Внаслідок компактності множини X існує така підпослідовність x_{k_l} деякої послідовності точок глобального мінімуму функціоналів $\varphi\left(x,H_k\right)$, що $x_{k_l}\to x_*$. Покажемо, що x_* є однією з точок глобального мінімуму функціоналу $\varphi\left(x,H_0\right)$. Справді,

$$\left|\min_{x\in X}\varphi\left(x,H_0\right)-\varphi\left(x_*,H_0\right)\right|\le\left|\min_{x\in X}\varphi\left(x,H_0\right)-\varphi\left(x_{k_l},H_{k_l}\right)\right|+\left|\varphi\left(x_{k_l},H_{k_l}\right)-\varphi\left(x_*,H_0\right)\right|.$$

Обидва доданки останньої рівності прямують до нуля при $k\to\infty$ внаслідок відповідно (4) та неперервності функціоналу за сукупністю змінних. Отже, $\varphi\left(x_*,H_0\right)=\min\limits_{x\in X}\varphi\left(x,H_0\right)$ і тому $d\left(X,X\right)\to 0,\ k\to\infty$, що й треба було довести.

Висновки

Для випадків строго опуклого та неперервного функціоналу, що залежить від функції розподілу випадкової величини, сформульовано і доведено твердження про неперервну залежність точки мінімуму функціоналу від функції розподілу.

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Надійшла до редколегії 05.09.11

УДК 517.977

А. Сукретна, канд. фіз.-мат. наук
sukretna@gmail.com

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ДИСИПАЦІЄЮ

Для задачі оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для хвильового процесу з дисипацією отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування не виходить на обмеження, та побудовано оптимальний синтез у цьому випадку. Запропоновано закон наближеного усередненого синтезу, що забезпечує близьку до оптимальної поведінку керованої системи.

For optimal control problem with semidefinite quality criterion for wave process with dissipation we receive the conditions under which control isn't beyond the restrictions, and we construct optimal synthesis in this case. We propose approximated homogeneous synthesis law, which provides control system behavior that is closed to optimal one.

Вступ

Задача побудови оптимального керування у формі зворотного зв'язку (або синтезу) для розподілених систем у замкненій формі з одного боку вимагає розв'язку з точки зору практики, а з іншого – не може бути розв'язана в загальному випадку. Практична користь таких задач цілком зрозуміла, оскільки саме керування зі зворотнім зв'язком дає змогу здійснювати гнучке управління різноманітними технологічними процесами, причому це управління можна вибрати оптимальним з точки зору того чи іншого критерію (вартості процесу, використання існуючих ресурсів тощо), а наявність замкнутої формули для керування дозволяє реалізовувати керуючий вплив у реальному часі. Щодо можливості отримання таких керувань з математичної точки зору, то, на жаль, наявні математичні методи, в основі яких лежать метод динамічного програмування Р. Беллмана [1] та метод варіаційних нерівностей Ж.–Л. Ліонса [2], дають змогу довести задачу до кінцевої формули оптимального синтезу лише в окремих випадках. Так при застосуванні методу динамічного програмування ми приходимо до крайових задач для рівнянь типу Ріккаті, а метод варіаційних нерівностей дозволяє побудувати необхідні умови оптимальності в термінах прямої та спряженої задач, залишаючи поза своєю увагою шляхи розв'язання отриманої системи.

У світлі сказаного, побудова закону оптимального синтезу у доведеному до формули вигляді навіть для окремого класу задач оптимального керування розподіленою системою є актуальною задачею, що розв'язується у даній роботі для задачі оптимального керування, в якій керований процес описується крайовою задачею для хвильового рівняння з дисипацією, а критерій якості є напіввизначеним. Робота є продовженням циклу робіт [3 – 6].

