

Коректність запропонованого наближеного усередненого синтезу обґрунтовує теорема.

**Теорема.** Нехай  $q_0^\varepsilon, q_1^\varepsilon \in L_2(\Omega)$ ,  $g^\varepsilon, \varphi_1^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\varphi_0^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , справедливі оцінки  $\|g^\varepsilon\| \leq \sigma$ ,  $\|\varphi_1^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \phi_1$ ,

$\|\varphi_0^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)} \leq \phi_0$  при  $\varepsilon \in (0,1)$  та виконуються припущення (9), (15), (19), (20). Тоді оптимальне керування  $z^\varepsilon$  зворотнім зв'язком задачі (1) – (3) має вигляд (17) та справджуються наступні оцінки близькості між оптимальним синтезом  $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$  і побудованим наближеним усередненим синтезом  $v_N[t, z_N^\varepsilon]$ : для довільного малого  $\eta > 0$  знайдуться такі  $N_0 \geq 1$  та  $\varepsilon_0 > 0$ , що для довільних  $N \geq N_0$  і  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  виконуються нерівності

$$\|v_N[t, z_N^\varepsilon] - u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]\| < \eta \text{ для всіх } t \in [t_0, T],$$

$$\|z_N^\varepsilon(\cdot, t) - y^\varepsilon(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} < \eta \text{ для всіх } t \in [t_0, T],$$

$$|J(v_N[t, z_N^\varepsilon]) - J(u^\varepsilon[t, y^\varepsilon])| < \eta.$$

З урахуванням оцінок (11), вигляду наближеного усередненого синтезу  $v_N[t, z_N^\varepsilon]$  та формули для оптимального синтезу (17) доведення цієї теореми може бути проведене подібно до [4].

Зазначимо, що аналогічно [5] можна розглянути випадок виходу керування на обмеження  $\pm \xi$ . Однак оскільки наявність дисипації суттєво ускладнює вигляд коефіцієнтів у керуванні (14), то рівняння для визначення точки переключення, а також питання про кількість точок переключення потребують окремого вивчення, що буде предметом наступних досліджень.

### Висновки

У роботі розглянуто задачу оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для хвильового рівняння з дисипацією. Використовуючи метод Фур'є з подальшою заміною вихідної задачі оптимального керування розподіленою системою еквівалентною задачею оптимального керування для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування не виходить на обмеження, та побудовано оптимальне керування у формі зворотного зв'язку (синтезу) у цьому випадку. На базі побудованого оптимального синтезу сконструйовано наближений усереднений синтез, який з практичної точки зору має ряд переваг, та обґрунтовано коректність цього синтезу, тобто показано, що наближений синтез реалізує близьке до оптимального значення цільового функціоналу та траєкторії системи.

1. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с. 2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с. 3. Капустян Е.А., Наконечный А.Г. Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 44 – 57. 4. Капустян О.В., Сукретна А.В. Усредненный синтез оптимального управления для хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 612 – 620. 5. Сукретна А.В. Обмежений наближений синтез оптимального керування для хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 8. – С. 1094 – 1104. 6. Сукретна А.В. Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболического процесу // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. – 2009. – 22. – С. 50 – 55. 7. Ладьяженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с. 8. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. – New York, 1997. 9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с. 10. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физ.-мат. лит., 1993. – 464 с.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 620.179

В. Богданов, канд. фіз.-мат. наук, Г. Сулим, д-р фіз.-мат. наук  
e-mail: vladislav\_bogdanov@hotmail.com

## ДИНАМІЧНИЙ РОЗВИТОК ТРІЩИНИ У КОМПАКТНОМУ ЗРАЗКУ ЗА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ ПЛОСКОГО ДЕФОРМОВАНОГО І НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ ІЗ РОЗВАНТАЖЕННЯМ МАТЕРІАЛУ

*З використанням різницевих методів досліджується плоский деформований і напружений стани відповідно товстого і тонкого компактного зразка із врахуванням процесу розвантаження матеріалу для визначення в'язкості руйнування (тріщиновитримності) в нестационарній пружно-пластичній постановці з урахуванням підростання тріщини за навантаження, яке прикладено до локалізованої області та змінюється з часом за лінійним законом. Тріщина підростає за умови відсутності максимальних напружень в області вістря тріщини. Виявлено особливості зміни напружень.*

