ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ. Ми отримали факторизацію матричних інтегральних операторів перетворень Вольтерра та Фредгольма, які тісно пов'язані з основними об'єктами оберненої задачі розсіяння [10–12] та методом одягання Захарова-Шабата [4]. Твердження 1 та 2, а також Теорема 1 для матричних інтегральних операторів перетворень є узагальненнями відповідних тверджень з [9]. Окремим питанням стоїть застосування отриманих результатів (зокрема, Теореми 1) для інтегрування матричних нелінійних рівнянь математичної фізики з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса [14]. Цьому питанню будуть присвячені наші подальші дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Беркела Ю.Ю., Сидоренко Ю.М. Теореми типу Дарбу і оператори перетворень для нелокально редукованої ермітової ієрархії Кадомцева--Петвіашвілі (Hk-cKP) // Матем. Студії. – 2006. – Т.25, №1. – С. 38–64. 2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц – М.: Наука, 1967. – 576 С. 3. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи – М.:Наука, 1980. – 320 с. 4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – Т.8, №3. – с. 43–53. 5. Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры – Киев: Наук. думка, 1986. – 156 с. 6. Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Доповіді НАН України. – 1999. – №8. – С.19–23. 7. Самойленко А.М., В.Г. Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр.мат.журн. – 1999. – Т.51, №1. – С.78–97. 8. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса // Вісн. Київ. націон. ун-ту ім.Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – Вип. 22. – С.32–35. 9. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Факторизація інтегральних операторів та нелінійні інтегровні моделі, І. // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2012. – Вип. 77. – С. 20–48. 10. Сидоренко Ю. Конструктивний метод побудови оператора розсіяння для нестаціонарної гіперболічної системи рівнянь // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2010. – Вип. 72. – С. 263–274. 11. Сидоренко Ю.М., Починайко М.Д., Чвартацький О.І. Обернена задача розсіяння для просторово-двовимірної системи Дірака і метод бінарних перетворень // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2010. – №287: Серія фізико-математичні науки. – С. 28–59. 12. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Оператори перетворень для гіперболічної системи двох рівнянь. // Математичний вісник НТШ – 2010. – Том 7 – С. 289–317. 13. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. Інтегрування скалярної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі методом інтегральних перетворень типу Дарбу// Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2011. – Вип.75 – С.181–225. 14. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. Матричні узагальнення інтегровних систем з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса // Карпатські математичні публікації – 2012. – Том 3, №2 – С. 125–144. 15. Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с. 16. Cheng Yi. Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy // J. Math. Phys. – 1992. – Vol.33. – P. 3774–3787. 17. Crum M.M. Associated Sturm - Liouville systems // Quart. J. Math. Oxford – 1955. – V.2, №6 – P.121–127. 18. Darboux G. Lecons sur la Theorie Generale de Surface et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal II. – Gauthiers-Villars, Paris, 1889 – 210 p. 19. Dickey L.A. Soliton equations and Hamiltonian systems. Adv. Math. Phys., 1991. – V.12. – 310 p. 20. Konopelchenko B., Sidorenko J., Strampp W. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems // Phys. Lett. A. – 1991. – V.157. – P.17–21. 21. Liu X., Lin R., Jin B., Zeng Yu. A generalized dressing approach for solving the extended KP and the extended mKP hierarchy // J. Math. Phys. – 2009. – V.50 – 053506-1 – 053506-14. 22. Matveev V.B. Darboux transformations and explicit solutions of the Kadomtsev-Petviashvily equation depending on the functional parameters. // Lett. Math. Phys. – V.3. – 1979. – P.213–216. 23. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons – Berlin Heidelberg,Springer-Verlag, 1991. – 120 P. 24. Melnikov V.K. On equations for wave interactions // Lett. Math. Phys. – 1983. – Vol.7, No 2. – P. 129–136. 25. Melnikov V.K. A direct method for deriving a multi-soliton solution for the problem of interaction of waves on the x,y plane. // Commun. Math. Phys. – 1987. – Vol. 112, No. 4 – P. 639–652. 26. Oevel W., Schief W. Darboux Theorems and the KP Hierarchy // Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations. (ed. P.A. Clarkson) – 1993. – P. 193–205. 27. Oevel W., Strampp W. Wronskian solutions of the constrained KP hierarchy // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37 – P.6213–6219. 28. Sidorenko J., Strampp W. Symmetry constraints of the KP-hierarchy // Inverse Problems. – 1991. – V.7. – P. L37–43. 29. Sidorenko J., Strampp W. Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvilli hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – V. 34, №4. – P.1429–1446. 30. Sydorenko Yu.M. Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations // Матем. студії. – 2003. – Т.19, №2. – С.181–192.