Постановка задачі

Нехай $\Omega\subset R^n$ – обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon\in(0,1)$ керований процес у циліндрі $\overline{Q_T}=\left[t_0,\ T\right]$ описується крайовою задачею для хвильового рівняння з дисипацією

$$\begin{cases} y_{tt}^{\varepsilon}(x,t)+2\gamma y_t^{\varepsilon}(x,t)=A^{\varepsilon}y^{\varepsilon}(x,t)+g^{\varepsilon}(x)v(t),\ (x,t)\in\Omega\times\left(t_0,T\right),\\ y^{\varepsilon}(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega,\ t\in\left[t_0,T\right],\\ y^{\varepsilon}\left(x,t_0\right)=\varphi_0^{\varepsilon}(x),\ y_t^{\varepsilon}\left(x,t_0\right)=\varphi_1^{\varepsilon}(x),\ x\in\Omega; \end{cases} \tag{1}$$

де $A^{\varepsilon}:=div\left(a^{\varepsilon}\vec{\nabla}\right),\ a^{\varepsilon}=a^{\varepsilon}(x)$ – вимірна симетрична матриця розмірності $n\times n$, яка задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості, $g^{\varepsilon},\varphi_1^{\varepsilon}\in L_2(\Omega),\ \ \varphi_1^{\varepsilon}\in H_0^1(\Omega),\ \ \gamma>0,\ \ t_0\ge 0,\ \ T>t_0$ – довільні фіксовані моменти часу.

На керування накладені обмеження

$$v\in U=\left\{v\in L_2\left(t_0,T\right):\ \left|v(t)\right|\le\xi\ \text{ м.с. на }\left[t_0,T\right]\right\}. \tag{2}$$

Задача оптимального керування полягає у мінімізації критерію якості

$$J(v)=\alpha\left(\int_{\Omega} q_0^{\varepsilon}(x)y^{\varepsilon}(x,T)dx-\psi_0\right)^2+\beta\left(\int_{\Omega} q_1^{\varepsilon}(x)y_t^{\varepsilon}(x,T)dx-\psi_1\right)^2+\int_{t_0}^{T} v^2(t)dt, \tag{3}$$

де $\alpha,\beta\geq 0,\ \ \alpha+\beta\neq 0,\ \ \psi_0,\psi_1\in R,\ \ q_0^{\varepsilon},q_1^{\varepsilon}\in L_2(\Omega)$.

Відомо, що при довільному керуванні $v\in U$ крайова задача (1) має єдиний розв'язок $y^{\varepsilon}\in C\left(\left[t_0,T\right];\ L_2(\Omega)\right)$ [7]. Крім того, задача оптимального керування (1) – (3) має єдиний розв'язок [2]. У [4, 5] цей розв'язок побудовано у випадку відсутності дисипації ($\gamma=0$).

Побудова оптимального керування зі зворотнім зв'язком

Слідуючи ідеї статей [4, 5], побудуємо оптимальний синтез задачі (1) – (3) у явному вигляді. Для цього спочатку перейдемо від задачі оптимального керування для системи з розподіленими параметрами (1) – (3) до нескінченновимірної задачі оптимального керування в термінах коефіцієнтів Фур'є вихідної задачі.

Введемо до розгляду спектральну задачу

$$\begin{cases} A^{\varepsilon}X+\mu X=0,\ \ x\in\Omega,\\ X(x)=0,\ \ x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{4}$$

Відомо [8], що спектральна задача (4) має послідовність власних чисел $0\leq\left(\lambda_1^{\varepsilon}\right)^2\leq\left(\lambda_2^{\varepsilon}\right)^2\leq\ldots\leq\left(\lambda_k^{\varepsilon}\right)^2\leq\ldots,$ для яких $\left(\lambda_k^{\varepsilon}\right)^2\to\infty,\ k\to\infty,$ при цьому відповідні власні функції $\left\{X_k^{\varepsilon}(x)\right\}_{k=1}^{\infty}\subset H_0^1(\Omega)$ утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\Omega)$ і ортогональний базис у просторі $H_0^1(\Omega)$. Розкладемо всі функції задачі (1) – (3) у ряди Фур'є за власним базисом $\left\{X_k^{\varepsilon}(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\begin{gathered} y^{\varepsilon}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k^{\varepsilon}(t)X_k^{\varepsilon}(x),\quad y_k^{\varepsilon}(t)=\left(y^{\varepsilon}(\cdot,t),X_k^{\varepsilon}\right);\\ g^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad g_k^{\varepsilon}=\left(g^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right);\\ \varphi_0^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{0k}^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad \varphi_{0k}^{\varepsilon}=\left(\varphi_0^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right);\quad \varphi_1^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{1k}^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad \varphi_{1k}^{\varepsilon}=\left(\varphi_1^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right);\\ q_0^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}q_{0k}^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad q_{0k}^{\varepsilon}=\left(q_0^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right);\quad q_1^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}q_{1k}^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad q_{1k}^{\varepsilon}=\left(q_1^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right); \end{gathered} \tag{5}$$

