стохастичних процесів : монографія. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. 4. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990. 5. Grenander U. A prediction problem in game theory // Ark. Mat. – 1957. – № 3. – P. 371-379. 6. Hurd H.L., Miamee A. Periodically correlated random sequences. – John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2007. 7. Moklyachuk M.P., Masyutka O.Yu. Minimax prediction problem for multidimentional stationary stochastic sequences // Theory Stoch. Process. – 2008. – V. 14(30), № 3-4. – P. 89-103. 8. Moklyachuk M.P. Robust prediction problem for periodically correlated stochastic sequences // 5th Conference in Actuarial Science and Finance on Samos, Proceedings. – 2009. – P. 51-65. 9. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary line series. Whis engineering applications. – Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, 1966. 10. Yaglom A.M. Correlation theory of stationary and related random functions. V. 1: Basic results. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. 11. Yaglom A.M. Correlation theory of stationary and related random functions. V. 2: Suplementary notes and references. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987.

Надійшла до редколегії 21.11.11

УДК 519.21

А. Савченко, асп.
e-mail: nebulous@bigmir.net

МОДИФІКОВАНА ОЦІНКА МАКСИМАЛЬНОЇ ВІРОГІДНОСТІ В ПУАССОНІВСЬКІЙ СТРУКТУРНІЙ МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

Вивчається пуассонівська структурна модель регресії з похибками вимірювання. Побудовано виправлену $T(q)$ – вірогідну оцінку для коефіцієнтів регресії. Отримано достатню умову строгої консистентності оцінки, коли q залежить від обсягу вибірки і прямує до 1.

The Poisson structural measurement error model of regression is studied. The corrected $T(q)$ – likelihood estimator of regression coefficients is constructed. A sufficient condition for strong consistency of the estimator is presented for the case where q depends on the sample size and tends to 1.

1. Вступ

Розглянемо загальну модель нелінійної регресії з похибками у змінних, де відгук має умовний пуассонівський розподіл відносно прихованої змінної. За невідомого розподілу прихованої змінної, виправлена (CS, Corrected Score) оціночна процедура дає консистентну оцінку [6]. Але відомо, що CS оцінка має нестійку поведінку для малої і середньої вибірки. В [3] та [5] побудовано модифікацію CS оцінки для малої вибірки, що стійкіша для малої і середньої вибірок і асимптотично еквівалентна CS оцінці, коли обсяг вибірки прямує до нескінченності. У даній статті використовується інша ідея модифікувати CS оцінку для малої і середньої вибірок з використанням $T(q)$ – вірогідних оцінок.

$T(q)$ – вірогідна оцінка розглядалась за відсутності похибок у змінних у [4], де вказано, що вона більш стійка для малої та середньої вибірок, ніж оцінка максимальної вірогідності. Пуассонівська модель з похибками вимірювання вивчалась у [2, розділ 7], але іншими методами.

Метою цієї статті є розгляд виправленої $T(q)$ – вірогідної оцінки за наявності похибок вимірювання.

Позначимо через E математичне сподівання випадкових величин, векторів або матриць, D означає дисперсію. Математичне сподівання $E_b f$ береться за умови, що b – істинне значення параметра β. Верхній індекс T означає транспонування.

Структура роботи наступна. У розділі 2 описано модель спостережень. Розділ 3 представлено виправлену $T(q)$ – вірогідну оцінку. У розділі 4 доведено строгу консистентність оцінки. Розділ 5 містить висновки, а в Додатку сформулльвано лему, на якій ґрунтується доведення консистентності.

2. Загальна модель

Розглянемо відгук y з розподілом за умови ξ, рівним $Pois\ (\lambda)$, $P(y=k|\xi)=f(k,\xi,\beta)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k=0,1,2,...$, з неспостережуваною випадковою пояснювальною змінною $\xi\in\mathrm{R}$, причому $\lambda=\exp(\beta_0+\beta_1\xi)$; $\beta=(\beta_0;\beta_1)^T$. Замість ξ спостерігається сурогатна змінна $x=\xi+\delta$, де $\delta\sim N(0,\sigma_\delta^2)$. Випадкова величина δ називається похибкою вимірювання і вважається незалежною від ξ та y. Вважаємо дисперсію похибки σ_δ^2 відомою. Спостерігаються незалежні копії моделі $z_i=(y_i,x_i)$, $i=\overline{1,n}$, оцінюється вектор β. Припускаємо, що всі експоненційні моменти ξ скінченні, тобто $\forall a\in R$: $E\exp(a\xi)<\infty$. Тоді $E_\beta y=EE_\beta(y|\xi)=E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{k\lambda^k(\beta)e^{-\lambda(\beta)}}{k!}\right)=\exp(\beta_0)E\exp(\beta_1\xi)$.