*On the base of developed method of solving problems of planar deformation and stress states in non-stationary plastic-elastic model with the counting of the process of unloading of the material the problems of crack cleavage were solved when non-stationary pressure is applied. The non-stationary pressure time dependence is linear and area of that pressure has not changed. The crack is growing when maximal stresses in the area of top of crack are absent. There were determined dependences of plastic and elastic deformation energies and areas of plastic deformations for different values of stress intensity.*

### 1. Вступ

У працях [2-9] запропоновано для аналізу процесів руйнування застосувати поряд із експериментальними також і розрахункові методи із використанням динамічної пружно-пластичної моделі матеріалу. У [6] розв'язано задачу плоского деформованого стану. Просторовий напружено-деформований стан матеріалу визначається в [3]. У [4] розв'язано задачу плоского напруженого стану з тріщиною, що рухається за умови відсутності максимальних напружень на вістрі тріщини. У [5] і [7] розглянуто плоскі задачі відповідно напруженого і деформованого стану з

тріщиною, що рухається за локальним критерієм крихкого руйнування. У [2], [8] і [9] в'язкість руйнування визначено відповідно на основі розв'язку плоского напруженого стану, плоского деформованого стану і просторової задач за припущення, що тріщина є нерухомою. Запропоновані моделі дали можливість істотно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів. У [13] визначено напружено-деформований стан жорсткопластичної криволінійної пластини змінної товщини з довільним отвором при динамічному навантаженні.

У цьому дослідженні на відміну від задачі [4] динамічного розвитку тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану враховується процес розвантаження матеріалу.

**2. Математичне формулювання задачі**

Розглядається деформування компактного (балкового) зразка у формі прямокутника  $\Sigma = L \times B$  ( $-L/2 \leq x \leq L/2$ ;  $0 \leq y \leq B$ ) з пропилом-тріщиною початкової довжини  $l = l_0$  уздовж відрізка  $\{x = 0; 0 \leq y \leq l_0\}$  що контактує з двома нерухомими опорами уздовж  $\{L_* \leq |x| \leq L_* + a; y = 0\}$ . У разі плоского деформованого стану вважаємо, що товщина  $w$  зразка є настільки великою, що можна використовувати залежності плоского деформованого стану ( $\sigma_{zz} = \text{const}$ ,  $\sigma_{xz} = 0$ ,  $\sigma_{yz} = 0$ ). У разі ж плоского напруженого стану вважаємо, що товщина  $w$  зразка вважається настільки малою, щоб можна було використовувати залежності плоского напруженого стану ( $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\sigma_{xz} = 0$ ,  $\sigma_{yz} = 0$ ).

Зверху на тіло падає абсолютно жорсткий ударник, що контактує уздовж відрізка  $\{|x| \leq A; y = B\}$ . Його дію на тіло замінимо рівномірно розподіленим в області контакту нормальним напруженням  $-P$ , що змінюється з часом як лінійна функція  $P = p_{01} + p_{02}t$ . З огляду на симетрію процесу деформування відносно лінії  $x = 0$  далі розглядається лише права частина поперечного перерізу (рис. 1а). Вважаємо, що матеріал є пружно-пластичним із зміцненням, причому розрахунок полів напружень, деформацій та їхніх приростів, зокрема й приростів інтенсивності пластичних  $d\epsilon_i^p$ , а також параметра Одквіста  $\kappa = \int d\epsilon_i^p$  буде нижче здійснюватися на основі числового розв'язування відповідної динамічної пружно-пластичної задачі. При розрахунку динамічних полів напружень і деформацій не враховуємо взаємодії хвильових полів, відбиття від межі тіла і можливої при цьому контактної взаємодії між берегами розрізу.

