

Рівняння, що аналогічне рівнянню (А) у попередньому випадку, і яке відповідає рівнянню (14) та системі (25), по-значимо як рівняння (В). Тут не запишемо це рівняння в явному вигляді через його громіздкість. Для того, щоб отримати однопараметричні сім'ї розв'язків рівняння (В), за допомогою методу, що описаний вище у випадку рівняння (20), з системи (9), (10) – (13) знаходимо  $u = -w(1+w)$ , або, враховуючи рівність (11), маємо:

$$u' = \frac{1}{2} \sqrt{1-4u} (2i-1 - \sqrt{1-4u} + (3 + \sqrt{1-4u})u). \tag{26}$$

Далі, з системи (9), (10), (12), (13), (15), (16) знаходимо

$$u = \frac{1}{36} (12(b_1-3)w + b_1^2). \tag{27}$$

Підставляючи (27) у рівність (15) і враховуючи (16), отримуємо:

$$u' = \frac{1}{144(b_1-3)^2} (-b_1^4 + 4u(b_1^2 - 3b_1 + 27)b_1^2 - 1296u^2b_1 + 5184u^3 + 24i(b_1-3)(b_1^2 - 6b_1 - 36u + 18)). \tag{28}$$

Таким чином, встановлено наступний результат.

**Теорема 3.** Диференціальне рівняння (В) має дві однопараметричні сім'ї розв'язків, що визначаються співвідношеннями (26) та (28), (16).

**Висновок.** З допомогою вищевикладеного методу доведено (теореми 1-3), що рівняння (14) і (В) мають однопараметричні сім'ї розв'язків у вигляді загальних розв'язків рівняння Абеля (1) і наведена аналітична форма цих розв'язків.

1. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 462 с. 2. Лукашевич Н.А., Чичурин А.В. Дифференциальные уравнения первого порядка. – Мн.: БГУ, 1999. – 210 с. 3. Чичурин А.В. О существовании отображений между нелинейным уравнением второго порядка и уравнениями Абеля // Вестник Белорусского университета. Сер. 1, Математика. – 2003. – №3. – С. 76 – 80. 4. Чичурин А.В. Использование системы Mathematica при поиске конструктивных методов интегрирования уравнения Абеля // Вучоная запіскі БрДУ імя А.С.Пушкіна. – 2007. – Т.3, ч.2. – С. 24 – 38. 5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с. 6. <http://search.wolfram.com/?query=InverseFunction>.

Надійшла до редколегії 17.04.11

УДК 519.21

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, К. Федоренко, асп.,  
e-mail: vsa@univ.kiev.ua

### ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ НА ПЛОЩИНІ З КОРЕЛЯЦІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ТИПУ КОШІ

*Розглянуто задачу статистичного моделювання однорідних та ізотропних випадкових полів на площині із кореляційною функцією типу Коші. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізації таких випадкових полів на основі їх спектрального розкладу.*

*The problem of statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the plane with Koshi correlations functions has been considered. It has been constructed the model and algorithm for the statistical simulation of this fields realizations on the base of its spectral decomposition.*

#### Вступ

За допомогою методів Монте-Карло можна згенерувати на комп'ютері реалізації важливих у практичному застосуванні випадкових полів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію. А саме, якщо поле гауссівське, то використовують його математичне сподівання та кореляційну функцію. Цій проблемі на прикладі моделі Коші присвячено подану роботу.

#### 1. Постановка задачі та її розв'язання

Розглядається задача статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині з кореляційною функцією типу Коші. Наведено обчислення спектральних коефіцієнтів для таких випадкових полів. Вони використовуються у побудованому моделюючому алгоритмі, що розроблений на основі спектрального розкладу полів [1, с. 59].

Нехай  $\xi(x), (x \in R^2)$  – дійснозначне і неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне випадкове поле на площині.

**Означення:** Випадкове поле  $\xi(x)$  називається однорідним, якщо виконуються умови:

- 1)  $E\xi(x) = const$  (припустимо, що  $E\xi(x) = 0$ );
- 2)  $B(x, y) = B(x-y) = E\xi(x)\bar{\xi}(y) = \int_{R^2} e^{i(\lambda, x-y)} \mu(d\lambda),$

тобто його кореляційна функція  $B(\rho)$  залежить лише від різниці  $x-y$ , де  $\mu(d\lambda)$  – спектральна міра однорідного випадкового поля  $\xi(x)$ .

**Означення:** Випадкове поле  $\xi(x)$  називається ізотропним, якщо  $B(\rho) = B(|x-y|)$ , тобто, його кореляційна функція залежить лише від довжини вектора  $x-y$  і не залежить від його напрямку.