Надійшла до редколегії 25.10.12

А. Чвартацкий, асп

ФАКТОРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ.

Получена факторизация матричних интегральных операторов бинарных преобразований Вольтера конечного порядка. Профакторизировано матричный оператор преобразования Фредгольма конечного ранга с помощью матричных фредгольмовских операторов преобразований ранга 1. Приведено использование в теории нелинейных интегрируемых моделей.

O.Chvartatskyi, PhD graduate

FACTORIZATION OF INTEGRAL OPERATORS AND NONLINEAR INTEGRABLE EQUATIONS, II

A factorization of the matrix integral Volterra operator of binary transformations is obtained. Matrix finite rank Fredholm integral transformation operators are decomposed into the first rank Fredholm transformation operators. Applications to the theory of nonlinear integrable systems are demonstrated.

УДК 517.977

А. Сукретна, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: sukretna@gmail.com

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОБМЕЖЕНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Для задачі оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для хвильового процесу отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування виходить на обмеження, та побудовано оптимальний синтез у цьому випадку. Запропоновано закон наближеного усередненого синтезу, що забезпечує близьку до оптимальної поведінку керованої системи.

ВСТУП. Робота є продовженням циклу праць [3, 7, 8], в яких досліджуються задачі оптимального керування з напіввизначеними критеріями якості для процесів, що описуються крайовими задачами для гіперболічних рівнянь зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. На відміну від праць [3, 8] у даній статті аналізується задача з обмеженнями на керування. А саме, розглянуто випадок, коли оптимальне керування виходить на обмеження та має єдину точку переключення (випадок, коли керування сходить з обмеження, розглянуто у [7]). За цих умов побудовано оптимальне програмне керування та оптимальне керування у формі зворотного зв'язку. Крім того, оскільки отриманий оптимальний синтез не є зручним з точки зору практичного використання (задається за допомогою нескінченних рядів та нерегулярно залежить від малого параметру), у даній статті запропоновано та обґрунтовано закон наближеного усередненого синтезу, що має необхідні екстремальні властивості.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon \in (0,\ 1)$ керований процес у циліндрі $\overline{Q_T} = \Omega \times [t_0,\ T]$ описується крайовою задачею для хвильового рівняння

$$\begin{cases} y^\varepsilon_{tt}(x,t) = A^\varepsilon\left(y^\varepsilon(x,t)\right) + g^\varepsilon(x)v(t), \ \ (x,t)\in Q_T, \\ y^\varepsilon(x,t) = 0, \ \ x\in\partial\Omega, \ \ t\in[t_0,T], \\ y^\varepsilon\left(x,t_0\right) = \varphi_0^\varepsilon(x), \ \ y_t^\varepsilon\left(x,t_0\right) = \varphi_1^\varepsilon(x), \ \ x\in\Omega; \end{cases} \tag{1}$$

де $A^\varepsilon := div\left(a^\varepsilon \vec{\nabla}\right)$, $a^\varepsilon = a^\varepsilon(x)$ – вимірна симетрична матриця розмірності $n\times n$, яка задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості, $g^\varepsilon,\ \varphi_1^\varepsilon \in L_2(\Omega),\ \ \varphi_0^\varepsilon \in H_0^1(\Omega),\ \ t_0 \ge 0,\ \ T > t_0$ – довільні фіксовані моменти часу.