Для $u>0$ і $q>0$ введемо перетворення Бокса-Кокса

$$T(q,u)=\begin{cases}(u^{1-q})/(1-q), & q\neq 1;\\ \ln u, & q=1.\end{cases}$$

$T(q)$ – вірогідна оціночна функція визначається як $S^{(q)}(y,\xi,\beta)=\dfrac{\partial}{\partial\beta}T(q,f(y,\xi,\beta))=f^{-q}\dfrac{\partial f}{\partial\beta}=\dfrac{e^{\lambda(q-1)}}{(y!)^{1-q}}\lambda^{y(1-q)}(y-\lambda)(1;\xi)^T$.

Для $q=1$, $S^{(q)}$ збігається з оціночною функцією методу максимальної вірогідності. За відсутності похибки вимірювання, $S^{(q)}$ розглядалась в [4]; з $q=q_n\to 1$ та $\sqrt{n}(q_n-1)\to 0$ при $n\to\infty$, $T(q)$ – вірогідна оціночна функція дає консистентну оцінку β з тою ж ефективністю, що і оцінка максимальної вірогідності (ОМВ), але з кращою поведінкою для малих вибірок. За відсутності похибки вимірювання ОМВ, позначена як $\widehat{\beta}_n$, задається рівністю:

$$\widehat{\beta}_n = \arg\max_{\beta\in\Theta} \sum_{i=1}^{n} \ln f(y_i, \xi_i, \beta),$$

де параметрична множина $\Theta \subset \mathrm{R}^2$.

3. Побудова оціночного рівняння

Адаптуємо оціночну функцію $S^{(q)}$ до похибок вимірювання, побудувавши таку виправлену оціночну функцію $S_C^{(q)}$, що для b (істинного значення оцінюваного вектора) та для всіх β з Θ виконується майже напевно

$$E[S_C^{(q)}(y,x,\beta)\big|y,\xi] = S^{(q)}(y,\xi,\beta). \tag{1}$$

Виправлена $T(q)$ – вірогідна оцінка $\widehat{\beta}_n\ (q)$ визначається як вимірний розв'язок рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} S_C^{(q)}(y_i, x_i, \beta) = 0,\ \beta \in \Theta. \tag{2}$$

Позначимо $h(y,x) = S_C^{(q)}(y,x,\beta)$. Тоді

$$E[h(y,x)\big|y,\xi] = f^{-q}\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{\exp(\lambda(q-1))}{\left(y!\right)^{1-q}}(y\lambda^{(1-q)y} - \lambda^{y(1-q)+1})\begin{pmatrix}1\\ \xi\end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+(1-q)y}(q-1)^m\, y}{m!\left(y!\right)^{1-q}} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+(1-q)y+1}(q-1)^m}{m!\left(y!\right)^{1-q}}\right)\begin{pmatrix}1\\ \xi\end{pmatrix} \tag{3}$$

де $\lambda = \exp(\beta_0 + \beta_1\xi)$. Розв'язок рівняння деконволюції (3) можна знайти у вигляді

$$h(y,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q-1)^m y}{m!\left(y!\right)^{1-q}}\begin{pmatrix}\phi_m(x,y)\\ \psi_m(x,y)\end{pmatrix} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q-1)^m}{m!\left(y!\right)^{1-q}}\begin{pmatrix}\phi_{m+1}(x,y)\\ \psi_{m+1}(x,y)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тут $\phi_m(x,y)$ і $\psi_m(x,y)$ задовольняють наступні рівняння деконволюції:

$$E[\phi_m(x,y)\big|y,\xi] = \lambda^{m+(1-q)y} = \exp((\beta_0 + \beta_1\xi)(m + (1-q)y)), \tag{5}$$

$$E[\psi_m(x,y)\big|y,\xi] = \lambda^{m+(1-q)y}\xi = \xi\exp((\beta_0 + \beta_1\xi)(m + (1-q)y)). \tag{6}$$