Розглядаються рівняння плоскої динамічної теорії, для якої компоненти вектора зміщень  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші, а рівняння руху середовища густиною  $\rho$  мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.$$

Крайові умови задачі, які враховують зміну довжини тріщини, однак виходять із припущення про незмінність області прикладання реакції, розташування опор, а також визначення опорних реакцій за допомогою методів статички, запишуться так:

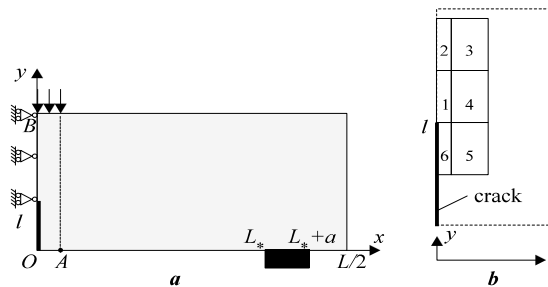


Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 0 < y < l: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ x = 0; \quad l < y < B: & \quad u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ x = L/2, \quad 0 < y < B: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = 0, \quad 0 < x < L_*: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = 0, \quad L_* < x < L_* + a: & \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = 0, \quad L_* + a < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = B, \quad 0 < x < A: & \quad \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = B, \quad A < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Початкові умови мають вигляд

$$u_x|_{t=0} = 0, \quad u_y|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_x|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_y|_{t=0} = 0, \quad l|_{t=0} = l_0, \tag{2}$$

У основу визначальних співвідношень механічної моделі покладено теорію неізотермічного пластичної течії середовища із зміцненням за умови текучості Губера – Мізеса. Ефектами повзучості і температурним розширенням

нехтуємо [15]. Тоді, вважаючи компоненти тензора деформацій сумою його пружних і пластичних складових [1], отримаємо для них

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \varphi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda. \quad (3)$$

Тут  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$  – компоненти девіатора тензора напружень;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $G$  – модуль зсуву;  $K_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$ ,  $K = 3K_1$  – модуль об'ємного стиску, що зв'язує у співвідношенні  $\varepsilon = K\sigma + \varphi$  об'ємне розширення  $3\varepsilon$  (температурне розширення  $\varphi \equiv 0$ );  $E$  – модуль пружності;  $\nu$  – коефіцієнт Пуасона;  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$  – середнє напруження;  $d\lambda$  – деяка скалярна функція, що визначається умовою пластичності (формою поверхні навантаження) і з огляду на згаданий вище його вибір квадратично залежить від компонент девіатора напружень  $s_{ij}$  [15].

Матеріал зміцнюється з коефіцієнтом зміцнення  $\eta^*$  [12]:

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0}\right)^{\eta^*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}, \quad T_0 = 20^\circ \text{C}, \quad (4)$$

де  $\sigma_S(T)$  – межа текучості після зміцнення матеріалу за температури  $T$ .

Перепишемо (3) у розгорнутій формі:

$$d\varepsilon_{xx} = d\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{xx} - \sigma)d\lambda, \quad d\varepsilon_{yy} = d\left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{yy} - \sigma)d\lambda, \\ d\varepsilon_{zz} = d\left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{zz} - \sigma)d\lambda, \quad d\varepsilon_{xy} = d\left(\frac{\sigma_{xy}}{2G}\right) + \sigma_{xy}d\lambda, \quad (5)$$

$$d\lambda = \left\{ 0, (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T) < 0); \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, (f = 0, df = 0) \right\}, \quad (6)$$

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left( (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2 \right)^{1/2},$$

де  $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{xy}^2 \right)^{1/2}$  – у випадку плоскої деформації,

$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx})^2 + (\sigma_{yy})^2 + 6\sigma_{xy}^2 \right)^{1/2}$  – у випадку плоского напруженого стану.

На відміну від традиційної плоскої деформації, коли  $\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \text{const}$ , для уточненого опису деформування зразка з урахуванням можливого приросту поздовжнього видовження  $\Delta\varepsilon_{zz}$  подамо його у вигляді [1, 6, 8]

$$\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \Delta\varepsilon_{zz}^0 + \Delta\chi_x x + \Delta\chi_y y, \quad (7)$$

де невідомі  $\Delta\chi_x$  і  $\Delta\chi_y$  характеризують згин призматичного тіла (яке моделює в механіці деформівного твердого тіла стан плоскої деформації) в площинах  $Ozx$  і  $Ozy$  відповідно, а  $\Delta\varepsilon_{zz}^0$  – прирости за згаданого згину деформації вздовж волокон  $x = y = 0$ .