Як відомо [6], кореляційну функцію випадкового поля на площині  $\xi(x)$  можна подати у вигляді:

$$B(\rho) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) d\Phi(\lambda),$$

де  $\Phi(\lambda)$  – обмежена неспадна функція, що є спектральною функцією, а  $J_0(x)$  – функція Бесселя першого роду порядку 0.

При цьому, спектральна щільність випадкового поля  $\xi(x)$  має вигляд [5, с. 14]:  $f(\lambda) = \lambda \int_0^{\infty} x J_0(\lambda x) B(x) dx$ .

Нехай  $(r, \varphi)$  – полярні координати точки  $x$  на площині. При цьому відстань між точками  $x_1 = (r_1, \varphi_1)$  та  $x_2 = (r_2, \varphi_2)$  буде рівною  $\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ . Тоді має місце наступна теорема [1, с. 46]:

**Теорема 1.** Неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне випадкове поле на площині  $\xi(r, \varphi)$  можна подати у вигляді спектрального розкладу:

$$\xi(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{v_k} \left[ \cos k\varphi \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) Z_k^1(d\lambda) + \sin k\varphi \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) Z_k^2(d\lambda) \right], \quad (1)$$

де  $v_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2, & k > 0 \end{cases}$ ,  $\{Z_k^i(\bullet)\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $i = 1, 2$  – послідовність дійснозначних ортогональних випадкових мір на підмножинах

Бореля із інтервалу  $[0, +\infty)$ , таких що виконується умова:  $MZ_k^i(S_1)Z_n^j(S_2) = \delta_i^j \delta_k^n \Phi(S_1 \cap S_2)$ ,  $i = 1, 2$ ,

для будь-яких множин Бореля  $S_1$  та  $S_2$  з інтервалу  $[0, +\infty)$ , причому  $\Phi(S) = \int_S d\Phi(u)$ , а  $J_k(x)$  – функція Бесселя

першого роду порядку  $k$ .

Запропонований метод базується на спектральній теорії випадкових полів на площині, елементи якої наведені вище. За статистичну модель випадкового поля, що розглядається, візьмемо часткову суму ряду (1) [1, с. 59]:

$$\xi_{ucN}(r, \varphi) = \sum_{k=0}^N \sqrt{v_k} \left[ \cos k\varphi \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) Z_k^1(d\lambda) + \sin k\varphi \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) Z_k^2(d\lambda) \right] \quad (2)$$

При цьому, значення числа доданків ряду  $N$  визначається за допомогою нерівності [1, с. 59], яка є оцінкою наближення випадкового поля  $\xi(r, \varphi)$  частковими сумами  $\xi_N(r, \varphi)$  в середньому квадратичному. Таке число має відповідати наперед заданому як завгодно малому числу  $\varepsilon$  (точності моделювання). Така нерівність має вигляд:

$$M[\xi(r, \varphi) - \xi_{ucN}(r, \varphi)]^2 \leq \frac{1}{\pi N} \left( \frac{1}{2} r \mu_1 + r^2 \mu_2 \right) \leq \varepsilon, \quad (3)$$

де  $\mu_k = \int_0^{\infty} \lambda^k d\Phi(\lambda)$ .

Взагалі кажучи, статистична модель (2) випадкового поля  $\xi(r, \varphi)$  достатньо складна для того, щоби її безпосередньо використовувати з метою отримати реалізації такого поля. Тому будемо розглядати в якості моделі більш зручну для моделювання наближену формулу вигляду [1, с. 60]:

$$\xi_N(r, \varphi) = \sum_{k=0}^N \sqrt{v_k |b_k(r)|} (\zeta_k \cos k\varphi + \eta_k \sin k\varphi), \quad (4)$$

де  $\{\zeta_k, k = 0, 1, 2, \dots, N\}$  та  $\{\eta_k, k = 0, 1, 2, \dots, N\}$  – набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин,

$v_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2, & k > 0 \end{cases}$ , а спектральні коефіцієнти визначаються за формулою:

$$b_k(r) = 2 \int_0^{\infty} J_k^2(ru) d\Phi(u). \quad (5)$$

Виберемо приклад широко відомої у застосуванні [6, 7] кореляційної функції, яка має назву – модель Коші. Узагальнений вигляд моделі Коші такий:

$$B(\rho) = \left( 1 + \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{-\nu}, \quad (a > 0, \nu > 0). \quad (5^*)$$

Будемо розглядати модель Коші більш детально при значеннях параметра  $\nu = 0,5$  та  $\nu = 1$ . Знайдемо явний вигляд спектральних коефіцієнтів та формул для обчислення кількості доданків  $N$  ряду (4) в залежності від заданої точності  $\varepsilon$ .