На керування накладено обмеження

$$v \in U = \left\{v\in L_2\left(t_0,T\right):\ |v(t)| \le \xi \ \ \text{м.с. на} \ \ [t_0,T]\right\}. \tag{2}$$

Задача оптимального керування полягає у мінімізації критерію якості

$$J(v) = \beta\left(\int_\Omega q_1^\varepsilon(x) y_t^\varepsilon(x,T)dx - \psi_1\right)^2 + \int_{t_0}^T v^2(t)dt, \tag{3}$$

де $\beta > 0,\ \ \psi_1\in R,\ \ q_1^\varepsilon \in L_2(\Omega)$.

Відомо, що при довільному керуванні $v\in U$ крайова задача (1) має єдиний розв'язок $y^\varepsilon \in C\left([t_0,T];\ L_2(\Omega)\right)$ [4]. Крім того, задача оптимального керування (1)–(3) має єдиний розв'язок [5].

У подальшому для побудови наближеного синтезу нам знадобиться додаткова інформація про залежність коефіцієнтів задачі (1)–(3) від малого параметру. Тому будемо вважати виконаним таке припущення

Припущення 1. *Нехай мають місце наступні збіжності коефіцієнтів задачі оптимального керування (1)–(3):*

$$\begin{gathered} g^\varepsilon \to g^0,\ \ \varphi_0^\varepsilon \to \varphi_0^0,\ \ \varphi_1^\varepsilon \to \varphi_1^0,\ \ q_1^\varepsilon \to q_1^0 \ \ \textit{слабко в} \ \ L_2(\Omega) \ \ \textit{при} \ \ \varepsilon\to 0; \\ a^\varepsilon \to a^0 \ \ \textit{при} \ \ \varepsilon \to 0 \ \ \textit{в сенсі} \ \ G\textit{-збіжності матриць} \end{gathered} \tag{4}$$

(стосовно G-збіжності матриць див. [1]).

Використовуючи граничні функції в (4), надалі можемо вважати, що задача оптимального керування (1)–(3) визначена також і при $\varepsilon = 0$ (так звана усереднена задача).

ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ. Для побудови оптимального синтезу задачі (1)–(3) у явному вигляді скористаємося прийомом із статтей [3, 7, 8] і спочатку перейдемо від задачі оптимального керування для системи з розподіленими параметрами (1)–(3) до нескінченновимірної задачі оптимального керування в термінах коефіцієнтів Фур'є вихідної задачі.

Введемо до розгляду спектральну задачу

$$\begin{cases} A^\varepsilon X + \mu X = 0, \ \ x\in\Omega, \\ X(x) = 0, \ \ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Відомо [9], що спектральна задача (5) має послідовність власних чисел $0 \le \left(\lambda_1^\varepsilon\right)^2 \le \left(\lambda_2^\varepsilon\right)^2 \le \ldots \le \left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2 \le \ldots$, для яких $\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2 \to \infty,\ \ k\to\infty$, при цьому відповідні власні функції $\left\{X_k^\varepsilon(x)\right\}_{k=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ утворюють ортономований базис у просторі $L_2(\Omega)$ і ортогональний базис у просторі $H_0^1(\Omega)$. Також будемо вимагати виконання наступного припущення

Припущення 2. *Спектр усередненого оператора* $A^0 = div\left(a^0\vec{\nabla}\right)$ *простий, тобто* $0 \le \left(\lambda_1^0\right)^2 < \left(\lambda_2^0\right)^2 < \ldots < \left(\lambda_k^0\right)^2 < \ldots$

Розкладемо всі функції задачі (1) – (3) у ряди Фур'є за власним базисом $\left\{X_k^\varepsilon(x)\right\}_{k=1}^\infty$:

$$\begin{gathered} y^\varepsilon(x,t) = \sum_{k=1}^\infty y_k^\varepsilon(t) X_k^\varepsilon(x), \quad y_k^\varepsilon(t) = \left(y^\varepsilon(\cdot,t), X_k^\varepsilon\right); \\ g^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^\infty g_k^\varepsilon X_k^\varepsilon(x), \quad g_k^\varepsilon = \left(g^\varepsilon(\cdot), X_k^\varepsilon\right); \\ \varphi_0^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_{0k}^\varepsilon X_k^\varepsilon(x), \quad \varphi_{0k}^\varepsilon = \left(\varphi_0^\varepsilon(\cdot), X_k^\varepsilon\right); \quad \varphi_1^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_{1k}^\varepsilon X_k^\varepsilon(x), \quad \varphi_{1k}^\varepsilon = \left(\varphi_1^\varepsilon(\cdot), X_k^\varepsilon\right); \\ q_1^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^\infty q_{1k}^\varepsilon X_k^\varepsilon(x), \quad q_{1k}^\varepsilon = \left(q_1^\varepsilon(\cdot), X_k^\varepsilon\right); \end{gathered} \tag{6}$$