### 3. Схема розв'язування задачі.

Нехай нестационарна взаємодія відбувається в інтервалі часу  $t \in [0, t_*]$ . Як і в [6, 7, 9] у разі плоскої деформації та аналогічно [2, 4, 5] у разі плоского напруженого стану із використанням для числового інтегрування за часом квадратурної формули Грегорі [16] порядку  $m_1 = 3$  з коефіцієнтами  $D_n$ , отримуємо вирази для напружень і приростів деформацій

Для врахування фізичної нелінійності застосовується метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [2, 4–7, 9]:

$$\psi^{(n+1)} = \left\{ \psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G} (Q_i < -Q); \psi^{(n)} (|Q_i| < Q); \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(T)} (Q_i > Q) \right\}, \quad (8)$$

$$Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T), \quad \psi = 1/(2G) + \Delta\lambda.$$

де  $Q$  – найбільше відхилення інтенсивності напружень від зміцненої межі текучості; емпірична стала  $0 \leq p \leq 1$  визначається для різних типів матеріалів.

Інтенсивність напружень і деформацій, що використовуються вище, визначено для кожної елементарної комірки із числового розв'язку. Незалежним параметром, який характеризує процес навантаження, є час  $t_k = k\Delta t$ , а відтак і відповідна цьому моменту часу сила  $F = 2AP$  контактної взаємодії ударника зі зразком. Оскільки в механіці руйну-

вання в'язкість руйнування (тріщиновитримність) переважно отримують у квазістатичних експериментах та зіставляють її із граничним значенням коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН)  $K_I$ , отриманим із пружного розв'язку, то для опису зміни окремих характеристик в ролі незалежного параметра (змінної) будемо вважати наближене значення КІН  $K_I^e$  (нижче називатимемо його пружним КІН) для багатьох залежностей для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною [14]:

$$K_I^e = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left( 1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left( \frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left( \frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left( \frac{l}{B} \right)^4 \right). \quad (9)$$

Більш вірогідним є використання локального критерію крихкого руйнування: якщо в комірці 1 головне напруження  $\sigma_1$  досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування  $S_C(\kappa) = [C_1 + C_2 \exp(-A_d \kappa)]^{-1/2}$  за умови, що ефективне напруження  $\sigma_{eff} = \sigma_i - \sigma_{02}$  при  $\sigma_{02}(T) = a_1 - c(T + 273) + b \exp(-h(T + 273))$  не є від'ємним, то вважається, що ця комірка руйнується [1], довжина тріщини збільшується на висоту цієї комірки і відбувається перебудова сітки так, щоби біля вістря тріщини знову була комірка 1. Параметри  $a_1, c, b, h, C_1, C_2, A_d$  цих залежностей характеризують властивості досліджуваного полікристалічного матеріалу. Для визначення актуальної довжини  $l$  тріщини у кожний розглядуваний момент часу використовувався такий алгоритм. Якщо найбільші значення будь-яких напружень з'являлися не в комірці 1, а в комірці 2, то тріщина просувається на одну комірку вверх. Комірка 2 стає коміркою 1. Всі напруження перераховувалися для збільшеної тріщини. Так робилося поки всі найбільші напруження не знаходилися в комірці 1. Процес розвантаження матеріалу відбувався за таким алгоритмом: якщо в будь-якій комірці абсолютне значення напруження ставало меншим ніж максимальне значення, то пластичні деформації далі не збільшуються і зміцнення матеріалу припиняється. Знов пластичні деформації починають збільшуватися і зміцнення матеріалу продовжується, коли абсолютне значення напружень перевищує максимальні значення.