Тепер розв'яжемо рівняння (5). Нехай $a_m = a_m(y) = \beta_0(m + (1-q)y)$, $r_m = r_m(y) = \beta_1(m + (1-q)y)$. Перепишемо (5) у вигляді $E[\phi_m(x,y)\big|y,\xi] = \exp(a_m(y) + r_m(y)\xi)$ і шукаємо $\phi_m(x,y)$ вигляду $\phi_m(x,y) = C_m(y)\exp(r_m(y)x)$. Отримаємо $E[C_m(y)\exp(r_m(y)(\xi+\delta))\big|y,\xi] = C_m(y)\exp(r_m(y)\xi)E\exp(r_m(y)\delta) = \exp(a_m(y) + r_m(y)\xi)$ (під знаком останнього математичного сподівання y вважаємо фіксованим, і математичне сподівання береться відносно випадкового δ; це саме стосується подальшого запису для математичного сподівання у даному розділі статті). Звідси $C_m(y) = \left(E\exp(r_m(y)\delta)\right)^{-1}\exp(a_m(y))$. Нагадаємо, що $\delta \sim N(0,\sigma_\delta^2)$. З рівності $E\exp(r_m\delta) = \exp\left(\frac{r_m^2\sigma_\delta^2}{2}\right)$ маємо

$E\delta\exp(r_m\delta) = \frac{d}{dr_m}E\exp(r_m\delta) = r_m\sigma_\delta^2\exp\left(\frac{r_m^2\sigma_\delta^2}{2}\right)$. Звідси

$$\phi_m(x,y) = C_m(y)\exp(r_m(y)x) = \frac{\exp((\beta_0 + \beta_1 x)(m + (1-q)y))}{E\exp(\beta_1(m + (1-q)y)\delta)} = \exp\left((\beta_0 + \beta_1 x)(m + (1-q)y) - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m + (1-q)y)^2}{2}\right). \tag{7}$$

Далі розв'яжемо (6). Перепишемо (6) у вигляді $E[\psi_m(x,y)\big|y,\xi] = \xi\exp(a_m(y) + r_m(y)\xi)$ і шукаємо $\psi_m(x,y)$ вигляду $\psi_m(x,y) = (C_{1,m}(y) + C_{2,m}(y)x)\exp(r_m(y)x)$. Аналогічно знаходимо

$$\psi_m(x,y) = (C_{1,m}(y) + C_{2,m}(y)x)\exp(r_m(y)x) = (x - \beta_1\sigma_\delta^2(m + (1-q)y))\exp\left((\beta_0 + \beta_1 x)(m + (1-q)y) - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m + (1-q)y)^2}{2}\right). \tag{8}$$

Нарешті, отримаємо $h(y,x)$ згідно з (4), (7), (8). Ряди в (4) абсолютно збіжні за ознакою Даламбера. За теоремою Фубіні можемо змінити порядок підсумування і обчислити $E[\phi_m(x,y)\big|y,\xi]$ та $E[\psi_m(x,y)\big|y,\xi]$, тому справді функція (4) з $\phi_m(x,y)$ і $\psi_m(x,y)$, вигляду (7), (8), задовольняє рівняння (1).

Якщо $q = 1$, то з (4) отримаємо

$$S_C^{(1)}(y,x,\beta) = y\begin{pmatrix}\phi_0\\ \psi_0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\phi_1\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right) \\ yx - (x - \beta_1\sigma_\delta^2)\exp\left(\beta_0 + \beta_1 x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\end{pmatrix}.$$

При побудові оцінки $\widehat{\beta}_n(q),\ q>0,$ не використовується інформація про розподіл ξ.