де тут і далі $(\ \cdot, \cdot\ )$ – скалярний добуток у просторі $L_2(\Omega)$. Тоді у термінах коефіцієнтів Фур'є (6) задача оптимального керування (1) – (3) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases} \ddot{y}_k^\varepsilon(t) + \left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2 y_k^\varepsilon(t) = g_k^\varepsilon v(t), \\ y_k^\varepsilon\left(t_0\right) = \varphi_{0k}^\varepsilon, \ \ \dot{y}_k^\varepsilon\left(t_0\right) = \varphi_{1k}^\varepsilon; \end{cases} \tag{7}$$

$$v\in U, \tag{8}$$

$$J(v) = \beta\left(\sum_{k=1}^\infty q_{1k}^\varepsilon \dot{y}_k^\varepsilon(T) - \psi_1\right)^2 + \int_{t_0}^T v^2(t)dt \to \inf. \tag{9}$$

Задача (7) – це задача Коші для лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, а тому для всіх $k \geq 1$ і $v \in U$ має єдиний розв'язок. Крім того, неважко переконатися у справедливості наступних оцінок

$$\begin{aligned} \left(y_k^\varepsilon(t)\right)^2 &\leq 3\left[\left(\varphi_{0k}^\varepsilon\right)^2 + \frac{1}{\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2}\left(\varphi_{1k}^\varepsilon\right)^2 + \frac{T-t_0}{\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2}\left(g_k^\varepsilon\right)^2 \int_{t_0}^T v^2(s)ds\right], \\ \left(\dot{y}_k^\varepsilon(t)\right)^2 &\leq 3\left[\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2\left(\varphi_{0k}^\varepsilon\right)^2 + \left(\varphi_{1k}^\varepsilon\right)^2 + \left(T-t_0\right)\left(g_k^\varepsilon\right)^2 \int_{t_0}^T v^2(s)ds\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Оцінки (10) та рівність Парсеваля дають змогу записати оцінки для розв'язків крайової задачі (1):

$$\begin{gathered} \left\|y^\varepsilon(t)\right\|^2 \leq 3\left[\left\|\varphi_0^\varepsilon\right\|^2 + \frac{1}{\left(\lambda_1^\varepsilon\right)^2}\left\|\varphi_1^\varepsilon\right\|^2 + \frac{T-t_0}{\left(\lambda_1^\varepsilon\right)^2}\left\|g^\varepsilon\right\|^2 \int_{t_0}^T v^2(s)ds\right], \qquad \left\|y^\varepsilon(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 3\left[\left\|\varphi_0^\varepsilon\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\varphi_1^\varepsilon\right\|^2 + \left(T-t_0\right)\left\|g^\varepsilon\right\|^2 \int_{t_0}^T v^2(s)ds\right], \\ \left\|y_t^\varepsilon(t)\right\|^2 \leq 3\left[\left\|\varphi_0^\varepsilon\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\varphi_1^\varepsilon\right\|^2 + \left(T-t_0\right)\left\|g^\varepsilon\right\|^2 \int_{t_0}^T v^2(s)ds\right]. \end{gathered} \tag{11}$$

Відмітимо, що оцінки (11) можна отримати для розв'язків крайової задачі (1) безпосередньо (не переходячи до відповідних коефіцієнтів Фур'є).

Для розв'язання задачі оптимального керування для нескінченновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь (7)–(9) скористаємося еквівалентною задачею оптимального керування, в якій керований процес описується звичайним диференціальним рівнянням.