### 1) Модель Коші при $\nu = 0,5$

У цьому випадку кореляційна функція має вигляд:

$$B(\rho) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}, \quad (a > 0). \quad (6)$$

Їй відповідає спектральна щільність:

$$f(u) = ae^{-au}, \quad a > 0. \quad (6^*)$$

Щоб знайти спектральні коефіцієнти в цьому випадку, скористаємось формулою (5) та обчислимо інтеграл:

$$b_k(r) = 2a \int_0^\infty J_k^2(ru) e^{-au} du, \quad a > 0, \quad k = 0, \dots, N, \quad r > 0 \quad (7)$$

Взагалі кажучи, цей інтеграл не обчислюється в явному вигляді, тому для обчислення спектральних коефіцієнтів потрібно знаходити його наближене значення.

Дослідимо залежність  $N$  від  $r$  та  $\varepsilon$ . Оскільки, спектральна щільність має вигляд (6\*), то:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \int_0^\infty y a e^{-ay} dy = a \left( -\frac{y}{a} e^{-ay} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{a} e^{-ay} dy = 0 - \frac{1}{a} e^{-ay} \Big|_0^\infty = \frac{1}{a}; \\ \mu_2 &= \int_0^\infty y^2 a e^{-ay} dy = (-y^2 e^{-ay}) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2y e^{-ay} dy = 0 + \int_0^\infty 2y e^{-ay} dy = \frac{2}{a} \int_0^\infty a y e^{-ay} dy \end{aligned}$$

Звідси отримаємо вирази:  $\mu_1 = \frac{1}{a}$ ,  $\mu_2 = \frac{2}{a} * \frac{1}{a} = \frac{2}{a^2}$ . Отже, із формули (3) маємо наступний вираз для знаходження кількості гармонік  $N$  в моделі (4) :

$$N(r, \varepsilon) \geq \frac{1}{\pi \varepsilon} \left( \frac{1}{2} r \mu_1 + r^2 \mu_2 \right) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \left( \frac{1}{2a} r + \frac{2}{a^2} r^2 \right) \Rightarrow N(r, \varepsilon) = \left[ 1 + \frac{1}{\pi \varepsilon} \left( \frac{1}{2a} r + \frac{2}{a^2} r^2 \right) \right] \quad (8)$$

**2) Модель Коші при  $\nu = 1$**

Кореляційна функція при  $\nu = 1$  має вигляд:

$$B(\rho) = \frac{a^2}{a^2 + \rho^2}, \quad (a > 0), \quad (9)$$

Знайдемо спектральну щільність:  $f(\lambda) = \lambda \int_0^\infty x J_0(\lambda x) B(x) dx = \lambda \int_0^\infty x J_0(\lambda x) \frac{a^2}{a^2 + x^2} dx$ ,

$$f(\lambda) = a^2 \lambda K_0(a\lambda), \quad (10)$$

де  $K_0(x)$  – модифікована функція Ганкеля (функція Макдональда чи модифікована функція Бесселя другого роду) порядку 0. Вираз (10) отримано за допомогою формули 6.532(4) [2].

Щоб знайти спектральні коефіцієнти в цьому випадку, скористаємось формулою (5) та обчислимо інтеграл:

$$b_k(r) = 2 \int_0^\infty J_k^2(ru) a^2 u K_0(au) du = 2a^2 \int_0^\infty u J_k^2(ru) K_0(au) du.$$

Отже, маємо вираз для спектральних коефіцієнтів:

$$b_k(r) = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4r^2}} \left( 1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4r^2}} \right)^k, \quad a > 0, \quad r > 0, \quad k \geq 0 \quad (11)$$

Цей вираз потримано за допомогою формули 6.522(3) [2]. Щоб дослідити залежність  $N$  від  $r$  та  $\varepsilon$ , обчислимо величини:

$$\mu_1 = \int_0^\infty \lambda d\Phi(\lambda), \quad \mu_2 = \int_0^\infty \lambda^2 d\Phi(\lambda).$$

Оскільки, спектральна щільність має вигляд (10), то обчислимо наступний інтеграл за допомогою формули 6.561(16) [2]:

$$\int_0^\infty x^\mu K_\nu(ax) dx = 2^{\mu-1} a^{-\mu-1} \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right), \quad [\text{Re}(\mu+1 \pm \nu) > 0, \text{Re } a > 0]$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \int_0^\infty y f(y) dy = \int_0^\infty y a^2 y K_0(ay) dy = a^2 \int_0^\infty y^2 K_0(ay) dy = a^2 2^{2-1} a^{-2-1} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2a} \\ \mu_2 &= \int_0^\infty y^2 f(y) dy = \int_0^\infty y^2 a^2 y K_0(ay) dy = a^2 \int_0^\infty y^3 K_0(ay) dy = a^2 2^{3-1} a^{-3-1} \Gamma\left(\frac{4}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4}{2}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

