УДК 517.98

В. Романенко, асист., А. Чайковський, доц.
e-mail: Romvik13@ukr.net, ChaikovskiyAV@ukr.net

НАБЛИЖЕННЯ ОБМЕЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАРШОГО ПОРЯДКУ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗАДАЧ КОШІ

Доведено, що обмежений розв'язок деякого абстрактного диференціального рівняння старшого порядку можна на заданому відрізку наблизити розв'язками відповідних задач Коші.

It is proved that bounded solution of the abstract differential equation of higher order could be approximated on the given segment by solutions of corresponding Cauchy problems.

1. Вступ

У статті досліджено питання апроксимації обмеженого на всій осі розв'язку лінійного диференціального рівняння довільного порядку в банаховому просторі вигляду

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^{(k)}(t) + y(t),\ t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

розв'язками задач Коші з нульовими початковими умовами на заданому відрізку. Точність наближення визначається властивостями операторних коефіцієнтів та початковими точками для задач Коші. Отримані результати узагальнюють твердження з [1], для випадку рівняння першого порядку.

2. Основні результати

Нехай $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір, $L(\mathbf{B})$ – множина лінійних неперервних операторів в $\mathbf{B}$, $\{A_k : 0 \le k \le n-1\} \subset L(\mathbf{B})$, оператори $A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ попарно комутують. Позначимо також $T := \{it : t \in \mathbf{R}\}$.

Лема 1. Нехай виконується умова:

$$\forall z \notin T\ \exists \left(z^n I - \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k \right)^{-1} \in L(\mathbf{B}).$$

Тоді для довільної обмеженої на осі неперервної функції $y : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$ існує єдиний обмежений разом з усіма похідними до $m-1$ порядку розв'язок $x \in C^m(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ диференціального рівняння (1).

Доведення. Позначимо через $\mathbf{B}^m$ декартів добуток m екземплярів простору $\mathbf{B}$; $\mathbf{B}^m$ – комплексний банахів простір з покоординатним додаванням і множенням на скаляр та нормою

$$\|\overline{z}\|_m := \max_{1 \le k \le m} \|z_k\|,\quad \overline{z} = (z_1, ..., z_m) \in \mathbf{B}^m.$$

З урахуванням правил матричного числення рівняння (1) можна переписати у вигляді рівняння в цьому просторі таким чином:

$$\overline{z}'(t) = H\overline{z}(t) + \overline{f}(t),\ t \in \mathbf{R},$$

$$\overline{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{m-1}(t) \end{pmatrix},\quad \overline{f}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \overline{0} \\ \vdots \\ \overline{0} \end{pmatrix},\quad H := \begin{pmatrix} O & I & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & O & I \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

причому на незаповнених місцях матриці H знаходяться нульові оператори. Матриця H визначає в просторі $\mathbf{B}^m$ обмежений оператор, який теж позначатимемо буквою H.

Нехай $z \in T$. Тоді оператор $H - zI$ має обернений, бо дискримінант відповідної матриці, рівний

$$A_0(-1)^{n-1} + A_1(-1)^{n-2}(-z) + A_2(-1)^{n-3}(-z)^2 + ... + (A_{n-1} - zI)(-z)^{n-1} = (-1)^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k - z^n I \right),$$

має обернений оператор за умовою теореми. При цьому аналогічно до відомих формул лінійної алгебри [2, с. 26] обернений оператор можна записати у формі матриці з відповідних мінорів, домноженої на оператор, що обернений до дискримінанта. Тому оператор H з використанням теорії спектральних множин [3] можна подати у вигляді суми операторів H_+ та H_-, спектри звужень яких на відповідні інваріантні підпростори $\mathbf{B}_+^m, \mathbf{B}_-^m$ лежать у правій та лівій півплощині відповідно. Простір $\mathbf{B}^m$ при цьому є прямою сумою підпросторів $\mathbf{B}_+^m, \mathbf{B}_-^m$, проектори на які позначимо P_+, P_-. Шуканий розв'язок буде сумою розв'язків рівнянь у відповідних підпросторах. Як відомо, обмежений на осі розв'язок існує, причому він задається формулою

$$\overline{z}(t) = -\int_t^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \overline{f}(s)\,ds + \int_{-\infty}^t e^{H_-(t-s)} P_- \overline{f}(s)\,ds,\ t \in \mathbf{R}.$$

Першою координатою цього розв'язку є шукана функція x:

$$x(t) = -\left(\int_t^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \overline{f}(s)\,ds\right)_1 + \left(\int_{-\infty}^{t} e^{H_-(t-s)} P_- \overline{f}(s)\,ds\right)_1, \ t \in \mathbf{R}. \qquad (3)$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді для довільних* $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $y_1 \in C\big((-\infty, t_2], \mathbf{B}\big)$, $y_2 \in C\big([t_1, +\infty), \mathbf{B}\big)$, *кожна з задач Коші*

$$u_1^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_1^{(k)}(t) + y_1(t), \ t \ge t_1, \ u_1(t_1) = u_1'(t_1) = \ldots = u_1^{(n-1)}(t_1) = \overline{0}, \qquad (4)$$

$$u_2^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_2^{(k)}(t) + y_2(t), \ t \le t_2, \ u_2(t_2) = u_2'(t_2) = \ldots = u_2^{(n-1)}(t_2) = \overline{0}, \qquad (5)$$