Введемо позначення

$$\begin{gathered} a^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^\infty q_{1k}^\varepsilon\left[-\lambda_k^\varepsilon \sin\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right)y_k^\varepsilon(t) + \cos\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right)\dot{y}_k^\varepsilon(t)\right] = \left(R_0(\cdot,t),\ y^\varepsilon(\cdot,t)\right) + \left(R_1(\cdot,t),\ \dot{y}^\varepsilon(\cdot,t)\right), \\ \alpha^\varepsilon = \sum_{k=1}^\infty q_{1k}^\varepsilon\left[-\lambda_k^\varepsilon \sin\left(\lambda_k(T-t_0)\right)\varphi_{0k}^\varepsilon + \cos\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t_0)\right)\varphi_{1k}^\varepsilon\right] = \left(R_0(\cdot,t),\ \varphi_0^\varepsilon(\cdot)\right) + \left(R_1(\cdot,t),\ \varphi_1^\varepsilon(\cdot)\right), \\ b^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^\infty g_k^\varepsilon q_{1k}^\varepsilon \cos\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right), \qquad R_0^\varepsilon(x,t) = -\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\varepsilon \sin\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right)q_{1k}^\varepsilon X_k^\varepsilon(x), \qquad R_1^\varepsilon(x,t) = \sum_{k=1}^\infty q_{1k}^\varepsilon \cos\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right)X_k^\varepsilon(x). \end{gathered} \tag{12}$$

Тоді задача (7) – (9) еквівалентна наступній задачі оптимального керування для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{cases} \dot{a}^\varepsilon(t) = b^\varepsilon(t)v(t), \quad a^\varepsilon(t_0) = \alpha^\varepsilon; \\ v \in U, \\ I(v) = \beta\left(a^\varepsilon(T) - \psi_1\right)^2 + \int_{t_0}^T v^2(s)ds. \end{cases} \tag{13}$$

Зауважимо, що внаслідок оцінок (10) та умов на коефіцієнти задачі оптимального керування (1)–(3), функції та стала в (12) означені коректно. Крім того, функція $a^\varepsilon(t)$ допускає почленне інтегрування і диференціювання та $R_0^\varepsilon \in C\left(\left[t_0,T\right];\ H^{-1}(\Omega)\right)$, $R_0^\varepsilon \in C\left(\left[t_0,T\right];\ L_2(\Omega)\right)$.

Отримана задача оптимального керування (13) детально досліджена у [2]. Використавши результати цієї праці отримуємо, що при виконанні припущень

Припущення 3. *При кожному* $\varepsilon \in [0,\ 1)$ *функція* $b^\varepsilon(t)$ *є додатною та строго монотонно зростає на* $\left[t_0,T\right]$.

Припущення 4. *При кожному* $\varepsilon \in [0,\ 1)$ *виконуються нерівності*

$$\frac{\left|\alpha^\varepsilon\right| b^\varepsilon(0)}{\gamma + \int_{t_0}^T \left(b^\varepsilon(s)\right)^2 ds} < \xi, \qquad \frac{\left|\alpha^\varepsilon\right| b^\varepsilon(T)}{\gamma + \int_{t_0}^T \left(b^\varepsilon(s)\right)^2 ds} > \xi, \qquad \alpha^\varepsilon + \xi\int_{t_0}^T b^\varepsilon(s)ds < 0. \tag{14}$$

оптимальний синтез задачі (13) має вигляд

$$u^\varepsilon\left[t,\ a^\varepsilon(t)\right] = \begin{cases} -\dfrac{\beta b^\varepsilon(t)\left[a^\varepsilon(t) + \xi\int_{\tau^\varepsilon}^T b^\varepsilon(s)ds\right]}{1 + \beta\int_t^{\tau^\varepsilon}\left(b^\varepsilon(s)\right)^2 ds}, & t \in \left[t_0,\ \tau^\varepsilon\right], \\ \xi, & t \in \left[\tau^\varepsilon,\ T\right]; \end{cases} \tag{15}$$

де $a^\varepsilon(t)$ – розв'язок задачі Коші в (13) з керуванням (15), а точка переключення τ^ε визначається з рівняння

$$\frac{\beta b^\varepsilon(\tau^\varepsilon)\left[a^\varepsilon(t) + \xi\int_{\tau^\varepsilon}^T b^\varepsilon(s)ds\right]}{1 + \beta\int_t^{\tau^\varepsilon}\left(b^\varepsilon(s)\right)^2 ds} = -\xi, \tag{16}$$

причому розв'язок рівняння (16) існує, єдиний та є сталим вздовж оптимальної траєкторії, тому це рівняння можна замінити відповідним програмним (при $t = t_0$).