4. Консистентність оцінки

Нижче "зрештою" означає наступне: для послідовності випадкових величин $\{U_n : n\ge 1\}$ послідовність тверджень $A_n(U_n)$ виконується зрештою за ймовірнісною мірою P, якщо існує така випадкова подія $\Omega_0\subset\Omega,\ P(\Omega_0)=1,$ що $\forall\omega\in\Omega_0\ \exists N(\omega)\ \forall n\ge N(\omega): A_n(U_n(\omega))$ справджується.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови:*

1. $q=q_n$, *причому* $0<q_n\le 1,\ n\ge 1,$ *та* $q_n\to 1$ *при* $n\to\infty.$

2. Параметрична множина Θ *– відома компактна множина в* R^2 *та істинне значення* b *параметра* β *є внутрішньою точкою* Θ.

3. Існує $K>0$ *таке, що* $|\xi|\le K$ *майже напевно, де* K *– невідома стала.*

4. $D\xi\ne 0.$

Тоді зрештою рівняння (2) *має розв'язок .*

Визначимо оцінку $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}$ як розв'язок (2), якщо існує такий розв'язок; інакше покладемо $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}=0.$

Доведення теореми 4.1 подано нижче.

Теорема 4.2. *За умов теореми* 4.1 *оцінка* $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}$ *є строго консистентною, тобто* $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}\to b$ *з ймовірністю* 1 *при* $n\to\infty$, *де* b *є істинним значенням* β.

Доведення теорем 4.1 і 4.2. Використаємо лему О. Усольцевої [1] (див. лему 5.1 в Додатку). Маємо оціночне рівняння $\sum_{i=1}^{n} S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)=0,$ в якому $q_n\to 1$ при $n\to\infty,$ де $\begin{pmatrix} S_1(y_i,x_i,\beta,q_n)\\ S_2(y_i,x_i,\beta,q_n)\end{pmatrix}=S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)=S_C^{(q_n)}(y_i,x_i,\beta).$

Позначимо $S_n(\beta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_C(y_i,x_i,\beta,1),\ \Phi_n(\beta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S_C(y_i,x_i\beta,q_n)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right).$ Перепишемо оціночне рівняння у вигляді $S_n(\beta)+\Phi_n(\beta)=0,\ \beta\in\Theta.$ Маємо

$$E_b y^n\exp(\beta_1\xi)=EE_b(y^n\exp(\beta_1\xi)\ \big|\ \ \xi)=\sum_{j=0}^{n} c_j\lambda^j(b)E\exp(\beta_1\xi), \tag{9}$$

де $c_j=c_j(n)$ – відомі коефіцієнти,

$$E_b y|\xi|\exp(\beta_1\xi)=EE_b(y|\xi|\exp(\beta_1\xi)\ \big|\ \ \xi)=E|\xi|\exp(\beta_1\xi)\lambda(b_0,b_1)=\exp(b_0)E|\xi|\exp((\beta_1+b_1)\xi),$$

$$E_b y\xi^2\exp(\beta_1\xi)=EE_b(y\xi^2\exp(\beta_1\xi)\ \big|\ \ \xi)=E\xi^2\exp(\beta_1\xi)\lambda(b_0,b_1)=\exp(b_0)E\xi^2\exp((\beta_1+b_1)\xi),$$

$$E\exp(ax)=E\exp(a\xi+a\delta)=\exp\left(\frac{a^2\sigma_\delta^2}{2}\right)E\exp(a\xi),$$

$$Ex\exp(ax)=E\xi\exp(a\xi)E\exp(a\delta)+E\exp(a\xi)E\delta\exp(a\delta)=\exp\left(\frac{a^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\left(E\xi\exp(a\xi)+a\sigma_\delta^2 E\exp(a\xi)\right).$$

Оскільки $\delta\sim N(0,\sigma_\delta^2),$ то з рівності $E\exp(r_m\delta)=\exp\left(\frac{r_m^2\sigma_\delta^2}{2}\right)$ маємо $E\delta^2\exp(r_m\delta)=\frac{d^2}{dr_m^2}E\exp(r_m\delta)=\left(r_m^2\sigma_\delta^4+\sigma_\delta^2\right)\exp\left(\frac{r_m^2\sigma_\delta^2}{2}\right).$ Усі наведені математичні сподівання скінченні згідно умови 3 теореми 4.1.