Отже, із формули (3) маємо:

$$N(r, \varepsilon) \geq \frac{1}{\pi \varepsilon} \left( \frac{\pi}{4a} r \mu_1 + r^2 \mu_2 \right) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \left( \frac{\pi}{4a} r + \frac{4}{a^2} r^2 \right) \Rightarrow N(r, \varepsilon) = \left[ 1 + \frac{1}{\pi \varepsilon} \left( \frac{\pi}{4a} r + \frac{4}{a^2} r^2 \right) \right] \quad (12)$$

Для кожного із двох випадків ( $\nu = 0, 5$ ,  $\nu = 1$ ) було побудовано алгоритми та написано програми для обчислювальної системи Mathematica, за допомогою яких змодельовано на комп'ютері значення реалізацій випадкового поля  $\xi_N(r, \varphi)$ . Сформулюємо алгоритми для прикладу Коші.

**Алгоритм при  $\nu = 0, 5$  :**

1) Визначається значення числа доданків  $N = N(r, \varepsilon)$ , відповідно наперед заданій точності  $\varepsilon$ , за допомогою рівності (8). В нашому випадку  $N = 27$  при  $a = 1$  та при заданій точності моделювання  $\varepsilon = 3 * 10^{-2}$ .

2) Обчислюються спектральні коефіцієнти (7) при  $a = 1$ :

$$b_k(r) = 2 \int_0^{\infty} J_k^2(ru) e^{-u} du, \quad k = 0, 1, \dots, 27$$

Цей інтеграл не обчислюється явно, тому для обчислення коефіцієнтів потрібно було знаходити його наближене значення, наприклад, за допомогою програми Mathematica.

3) Моделюються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин  $\{\zeta_k, k = 0, 1, 2, \dots, 27\}$  та  $\{\eta_k, k = 0, 1, 2, \dots, 27\}$ .

4) Обчислюються значення реалізації у вигляді суми (4) при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин:

$$\xi_N(r_i, \varphi_j) = \sqrt{b_0(r_i)} \zeta_0 + \sum_{k=1}^{27} \sqrt{2|b_k(r_i)|} (\zeta_k \cos k\varphi_j + \eta_k \sin k\varphi_j), \quad \text{де } \varphi_j = j * \frac{2\pi}{10}, \quad j = 0, \dots, 9$$

$$r_i = 0.1 * i, \quad i = 1, \dots, 10, \quad b_k(r_i), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 27.$$

5) Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції по отриманій реалізації випадкового поля  $\xi(r, \varphi)$  і порівнюється із заданою кореляційною функцією (6), тобто проводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

За допомогою пакету програм GeoR було побудовано програму, яка будує варіограму  $\gamma(\rho) = B(0) - B(\rho)$  для отриманих реалізацій  $\xi_N(r, \varphi)$  із встановленими параметрами.

На основі моделі (4) та оцінки (3) можна побудувати аналогічний алгоритм статистичного моделювання гауссівського однорідного ізотропного випадкового поля  $\xi(r, \varphi)$  на площині, яке задається кореляційною функцією (9) типу Коші при значенні параметра  $\nu = 1$ .

#### Алгоритм при $\nu = 1$ :

1) Визначається значення числа доданків  $N = N(r, \varepsilon)$ , відповідно наперед заданій точності  $\varepsilon$ , за допомогою рівності (12). В нашому випадку  $N = 39$  при  $a = 1$  при заданій точності моделювання  $\varepsilon = 4 * 10^{-2}$ .

2) Обчислюються спектральні коефіцієнти за формулою (11) при  $a = 1$ :

$$b_k(r) = \frac{2}{\sqrt{1+4r^2}} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{1+4r^2}} \right)^k, \quad r > 0, \quad k = 0, 1, \dots, 39$$

3) Моделюються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин  $\{\zeta_k, k = 0, 1, 2, \dots, 39\}$  та  $\{\eta_k, k = 0, 1, 2, \dots, 39\}$ .

4) Обчислюються значення реалізації у вигляді суми (4) при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин:

$$\xi_N(r_i, \varphi_j) = \sqrt{b_0(r_i)} \zeta_0 + \sum_{k=1}^{39} \sqrt{2|b_k(r_i)|} (\zeta_k \cos k\varphi_j + \eta_k \sin k\varphi_j), \quad \text{де } \varphi_j = j * \frac{2\pi}{10}, \quad j = 0, \dots, 9$$

$$r_i = 0.1 * i, \quad i = 1, \dots, 10, \quad b_k(r_i), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 39.$$

5) Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції по отриманій реалізації випадкового поля  $\xi(r, \varphi)$  і порівнюється із заданою кореляційною функцією (9), а також приводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

Як і впершому випадку, було побудовано програму, яка будує варіограми  $\gamma(\rho) = B(0) - B(\rho)$  для отриманих реалізацій  $\xi_N(r, \varphi)$  із встановленими параметрами.

