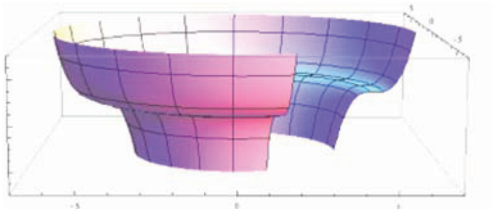

Рис.3,а Поверхня Z_t при $t = 1$

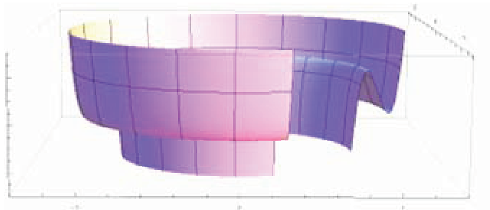

Рис.3,б Поверхня Z_t при $t = 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$

Як бачимо, складність геометрії поверхні Z_t пов'язана з нестійкістю визначальної функції у точці $x = a$.

У наведеному вище прикладі поверхня обертання має згинання, кількість яких може бути досить великою. Їх наявність в реальних задачах деформування призводить до певних труднощів при математичному описі, що зумовлені виникненням інтегралів, які не обчислюються у квадратурах. На практиці такі згинання можливо наближено описувати тригонометричними функціями, зокрема, функцією вигляду $y = \sin(kx)$, яка є аналітичною і може бути апроксимована поліномами, які зручно знаходити з її розкладу за формулою Тейлора в степеневий ряд засобами чисельного моделювання.

Нами розглянуто модельний приклад, в якому для опису згинань поверхні Z_t використовується функція $y = \sin(1/2\,x)$. При чисельному моделюванні за допомогою системи Wolfram Mathematica ® проведено аналіз характеру збіжності відповідного ряду Тейлора при різних порядках апроксимації поліноміальної функції.

При розкладанні в степеневий ряд функції $y = \sin(1/2\,x)$ встановлено наступну закономірність: збіжність полінома на кожному наступному відрізку кривої синусоїдальної функції, рівному її повного періоду, відповідає збільшенню порядку апроксимації на величину $\Delta n = 16$, яка є сталою на всьому досліджуваному інтервалі.

ВИСНОВКИ. Знайдено необхідні та достатні умови ізометричності поверхні обертання зрізаному конусу. Також показано, що для зрізаного конуса в класі поверхонь обертання накладною поверхнею може бути лише зрізаний конус. Описано приклад чисельного моделювання для поверхонь обертання та встановлено закономірність збіжності апроксимуючого полінома тригонометричної функції при збільшенні порядку апроксимації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Розендорн Э.Р. Теория поверхностей. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2006. – 304 с. 2. Финников С.П. Теория поверхностей. – ГТТИ, 1934 – 209 с. 3. S. Sternberg. Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall Mathematics Series, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

Надійшла до редколегії 30.04.13

В. Волков, мл. наук. сотр.

ОБ ИЗОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Исследуется вопросы изометрии и наложения поверхностей вращения. Основным результатом статьи есть необходимое и достаточное условие изометричности поверхности вращения усеченного конуса

V. Volkov, researcher

ON ISOMETRIES OF SURFACES OF REVOLUTION

The paper deals with isometry and superposition of surfaces of revolution. The main result is necessary and sufficient condition of the isometricity of the surface of revolution to the blunded cone.

УДК 512.552

В. Журавльов, доц., Т. Журавльова, асп.,
О. Зеленський, канд.фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: vshur@univ.kiev.ua

ЖОРСТКІ САГАЙДАКИ, АСОЦІЙОВАНІ З ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИМИ МНОЖИНАМИ

Наводиться критерій жорсткості сагайдака, асоційованого зі скінченною частково впорядкованою множиною.

ВСТУП. Один із важливих класів, що виникає в різних питаннях теорії кілець та теорії цілочисельних зображень, це клас черепичних порядків. З точки зору абстрактної теорії кілець черепичний порядок є первинним нетеровим напівдосконалим та напівдистрибутивним кільцем з ненульовим радикалом Джекобсона. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець. Сагайдак матриці показників співпадає з сагайдаком черепичного порядку з даною матрицею показників. Необхідні відомості про черепичні порядки містяться в [6], [7]. У [2] доведено, що кожен сагайдак, який є сагайдаком матриці показників і має хоча б одну петлю, має нескінченну кількість нееквівалентних матриць показників з таким сагайдаком. Жорсткий сагайдак має єдину з точністю до еквівалентності матрицю показників. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [4].