Розглянемо умову 1 леми 5.1. Те, що $S_C(y_i,x_i,\cdot,1)\in C^1(\Theta)$ майже напевно, випливає з вигляду цієї вектор-функції; належність до класу $\acute{N}^1(\Theta)$ означає, що неперервна диференційованість виконується на деякій відкритій множині, що містить Θ. Тепер введемо норму в R^2: $\|z\|=|z_1|+|z_2|,\ \ z\in R^2.$ Обмежимо наступне математичне сподівання, використовуючи незалежність ξ та δ і нормальний розподіл δ та нерівність $E|\delta|\exp(\beta_1\delta)\le\sigma_\delta\exp(\beta_1^2\sigma_\delta^2),$ яка випливає з нерівності Коші-Шварца:

$$E_b\|S_C(y,x,\beta,1)\|=E_b\left|y-\exp\left(\beta_0+\beta_1\xi+\beta_1\delta-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\right|+E_b\left|y\xi+y\delta-(\xi+\delta-\beta_1\sigma_\delta^2)\exp\left(\beta_0+\beta_1\xi+\beta_1\delta-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\right|\le$$

$$\le E_b|y|+\exp\left(\beta_0-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)E\exp(\beta_1\delta)E\exp(\beta_1\xi)+E_b y|\xi|+E|\delta|E_b y+$$

$$+\exp\left(\beta_0-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\left(E\exp(\beta_1\delta)E|\xi|\exp(\beta_1\xi)+E|\delta|\exp(\beta_1\delta)E\exp(\beta_1\xi)+|\beta_1|\sigma_\delta^2 E\exp(\beta_1\delta)E\exp(\beta_1\xi)\right).$$

Усі вирази в правій частині нерівності за умовою 3 теореми 4.1 обмежені зверху. Таким чином, $E_b\|S_C(y,x,\beta,1)\|<\infty.$

В умові 2 леми 5.1 функція

$S_\infty(\beta,b):=E_bS_C(y,x,\beta,1)=E_bS_C^{(1)}(y,x,\beta)=E_bE_b\left(S_{\dot N}^{(1)}(y,x,\beta)\middle|\, y,\xi\right)=E_bS^{(1)}(y,\xi,\beta)=E_b(y-\lambda(\beta))(1;\xi)^T=$

$=\begin{pmatrix}E\exp(b_0+b_1\xi)-E\exp(\beta_0+\beta_1\xi)\\ E\xi\exp(b_0+b_1\xi)-E\xi\exp(\beta_0+\beta_1\xi)\end{pmatrix}$ неперервна по $\beta=(\beta_0;\beta_1)^T$ на Θ.

Перевіримо умову 3 леми 5.1. Матриця Якобі

$\dfrac{\partial S_C^{(1)}(y,x,\beta)}{\partial\beta^T}=\exp\left(\beta_0+\beta_1x-\dfrac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\begin{pmatrix}-1 & -(x-\beta_1\sigma_\delta^2)\\ -(x-\beta_1\sigma_\delta^2) & \sigma_\delta^2-(x-\beta_1\sigma_\delta^2)^2\end{pmatrix}=(a_{ij})_{i,j=1}^2$ є 2×2 матриця. Будемо використовувати матричну норму $\|A\|=\sum_{i,j=1}^2|a_{ij}|$.

Обмежимо математичне сподівання норми цієї матриці зверху, використовуючи умову 3 теореми 4.1:

$$E_b\left\|\frac{\partial S_C^{(1)}(y,x,\beta)}{\partial\beta^T}\right\|\le\exp\left(\beta_0-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)E_b(1+2|x|+2|\beta_1|\sigma_\delta^2+\sigma_\delta^2+2x^2+2\beta_1^2\sigma_\delta^4)\exp(\beta_1x)<\infty.$$

Розглянемо умову 4 леми 5.1. Матриця Якобі

$$\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}=\begin{pmatrix}-E\exp(\beta_0+\beta_1\xi) & -E\xi\exp(\beta_0+\beta_1\xi)\\ -E\xi\exp(\beta_0+\beta_1\xi) & -E\xi^2\exp(\beta_0+\beta_1\xi)\end{pmatrix}$$

є симетричною.

