СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов [Текст] / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. – М.: Физ.-мат. лит., 1993. – 464 с. 2. Капустян О. А. Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічної крайової задачі [Текст] / О. А. Капустян // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1704–1709. 3. Капустян О. В., Сукретна А. В. Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння [Текст] / О.В. Капустян, А. В. Сукретна // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 612–620. 4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с. 5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст] / Жак – Луи Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с. 6. Сукретна А. В., Капустян О. А. Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння [Текст] / А. В. Сукретна, О. А. Капустян // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 10. – С. 1384–1394. 7. Сукретна А. В. Обмежений наближений синтез оптимального керування для хвильового рівняння [Текст] / А. В. Сукретна // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 8. – С. 1094–1104. 8. Сукретна А. В. Синтез оптимального керування для хвильового рівняння з дисипацією [Текст] / А. В. Сукретна // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2012. – 28. – С. 48–52. 9. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [Text] / Roger Temam. – New York, 1997. – XXI + 650 p.

Надійшла до редколегії 31.10.11

А. Сукретная, канд. физ.-мат. наук

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Для задачи оптимального управления с полуопределенным критерием качества для волнового процесса получены условия, при выполнении которых оптимальное управление выходит на ограничения, а также построен оптимальный синтез в этом случае. Предложен закон приближенного усредненного синтеза, обеспечивающего близкое к оптимальному поведение управляемой системы.

A. Sukretna, PhD

APPROXIMATE SYNTHESIS OF BOUNDED CONTROL FOR WAVE EQUATION

A. Sukretna . For optimal control problem with semidefinite quality criterion for wave process we receive the conditions under which control is beyond the restrictions, and we construct optimal synthesis in this case. We propose approximated homogeneous synthesis law, which provides control system behavior that is closed to optimal one.

УДК 514.7:621.7

В. Волков, мол. наук. співроб.
Інститут електрозварювання імені Євгена Патона НАН України, Київ..
Email: valentinvolkov@ukr.net

ПРО ІЗОМЕТРІЇ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ

Досліджуються питання ізометрії та накладання поверхонь обертання. Основним результатом статті є необхідна та достатня умова ізометричності поверхні обертання зрізаного конусу.

ВСТУП. У багатьох випадках технічні вимоги змушують надавати оболонкам складної геометричної форми, яка впливає, поряд з властивостями конструкційних матеріалів, на міцність, стійкість та інші механічні властивості конструкції. Особливо важливі ситуації, коли тонкі оболонки піддають цілеспрямованій формозміні з метою надання їм більш компактної форми. Такі формозміни можуть бути майже оборотними, оскільки реалізуються деформуванням поверхні в плоску область за допомогою згинання, і майже зберігати довжини всіх ліній – "розгортанням" на площину. Важливість застосування в техніці розгортних поверхонь з нульовою гауссовою кривиною обумовлена і технологічними міркуваннями, а саме, зручністю їх виготовлення шляхом відповідного згинання листового матеріалу.

Введемо в тривимірному евклідовому просторі $\Re^3$ декартову систему координат (x, y, z) і визначимо скалярний добуток $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$. Нехай вектор-функція $\bar{r} = \{x = x(u, \nu), y = y(u, \nu), z = z(u, \nu)\}$ задає регулярну поверхню M^2 [1]. У фіксованій точці (u_0, ν_0) за допомогою векторів $\frac{\partial \bar{r}(u_0, \nu_0)}{\partial u}$ та $\frac{\partial \bar{r}(u_0, \nu_0)}{\partial \nu}$ визначається дотичний простір T^2. Сукупність всіх дотичних просторів у точках поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u, \nu)$ визначає дотичне розшарування. Надалі змінні на дотичному просторі $T(u, \nu)$ у точці (u, ν) позначатимемо через $du, d\nu$. На дотичному розшаруванні $T\left(M^2\right)$ визначено першу і другу квадратичні форми.

Дві поверхні називаються ізометричними, якщо існує взаємно однозначне гладке відображення поверхонь $f : M^2 \to N^2$, при якому зберігаються довжини відповідних кривих. Відомо, що у випадку, коли регулярні поверхні можна параметризувати так, що їхні перші квадратичні форми є однаковими, то ці поверхні є ізометричними.