Використовуючи формули (15), (16) та позначення (12), отримуємо оптимальне керування зі зворотнім зв'язком для вихідної задачі (1)–(3)

$$u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}(\cdot,\ t)\right]=\begin{cases}-\dfrac{\beta b^{\varepsilon}(t)\left[\left(R_0(\cdot,t),\ y^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\left(R_1(\cdot,t),\ \dot{y}^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\xi\int_{\tau^{\varepsilon}}^{T}b^{\varepsilon}(s)ds\right]}{1+\beta\int_t^{\tau^{\varepsilon}}\left(b^{\varepsilon}(s)\right)^2ds}, & t\in\left[t_0,\ \tau^{\varepsilon}\right],\\ \xi, & t\in\left[\tau^{\varepsilon},\ T\right];\end{cases} \tag{17}$$

де $y^{\varepsilon}(x,t)$ – розв'язок крайової задачі (1) з керуванням (17), а точка переключення τ^{ε} визначається з рівняння

$$\frac{\beta b^{\varepsilon}(t)\left[\left(R_0(\cdot,t),\ y^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\left(R_1(\cdot,t),\ \dot{y}^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\xi\int_{\tau^{\varepsilon}}^{T}b^{\varepsilon}(s)ds\right]}{1+\beta\int_t^{\tau^{\varepsilon}}\left(b^{\varepsilon}(s)\right)^2ds}=-\xi. \tag{18}$$

НАБЛИЖЕНИЙ УСЕРЕДНЕНИЙ СИНТЕЗ. З формул (17), (18) для оптимального керування зі зворотнім зв'язком задачі (1) – (3) видно, що коефіцієнти цього синтезу виражаються в термінах нескінченних рядів, що не є зручним з точки зору практичних застосувань у реальному часі. Крім того, наявність параметру ε, який може входити у оператор A^{ε} крайової задачі (1) нерегулярно, також може суттєво ускладнювати обчислення. Тому природно виникає задача побудови наближеного керування зі зворотнім зв'язком, яке б реалізувало близьку до оптимальної (в сенсі критерію якості (3)) поведінку керованої системи (1).

Визначимо функції

$$b_N^0(t)=\sum_{k=1}^{N}g_k^0q_{1k}^0\cos\left(\lambda_k^0(T-t)\right),\qquad R_{0N}^0(x,t)=-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^0\sin\left(\lambda_k^0(T-t)\right)q_{1k}^0X_k^0(x),\qquad R_{1N}^0(x,t)=\sum_{k=1}^{N}q_{1k}^0\cos\left(\lambda_k^0(T-t)\right)X_k^0(x),$$

$$\left(\varphi_0^0\right)_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_{0k}^0X_k^0(x),\qquad \left(\varphi_1^0\right)_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_{1k}^0X_k^0(x).$$

та побудуємо наближений усереднений синтез задачі оптимального керування (1) – (3) за формулою

$$v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}(\cdot,\ t)\right]=\begin{cases}-\dfrac{\beta b_N^0(t)\left[\left(R_{0N}^0(\cdot,t),\ z_N^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\left(R_{1N}^0(\cdot,t),\ \dot{z}_N^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\xi\int_{\tau_N^0}^{T}b_N^0(s)ds\right]}{1+\beta\int_t^{\tau_N^0}\left(b_N^0(s)\right)^2ds}, & t\in\left[t_0,\ \tau_N^0\right],\\ \xi, & t\in\left[\tau_N^0,\ T\right];\end{cases} \tag{19}$$

де $z_N^{\varepsilon}(x,t)$ – розв'язок крайової задачі (1) з керуванням (19), а точка переключення τ_N^0 визначається з рівняння

$$\frac{\beta b_N^0(t)\left[\left(R_{0N}^0(\cdot,t),\ \left(\varphi_0^0\right)_N(\cdot)\right)+\left(R_{1N}^0(\cdot,t),\ \left(\varphi_1^0\right)_N(\cdot)\right)+\xi\int_{\tau_N^0}^{T}b_N^0(s)ds\right]}{1+\beta\int_t^{\tau_N^0}\left(b_N^0(s)\right)^2ds}=-\xi. \tag{20}$$

Коректність запропонованого наближеного усередненого синтезу обґрунтовує теорема.