На рис. 1 зображено варіограми для моделі Коші при значенні параметрів  $\nu = 0,5$  та  $\nu = 1$ . Одна варіограма – теоретична (суцільна лінія), а друга варіограма – емпірична (хрестики).

Наведені варіограми було проаналізовано на величину середньоквадратичного відхилення емпіричної від теоретичної.

Для знаходження значень теоретичної та емпіричної варіограм використовувався такий прийом – лінійка з програми Surfer. Обидві варіограми помішалася в початок координат (в точку (0,0) лінійки) і для кожного фіксованого  $\rho_i$  окремо знаходилися значення як теоретичної  $B_t(\rho_i)$ , так і емпіричної варіограм  $B_e(\rho_i)$ . Далі, розраховувалося середньоквадратичне відхилення емпіричної варіограми від теоретичної в програмі Excel за формулою:

$$S(\rho_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (B_t(\rho_i) - B_e(\rho_i))^2}.$$

Порівнявши варіограми отриманих даних з графіками варіограм, що відповідають кореляційним функціям (5\*) типу Коші при значенні параметрів (при  $a = 1$ )  $\nu = 0,5$  та  $\nu = 1$ , можна зробити висновок, що відхилення отриманої кореляційної функції від початкової є незначним, а саме: не більше 3,7% (в першому випадку при  $\nu = 0,5$ ), не більше 4,8% (в другому випадку при  $\nu = 1$ ). Результати такого аналізу свідчать про достатньо високу точність моделювання за наведеними алгоритмами, оскільки метод Монте-Карло дає відхилення в межах 5%.

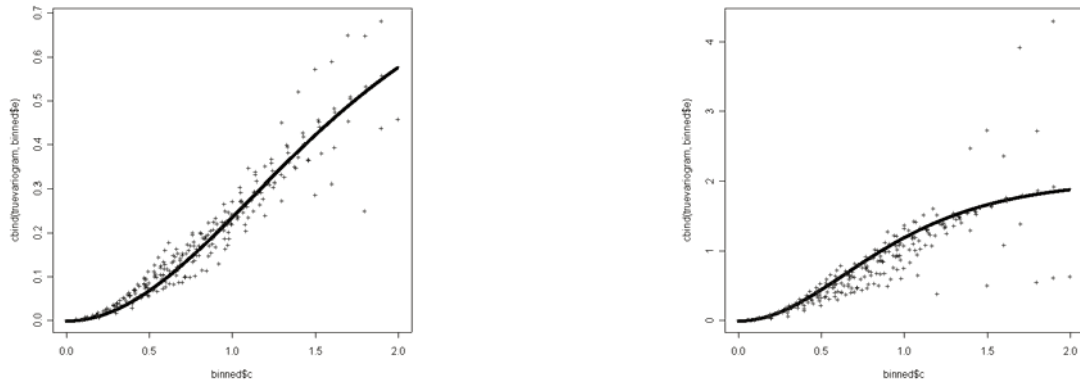


Рис. 1. Емпірична та теоретична варіограми для реалізацій із кореляційною функцією типу Коші при  $\nu = 0,5$  (зліва) та при  $\nu = 1$  (справа)

Слід зазначити, що наведений алгоритм можна застосовувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу. Тоді випадкові величини  $\{\zeta_k(r), k = 0, 1, 2, \dots, N\}$  та  $\{\eta_k(r), k = 0, 1, 2, \dots, N\}$  мають бути розподілені за відповідним законом.

**2. Точність та надійність моделювання випадкових гауссових полів в просторі  $L_2(T)$**

Розглянемо простір  $R^d$  зі стандартною евклідовою метрикою  $\rho(\vec{t}, \vec{s})$ , де  $\vec{t}^T = (t_1, \dots, t_d), \vec{s}^T = (s_1, \dots, s_d)$ . Нехай  $T$  – множина вигляду  $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \leq L\}$ , де  $L \geq 0$  деяке число,  $\{R^d, A, \nu\}$  – вимірний простір, де  $A$  – борелівська  $\sigma$ -алгебра,  $\nu$  – скінченна міра. Нехай – центроване випадкове поле вигляду

$$X(\vec{t}) = \sum_{r=1}^N \int_{R^d} f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}) dZ_r(\vec{\lambda}), \tag{13}$$

де  $Z_r(S), S \in A$  – некорельовані випадкові міри підпорядковані мірі  $\nu$ , а  $f_r(\vec{t}, \vec{\lambda})$  такі функції, що при кожному  $\vec{t} \in T, f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}) \in L_2(R^d, \nu)$ , а при кожному  $\vec{\lambda} \in R^d$  функція  $f_r(\vec{t}, \vec{\lambda})$  неперервна по  $\vec{t}$ . Позначимо через  $L_p(T)$  – простір функцій  $\varphi(\bullet)$ , для яких виконується умова:  $\int_T |\varphi(\vec{t})|^p d\vec{t} < \infty, p \geq 1$  (інтегрування проводиться по мірі Лебега).