#### 4. Числова реалізація

Для розрахунків математичної моделі компактного зразка із сталі 15X2НМФА застосовано метод скінчених різниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей  $Ox$  ( $N$  елементів) і  $Oy$  ( $M$  елементів). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Характерний розмір комірок в радіусі 1-2 мм від вершини тріщини дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу (0,05 мм). Використання методу скінчених різниць обґрунтовується в [10], причому забезпечується точність розрахунків з похибкою не більше ніж  $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$ . Розбиття за часом рівномірне.

Результати розрахунків середніх напружень у комірках поблизу вістря тріщини за відносно невеликих навантажень, коли у дискретизованій задачі пластичні деформації відсутні, зіставлялися із розрахованими для центру комірки на основі класичних одночленних асимптотичних залежностей п. 1.2 [14] з використанням КІН (9). Для комірок 1, 6 (див. рис. 1б) при  $x = 0,01$  мм,  $y = 3 \pm 0,04$  мм різниця не перевищувала 0,3%.

На рис. 2 – 4 відображено результати обчислення деяких важливих для механіки руйнування величин за таких значень параметрів: коефіцієнт зміцнення матеріалу  $\eta_* = 0,05$ ;  $L = 60$  мм;  $B = 10$  мм;  $l = 3$  мм;  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  с;  $A = 2,5$  мм;  $p_{01} = 8$  МПа;  $p_{02} = 10$  МПа;  $M = 60$ ;  $N = 77$ . Найменший крок розбиття дорівнював 0,02 мм, а найбільший 2,6 мм ( $\Delta x_{min} = 0,02$  мм;  $\Delta y_{min} = 0,04$  мм (лише перший шар);  $\Delta x_{max} = 2,6$  мм;  $\Delta y_{max} = 0,6$  мм),  $T = 50^\circ$ .

Графіки розрахованої залежності від КІН  $K_I^e$  середніх напружень на продовженні осі включення біля його вістря (комірка 1 на схемі рис. 1б) двовимірної моделі компактного зразка (рис. 2) свідчать, що напруження для задач плоского деформованого стану із розвантаженням матеріалу (суцільні лінії) і без розвантаження (пунктирні лінії) відрізняються, коли значення пружного КІН  $K_I^e$  перевищує рівень  $K_{I*}^e = K_{Ic}^e = 99,6$  МПа $\sqrt{м}$ . Суцільна, суцільна з трикутником, суцільна з хрестиком і суцільна з кружечком лінії стосуються відповідно напружень  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ , напруження текучості  $\sigma_S$  та інтенсивність напружень  $\sigma_i$  для задачі із врахуванням процесу розвантаження. Пунктирна, пунктирна з трикутником, пунктирна з хрестиком і пунктирна з кружечком лінії стосуються відповідно таких же напружень, але для задачі без розвантаження матеріалу.

Обчислення виявили, що при температурі зразка  $T = 50^\circ \text{C}$  тріщина починала збільшуватися в разі перевищення пружним КІН рівня  $K_I^e = K_{Ic}^e \equiv 60,1$  МПа $\sqrt{м}$ , а починаючи (рис. 3) із значення  $K_I^e = 117,8$  МПа $\sqrt{м}$  довжина тріщини для задачі плоскої деформації із врахуванням процесу розвантаження матеріалу (суцільна лінія) зростає швидше ніж для відповідної задачі без розвантаження.

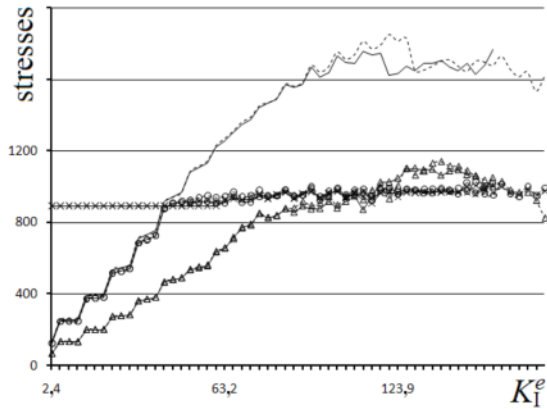


Рис. 2. Залежність напруження у комірці 1 на продовженні осі тріщини від  $K_I^e$