де тут і далі $(\ \cdot,\cdot\ )$ – скалярний добуток у просторі $L_2(\Omega)$.

Зазначимо, що при побудові оптимального керування зі зворотнім зв'язком наявність параметру ε не є суттєвою, тому для спрощення ми опустимо параметр ε у подальших викладках, поновивши його у кінцевій формулі для оптимального синтезу. З урахуванням цього, у термінах коефіцієнтів Фур'є задача оптимального керування (1) – (3) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases}\ddot{y}_k(t)+2\gamma\dot{y}_k(t)+\lambda_k^2y_k(t)=g_kv(t),\\ y_k\left(t_0\right)=\varphi_{0k},\ \dot{y}_k\left(t_0\right)=\varphi_{1k};\end{cases} \tag{6}$$

$$v\in U, \tag{7}$$

$$J(v)=\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty}q_{0k}y_k(T)-\psi_0\right)^2+\beta\left(\sum_{k=1}^{\infty}q_{1k}\dot{y}_k(T)-\psi_1\right)^2+\int_{t_0}^{T}v^2(t)dt\to\inf. \tag{8}$$

Задача (6) – це задача Коші для лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, а тому для всіх $k\geq 1$ і $v\in U$ має єдиний розв'язок. Надалі для скорочення викладок будемо вважати, що виконується нерівність

$$\lambda_1^2>\gamma^2. \tag{9}$$

За умови (9) для довільного $k\geq 1$ характеристичне рівняння для лінійного однорідного рівняння, що відповідає неоднорідному рівнянню в (6), має два комплексно-спряжені корені з ненульовою дійсною частиною $-\gamma$. Зауважимо, що це твердження залишається справедливим для досить великих k і у випадку, якщо нерівність (9) не виконується. Крім того, неважко переконатися у справедливості наступних оцінок

$$\begin{gathered} y_k^2(t)\leq 3\left[\left(1+\frac{\gamma}{\omega_k}\right)^2\varphi_{0k}^2+\frac{1}{\omega_k^2}\varphi_{1k}^2+\frac{1}{2\gamma\omega_k^2}g_k^2\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds\right],\\ \dot{y}_k^2(t)\leq 3\left[\left(\omega_k+\frac{\gamma^2}{\omega_k}\right)^2\varphi_{0k}^2+\left(1+\frac{\gamma}{\omega_k}\right)^2\varphi_{1k}^2+\frac{1}{2\gamma}g_k^2\left(1+\frac{\gamma}{\omega_k}\right)\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds\right]; \end{gathered} \tag{10}$$

де $\omega_k=\sqrt{\lambda_k^2-\gamma^2}$.

Оцінки (10) та рівність Парсеваля дають змогу записати оцінки для розв'язків крайової задачі (1):

$$\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|^2 \le 3\left[\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1^{\varepsilon}}\right)^2\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2+\frac{1}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\left\|\varphi_1^{\varepsilon}\right\|^2+\frac{1}{2\gamma\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\left\|g^{\varepsilon}\right\|^2\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds\right],$$

$$\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le 3\left[2\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\left(2\gamma^2+\frac{2\gamma^3}{\omega_1^{\varepsilon}}+\frac{\gamma^4}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\right)^2\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2+\left(1+\frac{\gamma^2}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\right)\left\|\varphi_1^{\varepsilon}\right\|^2+\frac{1}{2\gamma}\left(1+\frac{\gamma^2}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\right)\left\|g^{\varepsilon}\right\|^2\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds\right], \quad (11)$$

$$\left\|y_t^{\varepsilon}(t)\right\|^2 \le 3\left[\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\left(2\gamma^2+\frac{\gamma^4}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\right)\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2+\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1^{\varepsilon}}\right)^2\left\|\varphi_1^{\varepsilon}\right\|^2+\frac{1}{2\gamma}\left\|g^{\varepsilon}\right\|^2\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1^{\varepsilon}}\right)\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds\right];$$

(тут ми поновили параметр ε). Зауважимо також, що подібні оцінки можна було б отримати для розв'язків крайової задачі (1) безпосередньо (не переходячи до відповідних коефіцієнтів Фур'є).