МАТРИЦІ ПОКАЗНИКІВ ТА ЇХ САГАЙДАКИ. Позначимо через $M_n(\mathbb{Z})$ кільце всіх квадратних $n \times n$ – матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Нехай $\varepsilon \in M_n(\mathbb{Z})$.

Означення 1. Матриця $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ називається матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для $i, j, k = 1, \ldots, n$ та $\alpha_{ii} = 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Ці співвідношення називаються кільцевими нерівностями. Матриця показників ε називається зведеною, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} > 0$ для $i \neq j, i, j = 1, \ldots, n$.

Нехай $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ – зведена матриця показників. Покладемо $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ та $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$ і $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min\limits_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{kj})$. З визначення γ_{ij} маємо $0 \leq \gamma_{ij} - \beta_{ij} \leq 1$.

Означення 2. Сагайдак $Q(\varepsilon)$ з матрицею суміжності $[Q(\varepsilon)] = \varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}$ називається сагайдаком зведеної матриці показників ε.

Нехай $[Q] = (q_{ij})$. Тоді маємо $q_{ij} = \min\left(1, \min\limits_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\right)$; $q_{ii} = \min\left(1, \min\limits_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right)$.

Означення 3. Дві матриці показників $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ та $\Theta = (\theta_{ij})$ називаються еквівалентними, якщо одна може бути отримана з іншої перетвореннями наступних двох типів:

(1) віднімання цілого числа від елементів i -ого рядка з одночасним додаванням до елементів i -ого стовпчика цього числа,
(2) одночасна перестановка двох рядків та стовпчиків з тими ж номерами.

Твердження 1. Нехай $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ та $\Theta = (\theta_{ij})$ є матрицями показників і Θ отримується із ε перетвореннями типу (1). Тоді $[Q(\varepsilon)] = [Q(\Theta)]$.

Нехай τ – підстановка, яка задає одночасну перестановку рядків та стовпчиків матриці показників ε при перетвореннях другого типу, тобто i -ий рядок та стовпчик матриці ε став $\tau(i)$ -им, $P_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} e_{i\tau(i)}$ – переставна матриця.

Твердження 2. При перетвореннях другого типу матриця суміжності $[\tilde{Q}]$ сагайдака $Q(\Theta)$ змінюється за формулою: $[\tilde{Q}] = P_\tau^T [Q] P_\tau$, де $[Q] = [Q(\varepsilon)]$.

Теорема 1. Сагайдак матриці показників є простим і сильно зв'язним.

Означення 4. Сильно зв'язний простий сагайдак називається допустимим, якщо він є сагайдаком зведеної матриці показників.

Теорема 2. Довільний сильно зв'язний простий сагайдак Q з петлею в кожній вершині є допустимим.

Зауваження 1. Легко бачити, що сагайдак Q з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ не є допустимим.

ЗВЕДЕНІ (0,1)–МАТРИЦІ ПОКАЗНИКІВ ТА СКІНЧЕННІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ.

Означення 5. Під "a накриває b" у частково впорядкованій множині P розуміють, що не існує $x \in P$ такого, що $a > x > b$.

Означення 6. Нехай $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ – скінченна частково впорядкована множина з відношенням порядку $\leq$. Діаграмою частково впорядкованої множини P є сагайдак $Q(P)$ з множиною вершин $VQ(P) = \{1, \ldots, n\}$ і множиною стрілок $AQ(P)$ такою, що в $AQ(P)$ існує стрілка $\sigma : i \to j$ тоді і тільки тоді, коли α_j накриває α_i.

Іншими словами в діаграмі $Q(P)$ існує стрілка $\sigma : k \to l$ тоді й тільки тоді, коли $\alpha_k < \alpha_l$ та не існує елемента α_j, такого, що $\alpha_k \leq \alpha_j \leq \alpha_l$, де $\alpha_j \neq \alpha_k$, $\alpha_j \neq \alpha_l$.

Означення 7. Сагайдак без орієнтованих циклів називається ациклічним сагайдаком.

Означення 8. Стрілка $\sigma : i \to j$ ациклічного сагайдака Q називається зайвою, якщо існує шлях із вершини i у вершину j довжини більшої, ніж 1.

Теорема 3. Нехай Q – ациклічний простий сагайдак без зайвих стрілок. Тоді Q є діаграмою деякої скінченної частково впорядкованої множини P. Навпаки, діаграма $Q(P)$ скінченної частково впорядкованої множини P є ациклічним простим сагайдаком без зайвих стрілок.