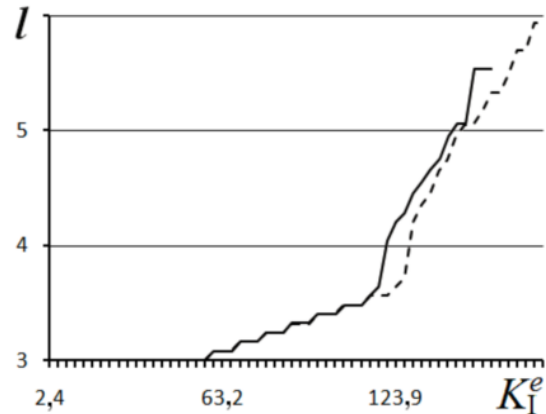


Рис. 3. Залежність довжини тріщини  $l$  від  $K_I^e$

Обчислення залежності параметра Одквіста  $\kappa$ , який характеризує накопичену у комірці 1 (безпосередньо перед вистрям тріщини) пластичну деформацію від  $K_I^e$  із врахуванням розвантаження матеріалу (суцільна лінія) і без розвантаження (пунктирна лінія) відображає рис. 4. Поки деформування є пружним  $\kappa=0$ . Потім у комірці 1 починають монотонно накопичуватися пластичні деформації і у момент, коли тріщина робить перший стрибок, відбувається зміна розташування комірки 1 у зону з меншими значеннями параметра  $\kappa$  (значення  $\kappa$  стрибком зменшується) і знову йде процес накопичення  $\kappa$ . Через це при перевищенні пружним КІН значення  $K_{Ic}^e$  зміна  $\kappa$ , а разом із тим і величина накопиченої в комірці 1 пластичної деформації має осциляційний (немонотонний) характер.

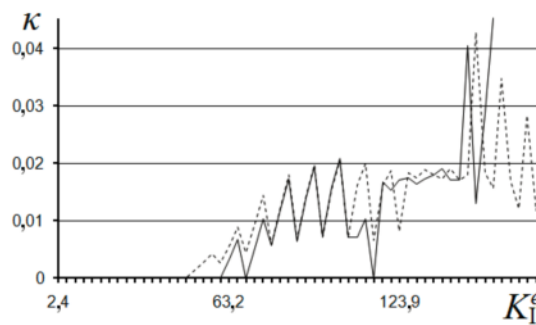


Рис. 4. Залежність параметра Одквіста  $\kappa$  від КІН  $K_I^e$  у комірці 1

Напруження, довжина тріщини і параметр Одквіста для задач плоского напруженого стану із врахуванням процесу розвантаження матеріалу і без розвантаження практично співпадають.

### 5. Висновки

Розв'язування задач плоского деформованого і напруженого станів для компактного зразка для визначення в'язкості руйнування на трітійому згин у динамічному пружно-пластичному формулюванні з врахуванням процесів підростання тріщини і розвантаження матеріалу дає можливість набагато точніше визначити поля пластичних деформацій і напружень, аніж при розв'язуванні квазістатичних пружно-пластичних задач плоского деформованого і напруженого станів, а також дає можливість адекватно моделювати процес розповсюдження тріщини.

1. Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г. Теория пластичности.– М.: Металлургия, 1987. – 352 с. 2. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісник Київського Київ. нац. ут-ту ім. Т.Г.Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56. 3. Богданов В.Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського Київ. нац. ут-ту ім. Т.Г.Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 51–56. 4. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київ. нац. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54. 5. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделювання руху тріщини на основі чисельного розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісник Львівського нац. ут-ту ім. І.Франка. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204. 6. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упругопластических деформаций при динамическом нагружении // Теоретическая и прикладная механика, Донецьк. – 2010. – № 47. – С. 59–66. 7. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделирование подростания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // Збірник наукових праць "Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій", Дніпропетровськ. – 2011. – № 15. – С. 33–44. 8. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского деформованого стану // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 16–24. 9. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Міжнародний науково-технічний збірник "Надійшла до редакції 17.10.11"