Повернемось до розв'язання задачі оптимального керування (6) – (8). Використовуючи фундаментальну систему розв'язків лінійних однорідних рівнянь, які відповідають рівнянням в (6), задачу оптимального керування (6) – (8) для нескінченновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь можна звести до еквівалентної задачі оптимального керування, в якій керований процес описується двовимірною системою звичайних диференціальних рівнянь. Дійсно, введемо позначення

$$a_1(t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}q_0^k\left[\left(\cos\left(\omega_k(T-t)\right)+\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right)\right)y_k(t)+\frac{1}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right)\dot{y}_k(t)\right],$$

$$\alpha_1=e^{-\gamma(T-t_0)}\sum_{k=1}^{\infty}q_0^k\left[\left(\cos\left(\omega_k(T-t_0)\right)+\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t_0)\right)\right)\varphi_{0k}+\frac{1}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t_0)\right)\varphi_{1k}\right],$$

$$a_2(t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}q_1^k\left[-\left(\omega_k+\frac{\gamma^2}{\omega_k}\right)\sin\left(\omega_k(T-t)\right)y_k(t)+\left(\cos\left(\omega_k(T-t)\right)-\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right)\right)\dot{y}_k(t)\right], \quad (12)$$

$$\alpha_2=e^{-\gamma(T-t_0)}\sum_{k=1}^{\infty}q_1^k\left[-\left(\omega_k+\frac{\gamma^2}{\omega_k}\right)\sin\left(\omega_k(T-t_0)\right)\varphi_{0k}+\left(\cos\left(\omega_k(T-t_0)\right)-\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t_0)\right)\right)\varphi_{1k}\right],$$

$$b_1(t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_kq_{0k}}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right),\qquad b_2(t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}g_kq_{1k}\left(\cos\left(\omega_k(T-t)\right)-\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right)\right).$$

Тоді задача (6) – (8) еквівалентна наступній задачі оптимального керування для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases}\dot{a}_1(t)=b_1(t)v(t), \quad a_1(t_0)=\alpha_1,\\ \dot{a}_2(t)=b_2(t)v(t), \quad a_2(t_0)=\alpha_2;\\ v\in U,\\ J(v)=\alpha\left(a_1(T)-\psi_0\right)^2+\beta\left(a_2(T)-\psi_1\right)^2+\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds.\end{cases} \quad (13)$$

Зауважимо, що внаслідок оцінок (10) та умов на коефіцієнти задачі оптимального керування (1) – (3), функції та сталі в (12) означені коректно. Крім того, функції $a_1(t)$, $a_2(t)$ допускають почленне інтегрування та диференціювання.

Отримана задача оптимального керування (13) аналогічна тій, що отримується у випадку відсутності дисипації (тобто при $\gamma=0$) [4], і може бути розв'язана за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. В результаті отримуємо керування:

$$u(t)=-\frac{1}{\Delta(t_0)}\left[A(t,t_0)\left(\alpha_1-\psi_0\right)+B(t,t_0)\left(\alpha_2-\psi_1\right)\right], \quad (14)$$

де

$$\Delta(t_0)=\left(1+\alpha\int_{t_0}^{T}b_1^2(s)ds\right)\left(1+\beta\int_{t_0}^{T}b_2^2(s)ds\right)-\alpha\beta\int_{t_0}^{T}b_1(s)b_2(s)ds\ge 1>0,$$

$$A(t,t_0)=\alpha b_1(t)+\alpha\beta b_1(t)\int_{t_0}^{T}b_2^2(s)ds-\alpha\beta b_2(t)\int_{t_0}^{T}b_1(s)b_2(s)ds,$$

$$B(t,t_0)=\alpha b_2(t)+\alpha\beta b_2(t)\int_{t_0}^{T}b_1^2(s)ds-\alpha\beta b_1(t)\int_{t_0}^{T}b_1(s)b_2(s)ds.$$

