Отже, $\overline{m}_{n-1}^{(n)} = m_{12\ldots n} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n \\ A_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Тому $K_n = \ker\xi = M_n^{(n)} \cdot A_n^{(n)} = M_{12\ldots n} \cdot A_n^{(n)}$, де $A_n^{(n)} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ A_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

Очевидно, що $K_n \simeq M_{12\ldots n} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$. Таким чином, маємо короткі точні послідовності

$$0 \to K_2^{(n)} \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \sum M_i \to 0, \qquad 0 \to K_{m+1}^{(n)} \to \bigoplus_{i_1<\ldots<i_m}^{n} M_{i_1\ldots i_m} \to K_m^{(n)} \to 0, \qquad 2 \le m < n-1,$$

$$0 \to K_n^{(n)} \to \bigoplus_{k=1}^{n} (\bigcap_{i\ne k} M_i) \to K_{n-1}^{(n)} \to 0.$$

З комутативної діаграми

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \to K_n^n \to \oplus M_{i_1\ldots i_{n-1}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & \oplus M_{i_1 i_2} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \oplus M_i \to \sum M_i \to 0 \\
& K_{n-1}^{(n)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots & K_3^{(n)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_2^{(n)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \quad \ldots \quad 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

отримуємо точну послідовність $0 \to M_{i_1\ldots i_n} \to \oplus M_{i_1\ldots i_{n-1}} \to \oplus M_{i_1\ldots i_{n-2}} \to \ldots \to \oplus M_{i_1 i_2} \to \oplus M_i \to \sum M_i \to 0.$

Теорему доведено.

Наслідок 2. Нехай Λ – черепичний порядок і $M_1,\ldots,M_n$ – незвідні Λ-модулі. Тоді справедлива точна послідовність модулів та гомоморфізмів

$$0 \to \bigcap_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{k=1}^{n} (\bigcap_{i\ne k} M_i) \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_{k+1}} \bigoplus_{i_1<\ldots<i_k} (M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}) \xrightarrow{f_k} \ldots$$

$$\xrightarrow{f_3} \bigoplus_{i<j} (M_i \cap M_j) \xrightarrow{f_2} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{f_1} \sum_{i=1}^{n} M_i \to 0.$$

4. Висновки

У статті отримано узагальнення точної послідовності цілком розкладних модулів над черепичним порядком, наведеної в [4]. Показано, що для довільних підмодулів $M_1,\ldots,M_n$ дистрибутивного модуля M справедлива точна послідовність модулів і гомоморфізмів

$$0 \to \bigcap_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{k=1}^{n} (\bigcap_{i\ne k} M_i) \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_{k+1}} \bigoplus_{i_1<\ldots<i_k} (M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}) \xrightarrow{f_k} \ldots$$

$$\xrightarrow{f_3} \bigoplus_{i<j} (M_i \cap M_j) \xrightarrow{f_2} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{f_1} \sum_{i=1}^{n} M_i \to 0.$$

1. Fujita H., Sakai Y. Frobenius full matrix algebras and Gorenstein tiled orders // Comm. Algebra. – 2006. – Vol. 34. – P. 1181–1203. 2. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules : In 2 vol. – Kluwer Acad. Publish., 2004. – Vol.1. 3. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules : In 2 vol. – Kluer Acad. Publish., 2004. – Vol.2. 4. Jansen W., Odenthal C. A tiled order having large global dimension // Journal of Algebra. – 1997. – №192. – P. 572-591. 5. Zhuravlev V., Zhuravlev D. Tiled Orders of width 3 // Algebra and Discrete Math. – 2009. – Vol.1, №1. – C. 111-123.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 519.856

М. Андросенко, канд. фіз-мат. наук

МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛУ З НЕВІДОМОЮ ФУНКЦІЄЮ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Досліджується задача мінімізації функціоналу, що залежить від невідомої функції розподілу випадкової величини. Доведено твердження про неперервну залежність точки мінімуму функціоналу від функції розподілу.