У кожній точці регулярної поверхні за допомогою коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм визначається гауссова кривина $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$, яка, як відомо, не змінюється при ізометрії.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Основний результат статті становить наступна теорема.

Теорема. Нехай S – зрізаний конус з радіусами R_1, R_2 і кутом конусності α, а M – поверхня, яку отримано обертанням гладкої кривої $z = f(r)$ навколо осі z: $M = \{x = r\cos\nu, y = r\sin\nu, 0 \le \nu \le 2\pi\}$. Тоді поверхня M ізометрична поверхні S тоді і тільки тоді, коли $z = a(R_2 - r)$, де $R_1 \le r \le R_2$, тобто є зрізаним конусом.

При доведенні даної теореми використовується наступна лема.

Лема. Нехай на відрізку $[a, b]$ задано двічі диференційовну функцію $y = f(x)$. Якщо для всіх $x \in [a, b]$ виконується рівність $f'(x) f''(x) = 0$, то $f(x) = const$, або $f(x) = Ax + B$.

Доведення. Позначимо через Σ множину тих точок відрізку, де $f'(x)=0$. Відомо, що Σ – замкнена множина [3]. Якщо $\Sigma=[a,b]$, то $f(x)=const$ на $[a,b]$. Якщо ж   , то у цьому випадку $f''(x)=0$ на усьому відрізку [a,b], отже, $f'(x)=const$ на $[a,b]$. Звідки випливає, що $f(x)=Ax+B$.

Припустимо, що множина $\Sigma\neq\varnothing$ і не співпадає з усім відрізком $[a,b]$. Позначимо через $W=[a,b]\setminus\Sigma$. Множина W є відкритою і, взагалі кажучи, незв'язною множиною. Очевидно, що на фіксованій компоненті зв'язності $Q\subset W$ похідна $f'(x)$ відмінна від нуля, а, отже, на цій компоненті зв'язності функція $y=f(x)$ строго зростає або спадає. Оскільки за умовою теореми $f''(x)=0$, то на цій компоненті зв'язності функція має вигляд $f(x)=Ax+B$. Таким чином, на кожній компоненті зв'язності Q множини W функція $y=f(x)$ або строго зростає, або ж строго спадає. Далі, графік функції $y=f'(x)$ на відрізку $[a,b]$ згідно умови леми є неперервною кривою. Однак, як випливає з викладених вище міркувань, на множині Σ дана функція набуває значення 0, а на кожній фіксованій компоненті зв'язності множини $W=[a,b]\setminus\Sigma$ ця функція має стале значення, яке відмінне від нуля. Таким чином, графік похідної $y=f'(x)$ є розривною кривою, що неможливо згідно припущення. Звідси випливає, що випадок, коли множини Σ та $W=[a,b]\setminus\Sigma$ одночасно не є порожніми, неможливий. Лему доведено.

Доведення теореми. Необхідність. Нехай поверхні S і M ізометричні. Оскільки зрізаний конус локально ізометричний площині, то його гаусова кривина дорівнює нулю. Отже, гауссова кривина поверхні M також дорівнює нулю. Оскільки M є поверхнею обертання, то її гауссова кривина обчислюється за формулою

$$K=\frac{f'(r)f''(r)}{r\left[1+f'^2(r)\right]^2}\quad. \tag{1}$$

На підставі доведеної вище леми маємо, що або $f(r)=const$, або ж $f(r)=Ar+B$. У першому випадку поверхня M є циліндром з колом в основі. Враховуючи крайові умови (при ізометрії межі однієї поверхні переходять в межі іншої поверхні), випадок циліндричної поверхні можна виключити з розгляду. Отже, $z=f(r)=Ar+B$. Знову, враховуючи крайові умови, знаходимо, що $z=f(r)=\alpha(R_2-r)$.

Достатність. Нехай Z – зрізаний конус із зазначеними вище граничними умовами. Очевидно, що конус Z ізометричний поверхні S. При такій ізометрії твірні першого конуса перейдуть у твірні другого конуса, що справедливо також і для паралелей. Теорему доведено.

Зауважимо, що поверхня може бути ізометрична конусу S, не будучи при цьому поверхнею обертання.