При виконанні нерівності

$$\frac{\alpha}{\omega_1}\|q_0\|\|g\|\left[1+\frac{\beta}{\gamma}\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1}\right)^2\|q_1\|^2\|g\|^2\right]|\alpha_1-\psi_0|+\beta\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1}\right)\|q_1\|\|g\|\left[1+\frac{\alpha}{\gamma\omega_1^2}\|q_0\|^2\|g\|^2\right]|\alpha_2-\psi_1|\le\xi \quad (15)$$

керування (14) задовольняє обмеження $|u(t)|\le\xi,$ і тому є програмним оптимальним керуванням задачі (13).

Використовуючи граничний перехід Красовського [9], ми можемо на базі програмного оптимального керування (14) побудувати оптимальний синтез для задачі оптимального керування (13):

$$u[t, a_1, a_2]=-\frac{1}{\Delta(t)}\left[A(t,t)(a_1-\psi_0)+B(t,t)(a_2-\psi_1)\right], \quad (16)$$

де $a_1=a_1(t),\ a_2=a_2(t)$ – розв'язки задачі Коші в (13) з керуванням $v(t)=u\left[t, a_1(t), a_2(t)\right],$ що задається формулою (16).

Повертаючись до вихідної задачі оптимального керування (1) – (3) і поновлюючи параметр ε у формулах, приходимо до оптимального синтезу задачі (1) – (3) у випадку відсутності обмежень

$$u\left[t,\ y^\varepsilon\right]=-\frac{1}{\Delta^\varepsilon(t)}\Big[\Big(A^\varepsilon(t,t)R_{11}^\varepsilon(\cdot,t)+B^\varepsilon(t,t)R_{12}^\varepsilon(\cdot,t),\ y^\varepsilon(\cdot,t)\Big)+\Big(A^\varepsilon(t,t)R_{21}^\varepsilon(\cdot,t)+B^\varepsilon(t,t)R_{22}^\varepsilon(\cdot,t),\ y_t^\varepsilon(\cdot,t)\Big)\Big]+$$
$$+\frac{A^\varepsilon(t,t)\psi_0+B^\varepsilon(t,t)\psi_1}{\Delta^\varepsilon(t)}, \quad (17)$$

де

$$R_{11}^\varepsilon(x,t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}q_{0k}^\varepsilon\left[\cos\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)+\frac{\gamma}{\omega_k^\varepsilon}\sin\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)\right]X_k^\varepsilon(x),$$
$$R_{12}^\varepsilon(x,t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_{0k}^\varepsilon}{\omega_k^\varepsilon}\sin\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)X_k^\varepsilon(x),$$
$$R_{21}^\varepsilon(x,t)=-e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}q_{1k}^\varepsilon\left(\omega_k^\varepsilon+\frac{\gamma^2}{\omega_k^\varepsilon}\right)\sin\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)X_k^\varepsilon(x), \quad (18)$$
$$R_{22}^\varepsilon(x,t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}q_{1k}^\varepsilon\left[\cos\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)-\frac{\gamma}{\omega_k^\varepsilon}\sin\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)\right]X_k^\varepsilon(x),$$

$y^\varepsilon=y^\varepsilon(x,t)$ – розв'язок крайової задачі (1) з керуванням $v(t)=u\left[t,\ y^\varepsilon\right].$

Зауважимо, що всі ряди в (18) означені коректно та визначають функції наступних класів: $R_{11}^\varepsilon\in C\big([t_0,T];\ L_2(\Omega)\big),$ $R_{12}^\varepsilon\in C\Big([t_0,T];\ H_0^1(\Omega)\Big),$ $R_{21}^\varepsilon\in C\Big([t_0,T];\ H^{-1}(\Omega)\Big),$ $R_{22}^\varepsilon\in C\big([t_0,T];\ L_2(\Omega)\big).$

Наближений усереднений синтез

З формули (17) для оптимального керування зі зворотнім зв'язком задачі (1) – (3) видно, що коефіцієнти цього синтезу записуються у вигляді нескінченних рядів, що не є зручним для практичних обчислень у реальному часі. Крім того, наявність параметру $\varepsilon,$ який може входити у оператор A^ε крайової задачі (1) нерегулярно, також може суттєво ускладнювати ці обчислення. Тому природно виникає задача побудови наближеного керування зі зворотнім зв'язком, яке б реалізувало близьку (в сенсі критерію якості (3)) поведінку керованої системи (1).