Minimization problem of functional depending on unknown distribution function of random variable is studied. Theorem on continuous dependence of minimum point on distribution function is proved.

Вступ

При вивченні економічних систем природним чином виникає задача мінімізації функціоналу, що залежить від функції розподілу деякої випадкової величини. У статті доведено теореми про неперервну залежність точки мінімуму функціоналу від функції розподілу.

Основна частина

Нехай $X \subset R^n, Y \subset R^m$ – компактні множини у відповідних скінченновимірних просторах, $D\left(R^m\right)$ – простір функцій розподілу, що зосереджені на Y з метрикою Леві-Прохорова, який є повним сепарабельним простором [1]. Метрику в R^n будемо позначати через $\|\cdot\|$, а метрику в $D\left(R^m\right)$ – через $\rho(\cdot)$. Вважатимемо, що на прямому добутку цих просторів введена метрика одним із природних способів.

Припустимо, що функціонал $\varphi(x,H)$, де $x \in X, H \in D(R)$, є неперервним за сукупністю змінних та строго опуклим донизу при кожній фіксованій функції H. Ставиться задача

$$\varphi(x,H) \to \min,\ x \in X, \tag{1}$$

де функція розподілу H невідома, але є можливість спостерігати вибірку випадкової величини, яка має цей розподіл.

Розглянемо приклад функціоналу, який залежить від функції розподілу, але множина точок мінімуму якого є незмінною на широкому класі функцій розподілу. Нехай (Ω,F,P) – імовірнісний простір, $f(x,\omega)=\xi(\omega)r(x)+\eta(\omega)$, де $\xi(\omega),\eta(\omega)$ – випадкові величини на Ω, причому $\xi(\omega)>0$. Припустимо, що $\xi(\omega),\eta(\omega)$ мають скінченні математичні сподівання. Для компактної множини $X \subset R$ розглянемо задачу

$$F(x,H_1,H_2) \to \min, x \in X ,$$

де $F(x,H_1,H_2)=Mf(x,\omega)$. Тут $Mf(x,\omega)$ – математичне сподівання величини $f(x,\omega)$, H_1 і H_2, відповідно, функції розподілу випадкових величин $\xi(\omega)$ і $\eta(\omega)$.

Тоді $F(x,H_1,H_2)=r(x)M\xi(\omega)+M\eta(\omega)=\beta r(x)+\gamma$, де β,γ – сталі, причому $\beta>0$. Звідси легко упевнитися, що множина $X=\{x\in X : F(x,H,H)=\min F(x,H,H)\}$ є однією і тією самою для всіх функцій розподілу H_1,H_2 відповідних випадкових величин $\xi(\omega),\eta(\omega)$.

Сформулюємо і доведемо твердження, які є теоретичним підґрунтям при розв'язанні задачі (1). При доведені першого з них буде використана така властивість строго опуклої донизу функції: якщо x_0 – точка мінімуму неперервної строго опуклої донизу функції, то $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$: $\|x_0-x\|<\varepsilon$ як тільки $|f(x_0)-f(x)|<\delta$. Цю властивість назвемо α-властивістю.

Теорема 1. *Нехай x_0 – точка мінімуму функціоналу $\varphi(x,H_0)$, а x_* – точка мінімуму функціоналу $\varphi(x,H_*)$. Тоді $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$ таке, що як тільки $\rho(H_0,H_*)<\delta$, то і $\|x_0-x_*\|<\varepsilon$.*

Доведення. Внаслідок неперервності $\varphi(x,H)$ за сукупністю змінних $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$:

$$\rho(H_0,H_*)<\delta\ \Rightarrow\ |\varphi(x,H_0)-\varphi(x,H_*)|<\varepsilon\ \ \forall x\in X . \tag{2}$$

Якщо розглянути послідовність функцій розподілу $H_k \to H_0, k\to\infty$, то згідно (2) послідовність функцій $\varphi_k(x)=\varphi(x,H_k)$ рівномірно збігається до функції $\varphi_0(x)=\varphi(x,H_0)$, $k\to\infty$. Звідси випливає, що $\min\limits_{x\in X}\varphi_k(x)\to\min\limits_{x\in X}\varphi_0(x)$, $H_k\to H_0$. Отже,

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \rho(H_0,H_*)<\delta\ \Rightarrow\ |\varphi(x_0,H_0)-\varphi(x_*,H_*)|<\varepsilon, \tag{3}$$

причому δ можна вибрати так, щоб одночасно виконувалася умова (2).