Нехай  $A$  – однозв'язна, з кусково-гладкою межею область в  $R^d, D_n$  – розбиття області  $A$  на  $n$  однозв'язних областей  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  з кусковогладкими межами,  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  – фіксовані точки в  $R^d$  такі, що  $\vec{\lambda}_i \in \Delta_i$ . Позначимо:

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}_i) Z_r(\Delta_i). \tag{14}$$

Випадкове поле  $X_n(\vec{t}, A)$  називатимемо апроксимаційною моделлю поля  $X(\vec{t})$  (A-моделлю). Надалі розглядатимемо гауссові випадкові поля. Зауважимо, що  $Z_r(\Delta_i)$  це сумісно гауссові випадкові величини такі, що  $EZ_r(\Delta_i) = 0, E(Z_r(\Delta_i))^2 = \nu(\Delta_i)$ .

**Означення:** Апроксимаційною моделлю випадкового поля (A-моделлю) називається сума:  $\sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}_i) \theta_{ir}$ , де

$\theta_{ir}$  – це сумісно гауссові незалежні випадкові величини такі, що  $E\theta_{ir} = 0, E\theta_{ir}^2 = \nu(\Delta_i)$ .

**Теорема 2.** [3, с. 168]. Нехай  $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$  гауссове випадкове поле. Випадкове поле  $X_n(\vec{t}, A)$  з (14) є A-моделлю, що наближає поле  $X$  з надійністю  $1 - \alpha, 0 < \alpha < 1$ , та точністю  $\delta > 0$  в  $L_2(T)$ , якщо область  $A$  та її розбиття  $D_n$  вибрано так, що виконуються нерівності:

$$B(D_n, A) < \delta^2, \tag{15}$$

$$e^{0.5} \frac{\delta}{(B(D_n, A))^{0.5}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B(D_n, A)}\right\} < \alpha, \tag{16}$$

$$B(D_n, A) = \int_T B(\vec{t}, D_n, A) d\vec{t}, \tag{17}$$

$$B(\vec{t}, D_n, A) = \sum_{r=1}^N \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} |f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}) - f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}_i)|^2 d\nu(\vec{\lambda}) + \int_{R^d \setminus A} |f_r(\vec{t}, \vec{\lambda})|^2 d\nu(\vec{\lambda}) \right).$$

Для однорідних та ізотропних полів в  $R^d$  має місце оцінка :

$$B(D_n, A) \leq a(L)\Phi(\Lambda)\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 [1 + (d+2)\pi^2] + (\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda))b(L),$$

$$\text{де } a(L) = \frac{2\pi^{d/2}L^{d+2}}{(d+2)\Gamma(d/2)}, \quad b(L) = \frac{2\pi^{d/2}L^d}{d\Gamma(d/2)}.$$

Тепер, використовуючи теорему 2, побудуємо апроксимаційні моделі (А-моделі) однорідного та ізотропного випадкового поля з кореляційною функцією типу Коші при значеннях параметра  $\nu = 0.5$  та  $\nu = 1$ .

**Приклад 1:** Розглянемо наближення однорідного та ізотропного випадкового поля  $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$ , де  $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \leq 1 = L\}$ ,  $T \in R^2$  з кореляційною функцією типу Коші при  $\nu = 0.5$  та спектральною щільністю  $f(u) = ae^{-au}$ ,  $a > 0$ . Не обмежуючи загальності, покладемо за значення параметра  $a = 1$ . Тоді відповідна спектральна функція цього поля матиме наступний вигляд:  $\Phi(u) = 1 - e^{-u}$ ,  $u > 0$ .

Нехай  $\alpha = 0.05, \delta = 0.05, d = 2$ . Тоді з формули (16) попередньої теореми маємо наступну нерівність:

$$e^{0.5} \frac{0.05}{(B(D_n, A))^{0.5}} \exp\left\{-\frac{0.0025}{2B(D_n, A)}\right\} < 0.05. \quad (19)$$

Розв'язуючи цю нерівність в програмі Mathematica, отримаємо, що повинна виконуватися така умова:  $B(D_n, A) \leq 0.0002713 \leq 0.0025 = \delta^2$ . Тоді покладемо:  $B(D_n, A) = 0.00026$ .