Надалі будемо вимагати виконання припущення.

Припущення. *Нехай мають місце наступні збіжності коефіцієнтів задачі оптимального керування (1) – (3):*

$$g^\varepsilon\to g^0,\ \varphi_0^\varepsilon\to\varphi_0^0,\ \varphi_1^\varepsilon\to\varphi_1^0,\ q_0^\varepsilon\to q_0^0,\ q_1^\varepsilon\to q_1^0\ \textit{ слабко в } L_2(\Omega)\ \textit{ при } \varepsilon\to 0;$$
$$a^\varepsilon\to a^0\ \textit{ при } \varepsilon\to 0\ \textit{ в сенсі } G\textit{-збіжності матриць} \quad (19)$$

(стосовно G-збіжності матриць див. [10])

Введемо до розгляду усереднений оператор $A^0=div\left(a^0\vec{\nabla}\right).$ Нехай $\left\{\left(\lambda_k^0\right)^2\right\}_{k=1}^{\infty}$ та $\left\{X_k^0(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ – власні значення та відповідні їм власні функції спектральної задачі (4) з оператором $A^0,$ причому вважатимемо, що спектр усередненого оператора A^0 простий, тобто

$$0\le\left(\lambda_1^\varepsilon\right)^2<\left(\lambda_2^\varepsilon\right)^2<\ldots<\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2<\ldots. \quad (20)$$

Тоді задача оптимального керування (1) – (3) визначена також і при $\varepsilon=0.$

Побудуємо наближений усереднений синтез задачі оптимального керування (1) – (3) за наступним правилом: у формулі (17) в коефіцієнтах $A^\varepsilon,\ B^\varepsilon,\ R_{ij}^\varepsilon\ (i,j=1,2)$ формально замінимо всі ряди на скінченні суми за k від 0 до N, числа $\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2$ на $\left(\lambda_k^0\right)^2$ та всі коефіцієнта Фур'є за ортонормованою системою $\left\{X_k^\varepsilon(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ на коефіцієнти Фур'є за системою $\left\{X_k^0(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ відповідних граничних функцій з припущення (19). Отримаємо деяке керування $v_N\left[t,\ z_N^\varepsilon\right],$ де z_N^ε – розв'язок крайової задачі (1) з керуванням $v(t)=v_N\left[t,\ z_N^\varepsilon\right].$

Коректність запропонованого наближеного усередненого синтезу обґрунтовує теорема.

Теорема. *Нехай* $q_0^\varepsilon, q_1^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $g^\varepsilon, \varphi_1^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *справедливі оцінки* $\left\|g^\varepsilon\right\| \le \sigma$, $\left\|\varphi_1^\varepsilon\right\|_{H_0^1(\Omega)} \le \phi_1$, $\left\|\varphi_0^\varepsilon\right\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \le \phi_0$ *при* $\varepsilon \in [0,1)$ *та виконуються припущення (9), (15), (19), (20). Тоді оптимальне керування зі зворотнім зв'язком задачі (1) – (3) має вигляд (17) та справджуються наступні оцінки близькості між оптимальним синтезом* $u^\varepsilon\left[t,\ y^\varepsilon\right]$ *і побудованим наближеним усередненим синтезом* $v_N\left[t,\ z_N^\varepsilon\right]$: *для довільного малого* $\eta > 0$ *знайдуться такі* $N_0 \ge 1$ *та* $\varepsilon_0 > 0$, *що для довільних* $N \ge N_0$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *виконуються нерівності*

$$\left|v_N\left[t,\ z_N^\varepsilon\right] - u^\varepsilon\left[t,\ y^\varepsilon\right]\right| < \eta \text{ для всіх } t \in [t_0, T],$$

$$\left\|z_N^\varepsilon(\cdot,t) - y^\varepsilon(\cdot,t)\right\|_{H_0^1(\Omega)} < \eta \text{ для всіх } t \in [t_0, T],$$

$$\left|J\left(v_N\left[t,\ z_N^\varepsilon\right]\right) - J\left(u^\varepsilon\left[t,\ y^\varepsilon\right]\right)\right| < \eta.$$