Теорема. *Нехай* $q_1^{\varepsilon}\in L_2(\Omega)$, $g^{\varepsilon},\varphi_1^{\varepsilon}\in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0^{\varepsilon}\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, *справедливі оцінки* $\left\|g^{\varepsilon}\right\|\le\sigma$, $\left\|\varphi_1^{\varepsilon}\right\|_{H_0^1(\Omega)}\le\phi_1$, $\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}\le\phi_0$ *при* $\varepsilon\in[0,1)$ *та виконуються припущення 1 - 4. Тоді оптимальне керування зі зворотнім зв'язком задачі (1) – (3) має вигляд (17), (18) та справджуються наступні оцінки близькості між оптимальним синтезом* $u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}\right]$ *і побудованим за формулами (19), (20) наближеним усередненим синтезом* $v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}\right]$: *для довільного малого* $\eta>0$ *знайдуться такі* $N_0\ge1$ *та* $\varepsilon_0>0$, *що для довільних* $N\ge N_0$ *і* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *виконуються нерівності*

$$\begin{gathered}\left|v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}\right]-u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}\right]\right|<\eta\ \ \text{для всіх}\ \ t\in[t_0,T],\\ \left\|z_N^{\varepsilon}(\cdot,t)-y^{\varepsilon}(\cdot,t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}<\eta\ \ \text{для всіх}\ \ t\in[t_0,T],\\ \left|J\left(v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}\right]\right)-J\left(u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}\right]\right)\right|<\eta.\end{gathered} \tag{21}$$

Для доведення теореми аналогічно до [6] можемо показати близькість точок переключення τ^{ε} і τ_N^0 та перейти до встановлення оцінок (21) на меншому часовому інтервалі, на якому керування $u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}\right]$, $v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}\right]$ задаються першими рядками формул (17), (19). Далі доведення проводиться аналогічно [3].

ВИСНОВКИ. Розглянуто задачу оптимального керування з напівввизначеним критерієм якості для хвильового рівняння. Використовуючи метод Фур'є з подальшою заміною вихідної задачі оптимального керування розподіленою системою еквівалентною задачею оптимального керування для звичайного диференціального рівняння, отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування виходить на обмеження, та побудовано оптимальне керування у формі зворотного зв'язку (синтезу) у цьому випадку. На базі побудованого оптимального синтезу сконструйований наближений усереднений синтез, який з практичної точки зору має ряд переваг, та обґрунтована коректність цього синтезу, тобто показано, що наближений синтез реалізує близьке до оптимального значення цільового функціоналу та траєкторії системи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов [Текст] / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. – М.: Физ.-мат. лит., 1993. – 464 с. 2. Капустян О. А. Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічної крайової задачі [Текст] / О. А. Капустян // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1704–1709. 3. Капустян О. В., Сукретна А. В. Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння [Текст] / О.В. Капустян, А. В. Сукретна // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 612–620. 4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с. 5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст] / Жак – Луи Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с. 6. Сукретна А. В., Капустян О. А. Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння [Текст] / А. В. Сукретна, О. А. Капустян // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 10. – С. 1384–1394. 7. Сукретна А. В. Обмежений наближений синтез оптимального керування для хвильового рівняння [Текст] / А. В. Сукретна // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 8. – С. 1094–1104. 8. Сукретна А. В. Синтез оптимального керування для хвильового рівняння з дисипацією [Текст] / А. В. Сукретна // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2012. – 28. – С. 48–52. 9. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [Text] / Roger Temam. – New York, 1997. – XXI + 650 p.