Згинанням поверхні називається така її неперервна деформація, при якій довжини кривих на поверхні не змінюються. Іншими словами, перша квадратична форма поверхні не змінюється при згинанні.

Поверхня M^2 називається незгинною, якщо всі її перетворення зводяться до руху у R^3. Прикладом такої поверхні може бути сферична поверхня, яка не допускає згинань. Поверхні M_1 і M_2 називаються накладними, якщо їх можна з'єднати за допомогою згинань S_t, $0\le t\le 1$. Проблема згинань поверхонь полягає в пошуку відповіді на питання, за яких умов задана поверхня допускає згинання або є незгинною.

Нехай S – поверхня, що утворена обертанням гладкої кривої $z=f(r)$ навколо осі z (рис.1). Скористаємося полярними координатами u,v для параметричного задання поверхні. Нехай рівняння поверхні має вигляд $x=r\cos\nu,\ y=r\sin\nu,\ z=f(r)$. Тоді її першу квадратичну форму можна записати як $ds^2=\left(1+f'^2(r)\right)dr^2+r^2d\nu^2$.

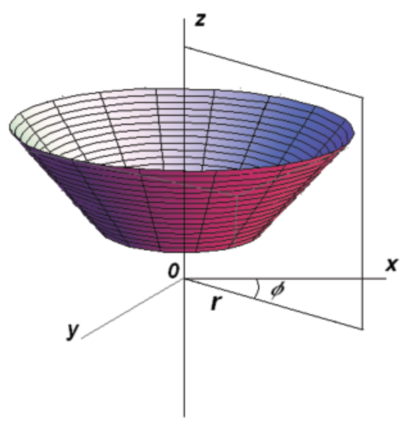

Рис. 1. Поверхня S, що утворена обертанням гладкої кривої $z=f(r)$ навколо осі z

Координатні лінії $\nu=const$ (меридіани) та $r=const$ (паралелі) утворюють ортогональну сітку. Нехай між поверхнями обертання S та M існує така ізометрія, що відповідні меридіани та паралелі переходять одна в одну.

Позначимо через (r, ν) полярні координати на поверхні S, а через (r_1, ν_1) – полярні координати на поверхні M. Очевидно, що $r_1 = const$ та $v_1 = const$. Тоді $r_1 = \varphi(r)$, $\nu_1 = \psi(\nu)$ та

$$\left(1 + f'^2(r)\right) dr^2 + r^2 d\nu^2 = \left(1 + f_1'^2(r_1)\right) dr_1^2 + r_1^2 d\nu_1^2. \tag{2}$$

Співвідношення (2) можна записати таким чином:

$$1 + f'^2(r) = \left(1 + f_1'^2(r_1)\right)\varphi'^2(r), \quad r = r_1\varphi'(\nu). \tag{3}$$

З другого рівняння (3) випливає рівність $\dfrac{r}{r_1} = \psi'(\nu) = \dfrac{1}{k} = const$. Будемо вважати, що $\psi'(\nu) = \dfrac{1}{k}$, $v_1 = \psi(\nu) = \dfrac{\nu}{k}$, $r_1 = \varphi(r) = kr$. Тоді, підставивши ці значення у першу рівність (3) і використовуючи потім рівності $f_1'(r_1) = \dfrac{df_1}{dr_1} = \dfrac{1}{k}\dfrac{df_1}{dr}$, отримуємо $1 + f'^2(r) = \left[1 + \dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{df_1}{dr}\right)^2\right]k^2$, звідки остаточно знаходимо

$$\frac{df_1}{dr} = \sqrt{1 - k^2 + f'^2(r)}.$$

Таким чином, поверхня M, що накладається на поверхню S, визначається рівняннями

$$x = kr\cos\frac{\nu}{k}, \quad y = kr\sin\frac{\nu}{k}, \quad z = \int\sqrt{1 + f'^2(r) - k^2}\,dr. \tag{4}$$

Поверхня S може намотуватися на поверхню M, покриваючи її декілька разів (при $k < 1$), або розгортуватися, покриваючи тільки частину поверхні M (при $k > 1$) [2]; для випадку зрізаного конуса значення $k = 1$. З цих міркувань, а також з теореми випливає наступне твердження.