З урахуванням оцінок (11), вигляду наближеного усередненого синтезу $v_N\left[t,\ z_N^\varepsilon\right]$ та формули для оптимального синтезу (17) доведення цієї теореми може бути проведене подібно до [4].

Зазначимо, що аналогічно [5] можна розглянути випадок виходу керування на обмеження $\pm\xi$. Однак оскільки наявність дисипації суттєво ускладнює вигляд коефіцієнтів у керуванні (14), то рівняння для визначення точки переключення, а також питання про кількість точок переключення потребують окремого вивчення, що буде предметом наступних досліджень.

Висновки

У роботі розглянуто задачу оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для хвильового рівняння з дисипацією. Використовуючи метод Фур'є з подальшою заміною вихідної задачі оптимального керування розподіленою системою еквівалентною задачею оптимального керування для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування не виходить на обмеження, та побудовано оптимальне керування у формі зворотного зв'язку (синтезу) у цьому випадку. На базі побудованого оптимального синтезу сконструйовано наближений усереднений синтез, який з практичної точки зору має ряд переваг, та обґрунтовано коректність цього синтезу, тобто показано, що наближений синтез реалізує близьке до оптимального значення цільового функціоналу та траєкторії системи.

1. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с. 2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с. 3. Капустян Е.А., Наконечный А.Г. Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 44 – 57. 4. Капустян О.В., Сукретна А.В. Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 612 – 620. 5. Сукретна А.В. Обмежений наближений синтез оптимального керування для хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 8. – С. 1094 – 1104. 6. Сукретна А.В. Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічного процесу // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – 22. – С. 50 – 55. 7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с. 8. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. – New York, 1997. 9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с. 10. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физ.-мат. лит., 1993. – 464 с.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 620.179

В. Богданов, канд. фіз.-мат. наук, Г. Сулим, д-р фіз.-мат. наук
e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

ДИНАМІЧНИЙ РОЗВИТОК ТРІЩИНИ У КОМПАКТНОМУ ЗРАЗКУ ЗА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ ПЛОСКОГО ДЕФОРМОВАНОГО І НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ ІЗ РОЗВАНТАЖЕННЯМ МАТЕРІАЛУ

З використанням різницевих методів досліджується плоский деформований і напружений стани відповідно товстого і тонкого компактного зразка із врахуванням процесу розвантаження матеріалу для визначення в'язкості руйнування (тріщиновитримності) в нестаціонарній пружно-пластичній постановці з урахуванням підростання тріщини за навантаження, яке прикладено до локалізованої області та змінюється з часом за лінійним законом. Тріщина підростає за умови відсутності максимальних напружень в області вістря тріщини. Виявлено особливості зміни напружень.

On the base of developed method of solving problems of planar deformation and stress states in non-stationary plastic-elastic model with the counting of the process of unloading of the material the problems of crack cleavage were solved when non-stationary pressure is applied. The non-stationary pressure time dependence is linear and area of that pressure has not changed. The crack is growing when maximal stresses in the area of top of crack are absent. There were determined dependences of plastic and elastic deformation energies and areas of plastic deformations for different values of stress intensity.

1. Вступ

У працях [2-9] запропоновано для аналізу процесів руйнування застосувати поряд із експериментальними також і розрахункові методи із використанням динамічної пружно-пластичної моделі матеріалу. У [6] розв'язано задачу плоского деформованого стану. Просторовий напружено-деформований стан матеріалу визначається в [3]. У [4] розв'язано задачу плоского напруженого стану з тріщиною, що рухається за умови відсутності максимальних напружень на вістрі тріщини. У [5] і [7] розглянуто плоскі задачі відповідно напруженого і деформованого стану з