Нехай P – довільна частково впорядкована множина. Нагадаємо, що підмножина множини P називається ланцюгом, якщо довільні два її елементи порівнюються. Підмножина множини P називається антиланцюгом, якщо довільні два її елементи не порівнюються.

Ми будемо позначати ланцюг з n елементів через CH_n та антиланцюг з n елементів через ACH_n.

Максимальна кількість $\omega(P)$ елементів в антиланцюгу множини P називається шириною множини P.

Означення 9. Зведена (0,1)-матриця показників ε задає частковий порядок на множині $P_\varepsilon = \{1, \ldots, n\}$ за правилом: $i \leq j$ тоді й тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = 1$.

Навпаки, з кожною скінченною частково впорядкованою множиною $P = \{1, \ldots, n\}$ ми зв'язуємо зведену (0,1)-матрицю показників $\varepsilon_P = (\lambda_{ij})$ наступним чином: $\lambda_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \leq j$, інакше $\lambda_{ij} = 1$.

Легко бачити, що ε_P є дійсно зведеною матрицею показників.

Позначимо через $P_{\max}$ множину всіх максимальних елементів множини P, через $P_{\min}$ – множину всіх мінімальних елементів множини P, і через $P_{\max}\times P_{\min}$ – їх декартів добуток.

Означення 10. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$, отриманий з діаграми $Q(P)$ додаванням стрілок σ_{ij} для всіх $(p_i, p_j)\in P_{\max}\times P_{\min}$ – називається сагайдаком, що асоційований з частково впорядкованою множиною P.

Теорема 4. Сагайдак $Q(\varepsilon_P)$ співпадає з сагайдаком $\tilde{Q}(P)$.

Очевидно, що $\tilde{Q}(P)$ є сильно зв'язним просто влаштованим сагайдаком. Легко перевірити, що сагайдак $Q(\varepsilon_{CH_n})$, асоційований з ланцюгом CH_n, є простим циклом на n вершинах, сагайдак $Q(\varepsilon_{ACH_n})$, асоційований з антиланцюгом CH_n, є повним простим сагайдаком на n вершинах. Зокрема, якщо $P = P_{\min} = P_{\max}$, то отримуємо повний простий сагайдак, що має по одній петлі в кожній вершині.

ДОПУСТИМІ САГАЙДАКИ. Нехай $\varepsilon = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathrm{Z})$ – зведена матриця показників, $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{ij}) = \varepsilon + E$ та $Q = Q(\varepsilon)$ – сагайдак матриці показників ε з матрицею суміжності $[Q] = (q_{ij})$, де $q_{ij} = \min\limits_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij}$. Позначимо $G = \{\beta_{ij} \mid q_{ij} = 1\}$.

Теорема 5.. Множина G є мінімальною системою твірних елементів матриці $\varepsilon^{(1)}$.

Означення 11. Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається зваженим, якщо визначено функцію $\omega : AQ \to \mathbb{R}$. Функція ω називається ваговою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки.

Сума ваг всіх стрілок шляху називається вагою шляху.

Теорема 6 [3]. Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega : AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, яка задовольняє наступним умовам:

- вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$,
- вага петлі в точці i менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i, довжини $l \geq 2$,
- вага будь-якого циклу завжди більша або дорівнює 1,
- вага довільної петлі дорівнює 1,
- через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ ІЗ ЖОРСТКИМ АСОЦІЙОВАНИМ САГАЙДАКОМ.

Означення 12. Допустимий сагайдак Q називається жорстким, якщо $Q = Q(\varepsilon)$ для єдиної з точністю до еквівалентності зведеної матриці показників ε.

Нехай P – скінченна частково впорядкована множина, $\tilde{Q}(P)$– асоційований сагайдак. У теоремах 7, 8 і 9 наводяться достатні умови для множини P, щоб сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не був жорстким.

Частково впорядковану множину зі зв'язною діаграмою будемо називати зв'язною.

Теорема 7 [4]. Нехай P – скінченна зв'язна часткова впорядкована множина, що задовольняє наступним умовам:

- для будь–якого $\alpha_i \in P$ існує якого $\alpha_j \in P$ таке, що α_i і α_j не порівнюються;
- існують $\alpha_u \in P_{\min}$ і $\alpha_v \in P_{\max}$ такі, що $\alpha_u \nleq \alpha_v$.
- Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.
- **Теорема 8** [4]. Нехай P – скінченна зв'язна частково впорядкована множина, що задовольняє умовам:
- для будь–якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке що α_i і α_j не порівнянні;
- для будь–яких $\alpha_u \in P_{\min}$ і $\alpha_v \in P_{\max}$ має місце нерівність $\alpha_u \leq \alpha_v$;
- існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \varnothing$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \neq \varnothing$.

Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

Теорема 9 [4]. Нехай P – скінченна незв'язна частково впорядкована множина. Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

Теореми 7, 8 і 9 можна узагальнити наступним чином.

Теорема 10. Нехай P – скінченна частково впорядкована множина, що задовольняє умовам:

- для будь-якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке що α_i і α_j не порівнянні;
- існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \varnothing$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \neq \varnothing$.

Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

Теорема 11 [4]. Нехай P – скінченна частково впорядкована множина з єдиним мінімальним елементом. Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ є жорстким.

Наслідок 1. Якщо в скінченній частково впорядкованій множині P існує елемент α, порівняний з усіма елементами цієї множини, то сагайдак $\tilde{Q}(P)$ є жорстким.

Приклад 1. Неважко перевірити, що частково впорядкована множина (Рис. 1) має жорсткий асоційований сагайдак. Ця множина не задовольняє умові наслідку 1.

Для цієї множини виконуються перші дві умови теореми 8 і не виконується третя умова.

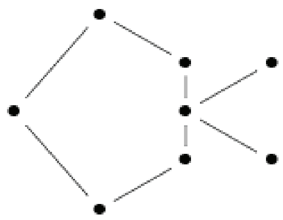

Рис. 1

Теорема 12. [2]. Допустимий сагайдак , який має хоча б одну петлю, не є жорстким.

З доведення цієї теореми випливає, що допустимий сагайдак Q , який має хоча б одну петлю, має нескінченну кількість нееквівалентних матриць показників з даним сагайдаком.

Теорема 13. Для довільного натурального $m > 1$ існує допустимий сагайдак Q_m , для якого існує рівно m попарно нееквівалентних матриць показників, сагайдак яких співпадає з сагайдаком Q_m .

Допустимий сагайдак може мати з точністю до еквівалентності одну, скінченну кількість, більшу за 1, або нескінченну кількість зведених матриць показників з даним допустимим сагайдаком.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Нехай – допустимий сагайдак. Тоді за теоремою 6 через кожну вершину $a \in VQ$ без петлі проходить цикл C_a одиничної ваги. Розглянемо сагайдак $\bar{Q}$ з множиною вершин VQ і множиною стрілок $A\bar{Q} = \bigcup_{a\in VQ} AC_a$ (об'єднання береться по циклам одиничної ваги, але не обов'язково по всім таким циклам). Очевидно $\bar{Q} = C_{a_1} \cup \ldots \cup C_{a_m}$ для деяких вершин $a_1, \ldots, a_m$.

Теорема 14. Допустимий сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників ε з $Q(\varepsilon) = Q$ тоді і тільки тоді, коли існує $\bar{Q}$ – незв'язний сагайдак.

Доведення. Нехай допустимий сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників ε з сагайдаком $Q(\varepsilon) = Q$. Нехай $\left\{\varepsilon_\gamma = \left(\alpha_{ij}^{(\gamma)}\right)\right\}$ – множина всіх таких матриць.

Тоді існують індекси i та j, що множина $\left\{\alpha_{ij}^{(\gamma)}\right\}$ необмежена. За теоремою 6 існують вагові функції $\omega_\gamma : AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ такі, що $\alpha_{ij}^{(\gamma)} = \omega_\gamma\left(P(i, j)\right)$, де $P(i, j)$ – шлях із вершини i у вершину j у сагайдаку Q (шлях мінімальної ваги). Оскільки множина $\left\{\alpha_{ij}^{(\gamma)}\right\}$ – необмежена, то існує стрілка σ_{kl} така, що множина $\left\{\omega_\gamma(\sigma_{kl})\right\}$ – необмежена.

Припустимо, що сагайдак $\bar{Q}$ зв'язний і є об'єднанням m циклів C_a ваги 1. Тоді в $\bar{Q}$ шлях із вершини k в вершину l має спільні стрілки з не більш, ніж m одиничними циклами C_a . З адитивності ваги шляху отримуємо, що вага шляху з k в l не перевищує ваги всіх стрілок сагайдака $\bar{Q}$, тобто m . За умовою теореми 6 вага стрілки $\omega_\gamma(\sigma_{kl})$ менша за вагу шляху з вершини k у вершину l . Отже, $\omega_\gamma(\sigma_{kl}) < m$. Отримана суперечність доводить, що сагайдак $\bar{Q}$ є незв'язним.