Далі, використовуючи (15) та (17), маємо наступну нерівність:

$$a(L)\Phi(\Lambda)\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 [1 + (d+2)\pi^2] + (\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda))b(L) \leq \delta^2,$$

Звідси отримаємо для визначення  $m$  вираз:

$$m \geq \Lambda \sqrt{\frac{a(L)\Phi(\Lambda)[1 + (d+2)\pi^2]}{0.00026 - (\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda))b(L)}} = G(\Lambda). \quad (20)$$

Знаходимо за допомогою програми Mathematica з (20) мінімальне значення функції  $G(\Lambda)$  по  $\Lambda$ . Тоді отримаємо, що  $G(11.29) \approx 6059 = m$ . Отже, виконуються всі умови теореми 1. Тому випадкове поле  $X_n(\vec{t}, A), A = \{\vec{\lambda}, \rho(\vec{\lambda}, 0) < 11.29\}$  є А-моделлю, що наближає випадкове поле  $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$   $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \leq 1\}$  із цього прикладу з надійністю 95%, та точністю 5% в просторі  $L_2(T)$ .

**Приклад 2:** Аналогічно будемо наближати однорідне та ізотропне випадкове поле  $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$ , де  $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \leq 1 = L\}$ ,  $T \in R^2$  з кореляційною функцією типу Коші при  $\nu = 1$  та спектральною щільністю  $f(u) = a^2 \lambda K_0(a\lambda)$ ,  $a > 0$ . Також, не обмежуючи загальності, покладемо за значення параметра  $a = 1$ . Тоді відповідна спектральна функція цього поля матиме вигляд інтегралу:  $\Phi(u) = \int_0^u \lambda K_0(\lambda) d\lambda$ ,  $u > 0$ .

Нехай  $\alpha = 0.05, \delta = 0.05, d = 2$ . У цьому випадку нерівність (19) також має місце. Це рівняння розв'яжемо в програмі Mathematica та отримаємо, що повинна виконуватися, як і в попередньому прикладі, наступна умова:  $B(D_n, A) \leq 0.0002713 \leq 0.0025 = \delta^2$ . Аналогічно покладемо  $B(D_n, A) = 0.00026$ . Для обчислення  $m$  використовуємо нерівність (20). Тоді знаходимо з виразу (20) за допомогою програми Mathematica мінімальне значення функції  $G(\Lambda)$  по  $\Lambda$ . Отримаємо:  $G(12.91) \approx 6877 = m$ .

Отже, виконуються усі умови теореми 1 і випадкове поле  $X_n(\vec{t}, A), A = \{\vec{\lambda}, \rho(\vec{\lambda}, 0) < 12.91\}$  є А-моделлю, що наближає поле  $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$   $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \leq 1\}$  із прикладу 2 з надійністю 95%, та точністю 5% в  $L_2(T)$ .

### Висновки

Розроблено достатньо адекватні у застосуванні до прикладних задач алгоритми для статистичного моделювання однорідних та ізотропних випадкових полів на площині з кореляційними функціями (5\*) типу Коші при значенні параметрів  $\nu = 0,5$  та  $\nu = 1$ . Для цього використано статистичну модель випадкового поля (4) у вигляді часткової суми ряду, що побудована на основі спектрального розкладу таких полів. При цьому значення числа доданків часткової суми  $N$  визначається, відповідно до наперед заданої точності  $\varepsilon$ , за допомогою рівностей (8) та (12), результати обчислень за якими внесені в таблиці, по яких можна прослідкувати зміну величини  $N$  в залежності від  $r$  та  $a$ .

Обчислено спектральні коефіцієнти для випадкових полів на площині із кореляційною функцією типу Коші при значенні параметрів  $\nu = 0,5$  та  $\nu = 1$ , які використовуються в моделі. Для першого випадку  $\nu = 0,5$  спектральні коефіцієнти обчислюються наближено за формулою у вигляді інтегралу (7). Для другого випадку  $\nu = 1$  спектральні коефіцієнти мають вигляд аналітичного виразу, за яким обчислено їх точні значення (11).

На базі розробленої моделі (3) побудовано програми в пакеті Mathematica, за допомогою яких згенеровано реалізації випадкового поля, що розглядається. Для отриманих реалізацій з метою перевірки їх на адекватність побудовано та досліджено теоретичні й емпіричні варіограми при використанні пакету прикладних програм GeoR. Такий статистичний аналіз показав достатньо високу точність моделювання з урахуванням можливостей методів Монте-Карло.