Твердження. Для зрізаного конуса (з колом радіуса r у основі і висотою h) в класі поверхонь обертання накладною поверхнею може бути лише зрізаний конус з тими ж значеннями радіуса і висоти.

Слід зазначити, що на практиці використовуються деформації поверхонь, які близькі до згинань. На рис.2, а,б зображено результат деформації частини зрізаного прямого кругового конуса. Головні кривини поверхонь $k_1 = \dfrac{1}{R_1}$, $k_2 = \dfrac{1}{R_2}$, де R_1, R_2 – відповідно радіуси кривини меридіана і відрізок нормалі до осі обертання; $K = k_1 k_2$ – повна (гауссова) кривина. Рис. 1 ілюструє той факт, що гауссові кривини K_1, K_2 в будь-яких відповідних точках поверхонь не можуть бути рівними.

Згинання поверхонь обертання можуть мати більш складний характер; їх властивості тісно пов'язані із властивостями відображень, які використовуються при утворенні таких поверхонь. Розглянемо функцію $f(x) = x^3$, $x \in \Re$. В околі будь-якої точки $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, функція $f(x)$ задає дифеоморфне відображення, в той час, як в околі точки $x = x_0 = 0$ ця властивість не має місця: функція $f(x) = x^3$ має особливість – її диференціал в цій точці вироджується. Ця особливість є нестійкою і при малій деформації може зникнути або розпастися на дві стійкі.

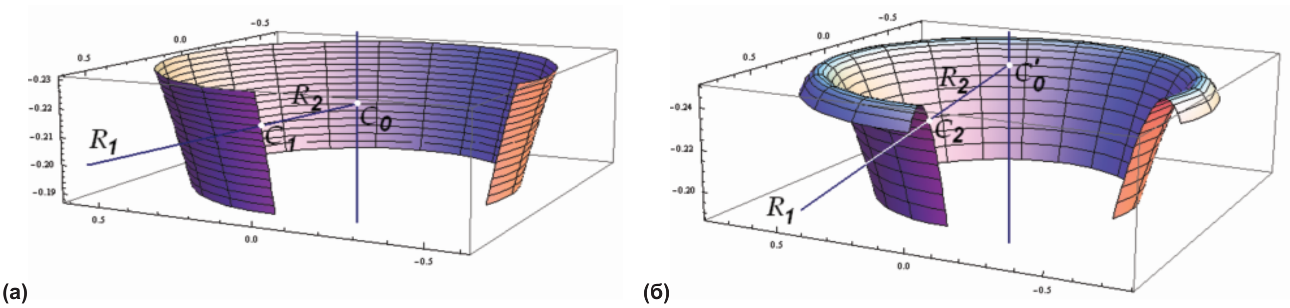

Рис. 2.: а,б. Деформація зрізаного прямого кругового конуса

Нехай поверхня $Z : \Re^2 \to \Re^3$ в тривимірному просторі отримана обертанням графіка функції $f(x) = (x - a)^3$, де $a \in \Re$. Використовуючи параметр $t \in [0; 1 + \varepsilon]$, $\varepsilon \geq 0$, запишемо деформацію функції $f(x) = (x - a)^3$ у вигляді:

$$y = t(x - a)^3 + k(x - a)(1 - t)\cdot \tag{5}$$

Позначимо Z_t поверхню, що отримана обертанням графіка функції $y = t(x - a)^3 + k(x - a)(1 - t)$ навколо осі oY. При $t = 0$ відповідна поверхня обертання Z_t є прямим круговим конусом. При $t = 1$ поверхня Z_t є поверхнею, що отримана обертанням навколо осі oY кубічної параболи $y = (x - a)^3$ (рис.3,а). Відповідно, при $t = 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ поверхня обертання Z_t (рис.3,б) задається як: графік функції

$$Z_t = (1 + \varepsilon)\left(\sqrt{x^2 - y^2} - a\right)^3 + k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)(-\varepsilon). \tag{6}$$