Далі $|\varphi(x_1,H_*)-\varphi(x_0,H_0)|\ge|\varphi(x_1,H_*)-\varphi(x_0,H_*)|-|\varphi(x_0,H_*)-\varphi(x_0,H_0)|$. Звідси, враховуючи умови (2) і (3), маємо $|\varphi(x_0,H_*)-\varphi(x_*,H_*)|\le 2\varepsilon$. Як наслідок α-властивості, для строго опуклого донизу функціоналу $\varphi(x,H_*)$ отримуємо, що $\|x_0-x_*\|<\varepsilon'$, причому $\varepsilon'=\varepsilon'(\varepsilon(\delta))\to 0$, $\delta\to 0$. Таким чином, точка мінімуму функціоналу $\varphi(x,H_0)$ неперервно залежить від функції розподілу, що й треба було довести.

Наступне твердження стосується класу неперервних функціоналів.

Нехай X,X дві множини з R^n. Відстанню між такими множинами називається величина $d(X_1,X_2)=\inf\limits_{x_1\in X_1,\,x_2\in X_2}\|x_1-x_2\|$. Позначимо $X_0=\left\{x:\varphi(x,H_0)=\min\limits_{x\in X}\varphi(x,H_0)\right\}$, $X_k=\left\{x:\varphi(x,H_k)=\min\limits_{x\in X}\varphi(x,H_k)\right\}$.

Теорема 2. *Якщо $\varphi(x,H)$ неперервний за сукупністю змінних фунціонал і $\rho(H_k,H_0)\to 0,\ k\to\infty$, то існує така підпослідовність номерів k_l, що $d\left(X_0,X_{k_l}\right)\to 0,\ k_l\to\infty$.*

Доведення. Нехай $H_k\to H_0, k\to\infty$ в метриці Леві-Прохорова. Тоді

$$\min_{x\in X}\varphi(x,H_k)\to\min_{x\in X}\varphi(x,H_0),\ k\to\infty . \tag{4}$$

Внаслідок компактності множини X існує така підпослідовність x_{k_l} деякої послідовності точок глобального мінімуму функціоналів $\varphi\left(x, H_k\right)$, що $x_{k_l} \to x_*$. Покажемо, що x_* є однією з точок глобального мінімуму функціоналу $\varphi\left(x, H_0\right)$. Справді,

$$\left|\min_{x \in X} \varphi\left(x, H_0\right) - \varphi\left(x_*, H_0\right)\right| \le \left|\min_{x \in X} \varphi\left(x, H_0\right) - \varphi\left(x_{k_l}, H_{k_l}\right)\right| + \left|\varphi\left(x_{k_l}, H_{k_l}\right) - \varphi\left(x_*, H_0\right)\right|.$$

Обидва доданки останньої рівності прямують до нуля при $k \to \infty$ внаслідок відповідно (4) та неперервності функціоналу за сукупністю змінних. Отже, $\varphi\left(x_*, H_0\right) = \min_{x \in X} \varphi\left(x, H_0\right)$ і тому $d\left(X, X\right) \to 0,\ k \to \infty$, що й треба було довести.

Висновки

Для випадків строго опуклого та неперервного функціоналу, що залежить від функції розподілу випадкової величини, сформульовано і доведено твердження про неперервну залежність точки мінімуму функціоналу від функції розподілу.