має єдиний m *разів неперервно диференційовний розв'язок.*

Доведення аналогічне доведенню леми 1. При цьому розв'язки задач Коші існують і записуються у вигляді

$$u_1(t) = \left(\int_{t_1}^{t} e^{H(t-s)} \overline{f_1}(s)\,ds\right)_1, \ t \ge t_1; \qquad u_2(t) = \left(\int_{t_2}^{t} e^{H(t-s)} \overline{f_2}(s)\,ds\right)_1, \ t \le t_2. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Нехай виконується умова:*

$$\forall z \notin T \ \exists \left(z^n I - \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k\right)^{-1} \in L(\mathbf{B}).$$

Нехай $y \in C(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ *– обмежена на осі функція,* $x \in C^m(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ *– відповідний їй обмежений розв'язок рівняння (1), що існує за лемою 1,* $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $t_1 < t_2$, u_1, u_2 *– розв'язки задач Коші (4) та (5), що існують за лемою 2 для функцій* $y_1 := P_- y$, $y_2 := P_+ y$. *Покладемо*

$$u(t) := u_1(t) + u_2(t), \ t \in [t_1, t_2].$$

Тоді існують сталі $C > 0,\ h > 0$, *залежні лише від операторних коефіцієнтів і незалежні від функції* y, *такі, що виконується оцінка*

$$\forall t \in [t_1, t_2] \ : \ \|x(t) - u(t)\| \le C\left(e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)}\right)\|y\|_\infty. \qquad (7)$$

Доведення. Враховуючи розташування спектру операторів H_-, H_+, отримаємо оцінки

$$\exists L > 0 \ \exists h > 0 \ \forall t \in \mathbf{R} : \left\|e^{-H_+ t}\right\| \le L e^{-ht}, \ \left\|e^{H_- t}\right\| \le L e^{-ht}.$$

Використовуючи зображення (3) і (6), отримаємо

$$\|x(t) - u(t)\| = \left\| -\left(\int_t^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \overline{f}(s)\,ds\right)_1 + \left(\int_{-\infty}^{t} e^{H_-(t-s)} P_- \overline{f}(s)\,ds\right)_1 + \left(\int_{t_1}^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \overline{f}(s)\,ds\right)_1 - \left(\int_{-\infty}^{t_2} e^{H_-(t-s)} P_- \overline{f}(s)\,ds\right)_1 \right\| \le$$

$$\le \left\|\int_{-\infty}^{t_1} e^{H_-(t-s)} \overline{f}(s)\,ds\right\| + \left\|\int_{t_2}^{+\infty} e^{H_+(t-s)} \overline{f}(s)\,ds\right\| \le \frac{L}{h}\left(e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)}\right)\left\|\overline{f}\right\|_\infty = \frac{L}{h}\left(e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)}\right)\|y\|_\infty, \ t \in [t_1, t_2].$$

Зауваження. 1. Теорема показує, що для довільного відрізка $[a, b]$ та значення $\varepsilon > 0$ можна обрати відрізок $[t_1, t_2] \supset [a, b]$ з настільки великими значеннями $t_2 - b, a - t_1$, що на цьому відрізку обмежений на осі розв'язок та сума розв'язків відповідних задач Коші будуть відрізнятися за нормою не більше, ніж на ε.

2. У випадку, коли один з операторних коефіцієнтів A_k, $k \ne 0$, є необмеженим, то побудований в доведенні леми 1 оператор H не має оберненого при $z = 0$, що легко перевірити безпосередньо. У тому разі, коли необмеженим є оператор A_0, то матричний оператор $(H - zI)^{-1}$ міститиме компоненти вигляду $A_0\big(A_0 - C(z)\big)^{-1}$, де $C(z) \in L(\mathbf{B})$. Норми таких компонент можуть не спадати при $z \to \infty$ за межами деякого сектора, отже оператор H не буде секторіальним [4] і до нього не можна застосувати результат статті [1].

Приклад. Розглянемо рівняння

$$x^{(n)}(t) = A_0 x(t) + y(t), \ t \in \mathbf{R}.$$

Для нього умова теореми 1 набуває вигляду $\forall z \notin T \ \exists \left(z^n I - A_0\right)^{-1} \in L(\mathbf{B})$, тобто при непарних n: $\sigma(A_0) \cap T = \varnothing$, при $n = 4k,\ k \in \mathbf{N}$ – $\sigma(A_0) \cap [0, +\infty) = \varnothing$, при $n = 4k - 2,\ k \in \mathbf{N}$ – $\sigma(A_0) \cap (-\infty, 0] = \varnothing$.

3. Висновки

В роботі дано узагальнення відомих умов апроксимації обмеженого на осі розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку в абстрактному просторі розв'язками відповідних задач Коші на випадок рівнянь старших порядків.

1. Городній М.Ф., Романенко В.М. Апроксимація обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом розв'язками відповідних крайових задач // Укр. мат. журн. – 2000. – Т.52, №4. – С. 548-552. 2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1966. 3. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М., 1976. 4. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., 1985.

Надійшла до редколегії 09.11.11