Вимагаємо невиродженість матриці $V:=\left.\dfrac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=b}=\dfrac{\partial S_\infty(b,b)}{\partial\beta^T}$, тобто $\det\dfrac{\partial S_\infty(b,b)}{\partial\beta^T}=e^{2b_0}\begin{vmatrix}-Ee^{b_1\xi} & -E\xi e^{b_1\xi}\\ -E\xi e^{b_1\xi} & -E\xi^2e^{b_1\xi}\end{vmatrix}\ne0.$ Це забезпечується умовою 4 теореми 4.1, а саме $D\xi>0$, тому що з нерівності Коші-Шварца випливає, що

$$\left(E\xi\exp(b_1\xi)\right)^2=\left(E\xi\exp\left(\frac{b_1\xi}{2}\right)\exp\left(\frac{b_1\xi}{2}\right)\right)^2<E\xi^2\exp(b_1\xi)E\exp(b_1\xi),\tag{10}$$

якщо $\xi\exp\left(\dfrac{b_1\xi}{2}\right):\exp\left(\dfrac{b_1\xi}{2}\right)=\xi$ не є константою майже напевно, тобто якщо $D\xi>0.$

Для перевірки умови 5 леми 5.1 розв'яжемо систему рівнянь стосовно β: $S_\infty(\beta,b)=0$, або

$$\begin{cases}E\exp(b_0+b_1\xi)-E\exp(\beta_0+\beta_1\xi)=0,\\ E\xi\exp(b_0+b_1\xi)-E\xi\exp(\beta_0+\beta_1\xi)=0.\end{cases}$$

Якщо $\beta=b,$ то $S_\infty(b,b)=0.$

Припустимо, що існує таке $\beta\ne b,$ що $S_\infty(\beta,b)=0,$ позначимо $f(\beta)=S_\infty(\beta,b).$ Розглянемо $g(t)=(f(tb+(1-t)\beta),b-\beta),$ тоді за припущенням $g(0)=g(1)=0.$ За теоремою Ролля існує таке $\tau\in(0,1),$ що $g'(\tau)=0$ і

$$(b-\beta)^T\left(\left.\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=\bar b}\right)(b-\beta)=0,\tag{11}$$

де точка $\bar b\in(b;\beta)$. З (10) випливає, що $\det\dfrac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}>0$ внаслідок умови 4 теореми 4.1. Звідси, використовуючи критерій Сильвестра, остаточно отримаємо $\left.\dfrac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=\bar b}<0$ для всіх $b\in\Theta,$ це веде до суперечності з рівністю (11).

Таким чином, рівняння $S_\infty(\beta,b)=0$ має єдиний розв'язок на Θ. Крім того, $S_\infty(\beta,b)=0$ тоді і тільки тоді, коли $\beta=b.$

Розглянемо умову 6 леми 5.1. Для того, щоб показати, що $\sup\limits_{\beta\in\Theta}\|\Phi_n(\beta)\|\xrightarrow{P1}0,$ оцінимо

$$\|\Phi_n(\beta)\|\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\|S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\|\ \le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^2\sup_{q_n\le\gamma_n\le1,\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial S_k(y_i,x_i,\beta,\gamma_n)}{\partial q}\right||q_n-1|,$$

$$|q_n-1|\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^2\sup_{1-\tilde\delta\le\gamma\le1,\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial S_k(y_i,x_i,\beta,\gamma)}{\partial q}\right|\to0,\ n\to\infty.$$

Вимагаємо, щоб для кожного $k=1,2$ $\exists\tilde\delta>0:\ E\sup\limits_{1-\tilde\delta\le\gamma\le1,\beta\in\Theta}\left|\dfrac{\partial S_k(y_i,x_i,\beta,\gamma)}{\partial q}\right|<\infty.$

Диференціюючи $S_C^{(q)}(y,x,\beta)$ за q, отримаємо вектор. Для першої компоненти ($k=1$) маємо :

$$\frac{\partial S_1(y,x,\beta,q)}{\partial q}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m\left(y!\right)^{q-1}y}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y+1)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y+1)^2}{2}\right)+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m(y!)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}\right)\times\left(y\ln y!+(\beta_1^2\sigma_\delta^2 m-\beta_0-\beta_1 x)y^2+\beta_1^2\sigma_\delta^2(1-q)y^3\right)-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m\left(y!\right)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y+2)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y+2)^2}{2}\right)-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m(y!)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y+1)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y+1)^2}{2}\right)\left(\ln y!+(\beta_1^2\sigma_\delta^2 m+\beta_1^2\sigma_\delta^2-\beta_0-\beta_1 x)y+\beta_1^2\sigma_\delta^2(1-q)y^2\right).$$