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Надійшла до редколегії 05.09.11

УДК 517.977

А. Сукретна, канд. фіз.-мат. наук
sukretna@gmail.com

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ДИСИПАЦІЄЮ

Для задачі оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для хвильового процесу з дисипацією отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування не виходить на обмеження, та побудовано оптимальний синтез у цьому випадку. Запропоновано закон наближеного усередненого синтезу, що забезпечує близьку до оптимальної поведінку керованої системи.

For optimal control problem with semidefinite quality criterion for wave process with dissipation we receive the conditions under which control isn't beyond the restrictions, and we construct optimal synthesis in this case. We propose approximated homogeneous synthesis law, which provides control system behavior that is closed to optimal one.

Вступ

Задача побудови оптимального керування у формі зворотного зв'язку (або синтезу) для розподілених систем у замкненій формі з одного боку вимагає розв'язку з точки зору практики, а з іншого – не може бути розв'язана в загальному випадку. Практична користь таких задач цілком зрозуміла, оскільки саме керування зі зворотнім зв'язком дає змогу здійснювати гнучке управління різноманітними технологічними процесами, причому це управління можна вибрати оптимальним з точки зору того чи іншого критерію (вартості процесу, використання існуючих ресурсів тощо), а наявність замкнутої формули для керування дозволяє реалізовувати керуючий вплив у реальному часі. Щодо можливості отримання таких керувань з математичної точки зору, то, на жаль, наявні математичні методи, в основі яких лежать метод динамічного програмування Р. Беллмана [1] та метод варіаційних нерівностей Ж.–Л. Ліонса [2], дають змогу довести задачу до кінцевої формули оптимального синтезу лише в окремих випадках. Так при застосуванні методу динамічного програмування ми приходимо до крайових задач для рівнянь типу Ріккаті, а метод варіаційних нерівностей дозволяє побудувати необхідні умови оптимальності в термінах прямої та спряженої задач, залишаючи поза своєю увагою шляхи розв'язання отриманої системи.

У світлі сказаного, побудова закону оптимального синтезу у доведеному до формули вигляді навіть для окремого класу задач оптимального керування розподіленою системою є актуальною задачею, що розв'язується у даній роботі для задачі оптимального керування, в якій керований процес описується крайовою задачею для хвильового рівняння з дисипацією, а критерій якості є напіввизначеним. Робота є продовженням циклу робіт [3 – 6].

Постановка задачі

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon \in (0,1)$ керований процес у циліндрі $\overline{Q_T} = \left[t_0,\ T\right]$ описується крайовою задачею для хвильового рівняння з дисипацією

$$\begin{cases} y_{tt}^{\varepsilon}(x,t) + 2\gamma y_t^{\varepsilon}(x,t) = A^{\varepsilon} y^{\varepsilon}(x,t) + g^{\varepsilon}(x) v(t),\ (x,t) \in \Omega \times \left(t_0, T\right), \\ y^{\varepsilon}(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in \left[t_0, T\right], \\ y^{\varepsilon}\left(x, t_0\right) = \varphi_0^{\varepsilon}(x),\ y_t^{\varepsilon}\left(x, t_0\right) = \varphi_1^{\varepsilon}(x),\ x \in \Omega; \end{cases} \tag{1}$$

де $A^{\varepsilon} := div\left(a^{\varepsilon}\vec{\nabla}\right),\ a^{\varepsilon} = a^{\varepsilon}(x)$ – вимірна симетрична матриця розмірності $n \times n$, яка задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості, $g^{\varepsilon}, \varphi_1^{\varepsilon} \in L_2(\Omega),\ \ \varphi_1^{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega),\ \ \gamma > 0,\ \ t_0 \ge 0,\ \ T > t_0$ – довільні фіксовані моменти часу.

На керування накладені обмеження

$$v \in U = \left\{ v \in L_2\left(t_0, T\right) : \left|v(t)\right| \le \xi \ \text{ м.с. на } \left[t_0, T\right] \right\}. \tag{2}$$