Надійшла до редколегії 31.10.11

А. Сукретная, канд. физ.-мат. наук

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Для задачи оптимального управления с полуопределенным критерием качества для волнового процесса получены условия, при выполнении которых оптимальное управление выходит на ограничения, а также построен оптимальный синтез в этом случае. Предложен закон приближенного усредненного синтеза, обеспечивающего близкое к оптимальному поведение управляемой системы.

A. Sukretna, PhD

APPROXIMATE SYNTHESIS OF BOUNDED CONTROL FOR WAVE EQUATION

A. Sukretna . For optimal control problem with semidefinite quality criterion for wave process we receive the conditions under which control is beyond the restrictions, and we construct optimal synthesis in this case. We propose approximated homogeneous synthesis law, which provides control system behavior that is closed to optimal one.

УДК 514.7:621.7

В. Волков, мол. наук. співроб.
Інститут електрозварювання імені Євгена Патона НАН України, Київ..
Email: valentinvolkov@ukr.net

ПРО ІЗОМЕТРІЇ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ

Досліджуються питання ізометрії та накладання поверхонь обертання. Основним результатом статті є необхідна та достатня умова ізометричності поверхні обертання зрізаного конусу.

ВСТУП. У багатьох випадках технічні вимоги змушують надавати оболонкам складної геометричної форми, яка впливає, поряд з властивостями конструкційних матеріалів, на міцність, стійкість та інші механічні властивості конструкції. Особливо важливі ситуації, коли тонкі оболонки піддають цілеспрямованій формозміні з метою надання їм більш компактної форми. Такі формозміни можуть бути майже оборотними, оскільки реалізуються деформуванням поверхні в плоску область за допомогою згинання, і майже зберігати довжини всіх ліній – "розгортанням" на площину. Важливість застосування в техніці розгортних поверхонь з нульовою гауссовою кривиною обумовлена і технологічними міркуваннями, а саме, зручністю їх виготовлення шляхом відповідного згинання листового матеріалу.

Введемо в тривимірному евклідовому просторі $\Re^3$ декартову систему координат (x, y, z) і визначимо скалярний добуток $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$. Нехай вектор-функція $\bar{r} = \{x = x(u, \nu), y = y(u, \nu), z = z(u, \nu)\}$ задає регулярну поверхню M^2 [1]. У фіксованій точці (u_0, ν_0) за допомогою векторів $\dfrac{\partial \bar{r}(u_0, \nu_0)}{\partial u}$ та $\dfrac{\partial \bar{r}(u_0, \nu_0)}{\partial \nu}$ визначається дотичний простір T^2. Сукупність всіх дотичних просторів у точках поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u, \nu)$ визначає дотичне розшарування. Надалі змінні на дотичному просторі $T(u, \nu)$ у точці (u, ν) позначатимемо через $du, d\nu$. На дотичному розшаруванні $T\left(M^2\right)$ визначено першу і другу квадратичні форми.

Дві поверхні називаються ізометричними, якщо існує взаємно однозначне гладке відображення поверхонь $f : M^2 \to N^2$, при якому зберігаються довжини відповідних кривих. Відомо, що у випадку, коли регулярні поверхні можна параметризувати так, що їхні перші квадратичні форми є однаковими, то ці поверхні є ізометричними.

У кожній точці регулярної поверхні за допомогою коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм визначається гауссова кривина $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$, яка, як відомо, не змінюється при ізометрії.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Основний результат статті становить наступна теорема.

Теорема. Нехай S – зрізаний конус з радіусами R_1, R_2 і кутом конусності α , а M – поверхня, яку отримано обертанням гладкої кривої $z = f(r)$ навколо осі z: $M = \{x = r\cos\nu, y = r\sin\nu, 0 \le \nu \le 2\pi\}$. Тоді поверхня M ізометрична поверхні S тоді і тільки тоді, коли $z = a(R_2 - r)$, де $R_1 \le r \le R_2$, тобто є зрізаним конусом.

При доведенні даної теореми використовується наступна лема.

Лема. Нехай на відрізку $[a, b]$ задано двічі диференційовну функцію $y = f(x)$. Якщо для всіх $x \in [a, b]$ виконується рівність $f'(x) f''(x) = 0$, то $f(x) = const$, або $f(x) = Ax + B$.