Оцінимо $x\le|x|\le|\xi|+|\delta|,\ |\beta_0|\le C_0,\ |\beta_1|\le C_1$ та

$$E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+\beta_1(m+(1-q)y)|\delta|\right)\le E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+\beta_1(m+(1-q)y)\delta\right)+$$

$$+E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}-\beta_1(m+(1-q)y)\delta\right)\le 2E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+|\beta_1|(m+(1-q)y)\delta\right).$$

Із рівностей в лемі 5.2 та $\delta=\sigma_\delta\tau$, де $\tau\sim N(0,1)$, випливають нерівності

$$E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+|\beta_1|(m+(1-q)y)\delta\right)\le C_1\sigma_\delta(m+(1-q)y)\sqrt{\frac{2}{\pi}}+1,$$

$$E\sup_{|\beta_1|\le C_1}|\delta|\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+|\beta_1|(m+(1-q)y)\delta\right)\le\frac{C_1^2\sigma_\delta^3(m+(1-q)y)^2}{\sqrt{2\pi}}+C_1\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)+\sigma_\delta\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Використовуючи формулу (9), умови 2 і 3 теореми 4.1, формули суми геометричної прогресії та дії над степеневими рядами, отримаємо $E\sup_{1-\tilde\delta\le q\le 1,\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial S_1(y,x,\beta,q)}{\partial q}\right|<\infty.$

Аналогічно оцінюється друга компонента $\frac{\partial S_2(y,x,\beta,q)}{\partial q}$.

Розглянемо умову 7 леми 5.1. Нехай n_0 – такий номер, що при всіх $n\ge n_0$ виконується $q_n\ge 1-\tilde\delta$. Маємо

$$\sup_{n\ge1}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial\Phi_n(\beta)}{\partial\beta^T}\right\|\le\sup_{n\ge n_0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{\beta\in\Theta,1-\tilde\delta\le q\le1}\left\|\frac{\partial}{\partial\beta^T}\left(S_C(y_i,x_i,\beta,q)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)\right\|+$$
$$\sup_{n<n_0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial}{\partial\beta^T}\left(S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)\right\|.$$

Доданок $\sup_{n<n_0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial}{\partial\beta^T}\left(S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)\right\|$ скінченний майже напевно.

Розглянемо

$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y,x,\beta,q)-\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y,x,\beta,1)\right)_{11}=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+(1-q)y)(q-1)^m y(y!)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}\right)-$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+(1-q)y+1)(q-1)^m(y!)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y+1)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y+1)^2}{2}\right)+\exp\left(\beta_0+\beta_1 x-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right).$$

Аналогічно міркуванням перевірки умови 6 леми 5.1 встановлюється скінченність математичного сподівання, але істинне значення параметра таке, яке присутнє у виразі для λ.

Безпосередньо перевіряється, що при всіх $k,l=1,2$

$$E\sup_{\beta\in\Theta,1-\tilde\delta\le q\le1}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y_i,x_i,\beta,q)-\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)_{kl}\right|<\infty,$$

де елемент $\left(\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y_i,x_i,\beta,q)-\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)_{kl}$ знаходиться в k – му рядку і в l – му стовпчику матриці 2×2 .

Тоді $\sup\limits_{n\ge1}\sup\limits_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial\Phi_n(\beta)}{\partial\beta^T}\right\|<\infty$ майже напевно.

Усі умови леми 5.1 перевірені, і твердження теорем 4.1 та 4.2 виконуються за лемою 5.1.