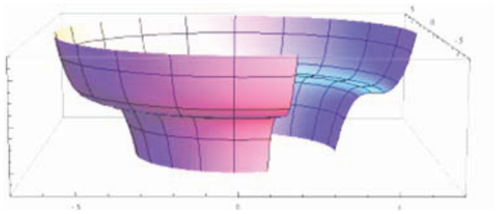

Рис.3,а Поверхня Z_t **при** $t = 1$

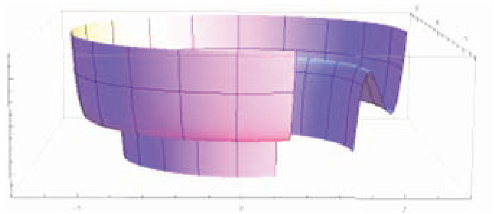

Рис.3,б Поверхня Z_t **при** $t = 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$

Як бачимо, складність геометрії поверхні Z_t пов'язана з нестійкістю визначальної функції у точці $x = a$.

У наведеному вище прикладі поверхня обертання має згинання, кількість яких може бути досить великою. Їх наявність в реальних задачах деформування призводить до певних труднощів при математичному описі, що зумовлені виникненням інтегралів, які не обчислюються у квадратурах. На практиці такі згинання можливо наближено описувати тригонометричними функціями, зокрема, функцією вигляду $y = \sin(kx)$, яка є аналітичною і може бути апроксимована поліномами, які зручно знаходити з її розкладу за формулою Тейлора в степеневий ряд засобами чисельного моделювання.

Нами розглянуто модельний приклад, в якому для опису згинань поверхні Z_t використовується функція $y = \sin(1/2\,x)$. При чисельному моделюванні за допомогою системи Wolfram Mathematica ® проведено аналіз характеру збіжності відповідного ряду Тейлора при різних порядках апроксимації поліноміальної функції.

При розкладанні в степеневий ряд функції $y = \sin(1/2\,x)$ встановлено наступну закономірність: збіжність полінома на кожному наступному відрізку кривої синусоїдальної функції, рівному її повного періоду, відповідає збільшенню порядку апроксимації на величину $\Delta n = 16$, яка є сталою на всьому досліджуваному інтервалі.

ВИСНОВКИ. Знайдено необхідні та достатні умови ізометричності поверхні обертання зрізаному конусу. Також показано, що для зрізаного конуса в класі поверхонь обертання накладною поверхнею може бути лише зрізаний конус. Описано приклад чисельного моделювання для поверхонь обертання та встановлено закономірність збіжності апроксимуючого полінома тригонометричної функції при збільшенні порядку апроксимації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Розендорн Э.Р. Теория поверхностей. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2006. – 304 с. 2. Финников С.П. Теория поверхностей. – ГТТИ, 1934 – 209 с. 3. S. Sternberg. Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall Mathematics Series, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

Надійшла до редколегії 30.04.13

В. Волков, мл. наук. сотр.

ОБ ИЗОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Исследуется вопросы изометрии и наложения поверхностей вращения. Основным результатом статьи есть необходимое и достаточное условие изометричности поверхности вращения усеченного конуса

V. Volkov, researcher

ON ISOMETRIES OF SURFACES OF REVOLUTION

The paper deals with isometry and superposition of surfaces of revolution. The main result is necessary and sufficient condition of the isometricity of the surface of revolution to the blunded cone.

УДК 512.552

В. Журавльов, доц., Т. Журавльова, асп.,
О. Зеленський, канд.фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: vshur@univ.kiev.ua

ЖОРСТКІ САГАЙДАКИ, АСОЦІЙОВАНІ З ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИМИ МНОЖИНАМИ

Наводиться критерій жорсткості сагайдака, асоційованого зі скінченною частково впорядкованою множиною.

ВСТУП. Один із важливих класів, що виникає в різних питаннях теорії кілець та теорії цілочисельних зображень, це клас черепичних порядків. З точки зору абстрактної теорії кілець черепичний порядок є первинним нетеровим напівдосконалим та напівдистрибутивним кільцем з ненульовим радикалом Джекобсона. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець. Сагайдак матриці показників співпадає з сагайдаком черепичного порядку з даною матрицею показників. Необхідні відомості про черепичні порядки містяться в [6], [7]. У [2] доведено, що кожен сагайдак, який є сагайдаком матриці показників і має хоча б одну петлю, має нескінченну кількість нееквівалентних матриць показників з таким сагайдаком. Жорсткий сагайдак має єдину з точністю до еквівалентності матрицю показників. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [4].