1. Вижда З.О. Навчальний посібник з дисципліни Математичні моделі в природознавстві Розділ: Статистичне моделювання випадкових процесів та полів у науках про землю. – К.: Обрії, 2007, 164 с. 2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., Наука, 1971. 3. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових процесів та полів: Монографія / Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. – К.: Задруга, 2007. – 230 с. 4. Козаченко Ю. В., Погоріляк А. О., Терза А. М. Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса: Монографія. – Уж.: Карпати, 2012. – 194 с. 5. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей – Новосибирск: ИВМиМГ, 2005. – 259 с. 6. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. – К.: Вища школа, 1980. – 208 с. 7. Chiles J.P., Delfiner P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto, 1999. – 695 p. 8. Leonenko N., Olenko A. Tauberian and Abelian Theorems for Long-range Dependent Random Fields// Methodology and Computing in Applied Probability. DOI 10.1007/s11009-012-9276-9. Springer Science+Business Media, LLC, 2012. – 28p.

Надійшла до редколегії 25.05.12

УДК 519.21

I. Дубовецька, асп.  
e-mail: idubovetska@gmail.com

### МАКСИМАЛЬНА ПОХИБКА ПРОГНОЗУ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

*Розглядається задача оптимального оцінювання скінченного та нескінченного лінійних функціоналів від невідомих значень періодично корельованої послідовності за її спостереженнями. Знайдено формули для обчислення оптимальних оцінок функціоналів. Визначено найбільші значення середньоквадратичних похибок цих оцінок.*

*The problem of optimal estimation of finite and infinite linear functionals depending on unknown values of periodically correlated stochastic sequence based on observations of this sequence is considered. Formulas for calculation of optimal estimates of functionals are found. The maximum values of mean-square errors of these optimal estimates are determined.*

#### 1. Вступ

У статті Є.Г. Гладишева [1] проведено аналіз спектральних властивостей та зображень періодично корельованих процесів, який базується на зв'язку періодично корельованих та векторних стаціонарних послідовностей. З результатів Є.Г. Гладишева випливає, що задача оцінювання періодично корельованих послідовностей зводиться до відповідної задачі для векторних стаціонарних послідовностей. Основні ідеї зображення періодично корельованих процесів через простіші випадкові послідовності представлені Л. Хардом та А. Міамі [6].

Класичні методи розв'язування задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів із відомими спектральними щільностями запропоновані А.Н. Колмогоровим [2], Н. Вінером [9], А.М. Ягломом [10, 11]. Задача прогнозу векторних стаціонарних послідовностей досліджена Ю.А. Розановим [4]. У випадку, коли повна інформація про точні значення спектральних щільностей відсутня, але задано множину допустимих спектральних щільностей, застосовують мінімакний метод розв'язування задачі оцінювання. Тобто шукають оцінку, яка мінімізує значення похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. У Гренадер [5] вперше застосував мінімакний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. У роботах М.П. Моклячука [3, 8], М.П. Моклячука і А.Ю. Масютки [7] досліджено задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів і послідовностей.

У даній статті розглядається задача оптимального лінійного оцінювання функціоналів  $A_N \zeta = \sum_{j=0}^N a(j) \zeta(j)$  та  $A \zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j) \zeta(j)$  від невідомих значень періодично корельованої послідовності  $\zeta(j)$  з класу  $K = \{E \zeta(j) = 0, \|\zeta(j)\|^2 \leq K\}$  за спостереженнями послідовності  $\zeta(j)$  при  $j < 0$ . Знайдено формули для обчислення оптимальних оцінок функціоналів  $A_N \zeta$  та  $A \zeta$ , визначено найменш сприятливі в класі  $K$  стохастичні послідовності для оптимального оцінювання  $A_N \zeta$  та  $A \zeta$ , обчислено найбільші значення середньоквадратичних похибок цих функціоналів.

#### 2. Періодично корельовані послідовності, які породжуються векторними стаціонарними

Періодично корельовані послідовності є стохастичними послідовностями з періодичною структурою [6].

**Означення 1.** Послідовність комплекснозначних випадкових величин  $\zeta(n)$ ,  $M|\zeta(n)|^2 < \infty$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , називається періодично корельованою з періодом  $T$  ( $T$  - періодично корельованою), якщо

$$M \zeta(n+T) = M \zeta(n), R(n, m) = R(n+T, m+T), n, m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

не існує меншого за  $T > 0$  числа такого, що виконуються рівності (1).

**Теорема Гладишева [1].** Послідовність  $\zeta(n), n \in \mathbb{Z}$ , є періодично корельованою з періодом  $T$  тоді і лише тоді, коли існує така  $T$ -вимірною стаціонарна послідовність  $\bar{\zeta}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$ , що  $\zeta(n)$  має зображення

$$\zeta(n) = \sum_{q=0}^{T-1} e^{2\pi i n q / T} \xi_q(n), n \in \mathbb{Z}.$$

Послідовність  $\bar{\zeta}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$  називають такою, що породжує  $\zeta(n)$ .