5. Додаток

Лема 5.1. ([1]). *Нехай (Ω,F,P) – імовірнісний простір, Θ – компактна підмножина R^m. Спостерігаються незалежні однаково розподілені в R^k випадкові вектори Z_i, $i=\overline{1,n}$, розподіл яких залежить від $\beta\in\Theta$. Для заданої борелевої функції $q:\Theta\times R^k\to R^m$ розглянемо $S_n(\beta)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}q(\beta,Z_i)$, $\beta\in\Theta$. Нехай істинне значення параметра β дорівнює b, причому b є внутрішньою точкою Θ.*

Нехай виконуються наступні умови:

1. *$q(\cdot,Z)\in C^1(\Theta)$ майже напевно; $E_b\|q(\beta,Z)\|<\infty$, $\beta\in\Theta$.*
2. *Функція $S_\infty(\beta,b):=E_bq(\beta,Z)$ неперервна за β на Θ.*
3. *$E_b\left\|\frac{\partial q(\beta,Z)}{\partial\beta^T}\right\|<\infty$, $\beta\in\Theta$.*
4. *$V:=\left.\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=b}$ – невироджена матриця.*
5. *$S_\infty(\beta,b)=0$, $\beta\in\Theta$, тоді і тільки тоді, коли $\beta=b$.*

Нехай випадкові вектор-функції $\Phi_n(\beta)=\Phi_n(\beta,\omega)$, $n\ge1$, із значеннями в R^m задовольняють умови:

6. *Для всіх $\beta\in\Theta$: $\Phi_n(\beta)\to0$ з ймовірністю 1 при $n\to\infty$, $\Phi_n(\cdot)\in C^1(\Theta)$ майже напевно.*
7. *$\sup\limits_{n\ge1}\sup\limits_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial\Phi_n(\beta)}{\partial\beta^T}\right\|<\infty$ майже напевно.*

Тоді мають місце наступні твердження:
a) зрештою існує розв'язок оціночного рівняння $S_n(\beta)+\Phi_n(\beta)=0$, $\beta\in\Theta$;
b) оцінка $\hat\beta_n$ параметра β, для якої зрештою виконується $S_n(\hat\beta_n)+\Phi_n(\hat\beta_n)=0$, є строго консистентною.

Лема 5.2. *Нехай $\tau\sim N(0,1)$. Тоді мають місце рівності*

$$E\sup_{|b|\le C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+b\tau\right)=C\sqrt{\frac{2}{\pi}}+1,\quad E\sup_{|b|\le C}|\tau|\exp\left(-\frac{b^2}{2}+b\tau\right)=\frac{C^2}{\sqrt{2\pi}}+C+\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Доведення леми 5.2. Якщо $|t|\le C,$ то $\sup\limits_{|b|\le C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)$ досягається при $b=t$, а для $|t|\ge C$ при $|b|=C$. Розглянемо

$$E\sup_{|b|\le C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+b\tau\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\le C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-C}^{C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\le C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\le C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\le C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-C}^{C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}+t^2\right)dt+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{C^2}{2}-Ct\right)dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{C^2}{2}+Ct\right)dt=C\sqrt{\frac{2}{\pi}}+1.$$

Аналогічними міркуваннями встановлюється інша рівність леми.

6. Висновки

Вивчено пуассонівську структурну модель регресії з нормально розподіленою похибкою вимірювання за умови, що дисперсія σ_δ^2 похибки вимірювання відома. Щоб оцінити невідомий параметр $b=(b_0;b_1)^T$, побудовано виправлену $T(q)$ –вірогідну оцінку. Дано достатні умови її строгої консистентності.

1. Усольцева О.С.. Конзистентна оцінка в моделі тривалості життя з цензурованими спостереженнями за наявності похибок вимірювання // Теорія ймовірностей та математична статистика – 2010. – 82, С. 156-162. 2. Carrol R.J., Ruppert D., Stefanski L.A.. Measurement error in nonlinear models. – Chapman&Hall, London, 1995. 3. Cheng C.-L., Schneeweiss H.. Polynomial regression with errors in the variables // J. R. Statistical Society B – 1998. – 60, pp. 189-199. 4. Ferrari D., Yang Y.. Maximum L_q –likelihood Estimation // Annals of Statistics – 2010. – 38. P. 753 – 783. 5. Kukush A., Markovsky I., Van Huffel S. Consistent adjusted least squares estimator for errors-in-variables model $AXB=C$ // Metrika – 2003. – 57.– P. 253-285. 6. Kukush A., Schneeweiss H. Comparing different estimators in a non-linear measurement error model // I. Mathematical Methods of Statistics – 2005. – 14. – P. 53-79.

Надійшла до редколегії 29.10.11