(n)} = \bar{M}_{n-1}^{(n)} \cdot A_{n-1}^{(n)}$ . Тому існує епіморфізм  $\xi: \bigoplus_{k=1}^n \left( \bigcap_{i \neq k} M_i \right) \rightarrow K_{n-1}^{(n)}$ , що діє за правилом  $\xi(\bar{m}_{n-1}^{(n)}) = \bar{m}_{n-1}^{(n)} A_{n-1}^{(n)}, (\bar{m}_{n-1}^{(n)} = (m_{12\dots n-1}, m_{12\dots n-2n}, \dots, m_{23\dots n}))$ .  $K_n = \ker \xi = \left\{ \bar{m}_{n-1}^{(n)} \in \bigoplus_{i_1 < \dots < i_{n-1}} M_{i_1\dots i_{n-1}} \mid \bar{m}_{n-1}^{(n)} - 1^{(n)} A_{n-1}^{(n)} = 0 \right\}$ .

Позначимо  $\bar{m}_{n-1}^{[n]} = (m_{12\dots n-2n}, m_{12\dots n-3n}, \dots, m_{23\dots n})$  (елементами  $\bar{m}_{n-1}^{[n]}$  є  $\bar{m}_{n-1}^{[n]} = m_{i_1\dots i_{n-2n}}$ ). Тоді рівність  $\bar{m}_{n-1}^{(n)} A_{n-1}^{(n)} = 0$  набуває вигляду  $(m_{12\dots n-1}, \bar{m}_{n-1}^{[n]}) \cdot \begin{pmatrix} A_{n-1}^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^{n-1} E & A_{n-2}^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0$  або  $m_{12\dots n-1} A_{n-1}^{(n-1)} + \bar{m}_{n-1}^{[n]} \cdot (-1)^{n-1} E = 0, \bar{m}_{n-1}^{[n]} A_{n-2}^{(n-1)} = 0$ .

За лемою 2 розв'язком рівняння  $\bar{m}_{n-1}^{[n]} A_{n-2}^{(n-1)} = 0$  є  $\bar{m}_{n-1}^{[n]} = \bar{m}_n^{[n]} A_{n-1}^{(n-1)}$ , де  $\bar{m}_n^{[n]} = m_{12\dots n}$ . Маємо рівняння  $m_{12\dots n-1} \cdot A_{n-1}^{(n-1)} + m_{12\dots n} \cdot A_{n-1}^{(n-1)} \cdot (-1)^{n-1} E = 0$  або  $(m_{12\dots n-1} + (-1)^{n-1} m_{12\dots n}) A_{n-1}^{(n-1)} = 0$ .

Оскільки  $A_{n-1}^{(n-1)} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n-11})^T$ , де  $a_{i1} \in \{-1, 0, 1\}$ , то  $m_{12\dots n-1} + (-1)^{n-1} m_{12\dots n} = 0$  і  $m_{12\dots n-1} = (-1)^n m_{12\dots n}$ .

Отже,  $\bar{m}_{n-1}^{(n)} = m_{12\dots n} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n \\ A_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$ . Тому  $K_n = \ker \xi = M_n^{(n)} \cdot A_n^{(n)} = M_{12\dots n} \cdot A_n^{(n)}$ , де  $A_n^{(n)} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ A_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$ .

Очевидно, що  $K_n \cong M_{12\dots n} = \bigcap_{i=1}^n M_i$ . Таким чином, маємо короткі точні послідовності

$$0 \rightarrow K_2^{(n)} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow \sum M_i \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow K_{m+1}^{(n)} \rightarrow \bigoplus_{i_1 < \dots < i_m} M_{i_1 \dots i_m} \rightarrow K_m^{(n)} \rightarrow 0, \quad 2 \leq m < n-1,$$

$$0 \rightarrow K_n^{(n)} \rightarrow \bigoplus_{k=1}^n (\bigcap_{i \neq k} M_i) \rightarrow K_{n-1}^{(n)} \rightarrow 0.$$

З комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow K_n^n \rightarrow \bigoplus M_{i_1 \dots i_{n-1}} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bigoplus M_{i_1 i_2} & \longrightarrow & \bigoplus M_i \rightarrow \sum M_i \rightarrow 0 \\ \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ K_{n-1}^{(n)} & \dots & & K_3^{(n)} & \dots & K_2^{(n)} & \\ \nearrow & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

отримуємо точну послідовність  $0 \rightarrow M_{i_1 \dots i_n} \rightarrow \bigoplus M_{i_1 \dots i_{n-1}} \rightarrow \bigoplus M_{i_1 \dots i_{n-2}} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus M_{i_1 i_2} \rightarrow \bigoplus M_i \rightarrow \sum M_i \rightarrow 0$ .

Теорему доведено.

**Наслідок 2.** Нехай  $\Lambda$  – черепичний порядок і  $M_1, \dots, M_n$  – незвідні  $\Lambda$ -модулі. Тоді справедлива точна послідовність модулів та гомоморфізмів

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigcap_{i=1}^n M_i \rightarrow \bigoplus_{k=1}^n (\bigcap_{i \neq k} M_i) \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_{k+1}} \bigoplus_{i_1 < \dots < i_k} (M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k}) \xrightarrow{f_k} \dots \\ \xrightarrow{f_3} \bigoplus_{i < j} (M_i \cap M_j) \xrightarrow{f_2} \bigoplus_{i=1}^n M_i \xrightarrow{f_1} \sum_{i=1}^n M_i \rightarrow 0. \end{aligned}$$

#### 4. Висновки

У статті отримано узагальнення точної послідовності цілком розкладних модулів над черепичним порядком, наведеної в [4]. Показано, що для довільних підмодулів  $M_1, \dots, M_n$  дистрибутивного модуля  $M$  справедлива точна послідовність модулів і гомоморфізмів

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigcap_{i=1}^n M_i \rightarrow \bigoplus_{k=1}^n (\bigcap_{i \neq k} M_i) \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_{k+1}} \bigoplus_{i_1 < \dots < i_k} (M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k}) \xrightarrow{f_k} \dots \\ \xrightarrow{f_3} \bigoplus_{i < j} (M_i \cap M_j) \xrightarrow{f_2} \bigoplus_{i=1}^n M_i \xrightarrow{f_1} \sum_{i=1}^n M_i \rightarrow 0. \end{aligned}$$

1. Fujita H., Sakai Y. Frobenius full matrix algebras and Gorenstein tiled orders // Comm. Algebra. – 2006. – Vol. 34. – P. 1181–1203. 2. Hazewinkel M., Gubaren N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules : In 2 vol. – Kluwer Acad. Publish., 2004. – Vol.1. 3. Hazewinkel M., Gubaren N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules : In 2 vol. – Kluwer Acad. Publish., 2004. – Vol.2. 4. Jansen W., Odenthal C. A tiled order having large global dimension // Journal of Algebra. – 1997. – №192. – P. 572–591. 5. Zhuravlev V., Zhuravlev D. Tiled Orders of width 3 // Algebra and Discrete Math. – 2009. – Vol.1, №1. – С. 111–123.

Надійшла до редакції 31.10.11

УДК 519.856

М. Андросенко, канд. фіз-мат. наук

### МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛУ З НЕВІДОМОЮ ФУНКЦІЄЮ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНІ

Досліджується задача мінімізації функціоналу, що залежить від невідомої функції розподілу випадкової величини. Доведено твердження про неперервну залежність точки мінімуму функціоналу від функції розподілу.

*Minimization problem of functional depending on unknown distribution function of random variable is studied. Theorem on continuous dependence of minimum point on distribution function is proved.*

#### Вступ

При вивченні економічних систем природним чином виникає задача мінімізації функціоналу, що залежить від функції розподілу деякої випадкової величини. У статті доведено теореми про неперервну залежність точки мінімуму функціоналу від функції розподілу.