Навпаки, нехай сагайдак $\bar{Q}$ – незв'язний: $\bar{Q} = \bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2$, $\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2 = \varnothing$. Занумеруємо вершини $\bar{Q}_1$ і $\bar{Q}_2$ числами $1, \ldots, s, s+1, \ldots, s+t$.

Сагайдак Q – допустимий, тоді існує зведена матриця показників $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ така, що $Q(\varepsilon) = Q$. Відповідно до розбиття $\bar{Q} = \bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2$ маємо $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$.

Можемо вважати, що $\alpha_{ij} \geq 0$ для всіх i, j . Нехай $x \in \mathbb{N}$ і $x > \max\limits_{i,j} \alpha_{ij}$. Розглянемо матрицю $\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_{12} + xU_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \left(\alpha_{ij}^{(x)}\right)$. Це також зведена матриця показників і $Q\left(\varepsilon(x)\right) = Q(\varepsilon) = Q$. Оскільки $\sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}^{(x)} \neq \sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}^{(y)}$ при $x \neq y$, то матриці $\varepsilon(x)$ та $\varepsilon(y)$ при $x \neq y$ нееквівалентні. Отже, допустимий сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\varepsilon(x)$ з $Q\left(\varepsilon(x)\right) = Q(\varepsilon) = Q$. Теорема доведена.

Зауваження 2. Вибираючи по-різному одиничні цикли сагайдака Q , будемо отримувати різні $\bar{Q}$. Наведемо приклад.

Приклад 2. Розглянемо сагайдак Q з матрицею суміжності

$$[Q]=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Якщо вибирати в Q одиничні цикли 1–5–1, 2–4–6–2, 3–4–6–3, то $\bar{Q}$ буде незв'язним. Якщо ж вибирати в Q одиничні цикли 1–5–1, 2–4–5–2, 3–4–6–3, то $\bar{Q}$ буде зв'язним. За теоремою 14 сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників ε з $Q(\varepsilon)=Q$.

Нехай $P=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ – скінченна частково впорядкована множина. Якщо існує розбиття P на дві такі,частково впорядковані множини P' і P'', що $P=P'\cup P''$, $P'\cap P''=\varnothing$, $P_{\max}=P'_{\max}\cup P''_{\max}$, $P_{\min}=P'_{\min}\cup P''_{\min}$, то за теоремою 6 сагайдак $\tilde{Q}(P)=Q$ не є жорстким. Більше того, цей сагайдак має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\varepsilon(x)$ таких, що $Q(\varepsilon(x))=\tilde{Q}(P)=Q$. За теоремою 14 існує незв'язний сагайдак $\bar{Q}$.

Теорема 15. Нехай $P=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ – така скінченна частково впорядкована множина, що для будь-якого розбиття $P=P'\cup P''$, $P'\cap P''=\varnothing$ має місце строге включення $P'_{\max}\cup P''_{\max}\cup P'_{\min}\cup P''_{\min}\supseteq P_{\max}\cup P_{\min}$. Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)=Q$ – жорсткий.

Доведення. Для частково впорядкованої множини P не існує розбиття $P=P'\cup P''$, $P'\cap P''=\varnothing$, $P'_{\max}\cup P''_{\max}=P_{\max}$, $P'_{\min}\cup P''_{\min}=P_{\min}$. Тому за теоремою 6 сагайдак $\bar{Q}$ – зв'язний. $Q=\tilde{Q}(P)$ – допустимий сагайдак, тому існує $\omega: AQ\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ – вагова функція, що задовольняє умови теореми 6. Нехай $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\in P_{\min}$, $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2}\in P_{\max}$.
З нерівностей

$$1\le\omega\left(P\left(\alpha_{i_1},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_1}\right)<\omega\left(P\left(\alpha_{i_1},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_2}\right)+\omega\left(P\left(\alpha_{i_2},\alpha_{j_2}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_2},\alpha_{i_1}\right),$$

$$1\le\omega\left(P\left(\alpha_{i_1},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_1}\right)<\omega\left(P\left(\alpha_{i_1},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_2}\right)+\omega\left(P\left(\alpha_{i_2},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_1}\right)$$

випливає, що одиничний цикл в $\bar{Q}$ має рівно одну вершину з $P_{\max}$ і одну вершину з $P_{\min}$. Покажемо тепер, що в $\bar{Q}$ $\omega(\alpha_i,\alpha_j)=0$, якщо в діаграмі $Q(P)$ є стрілка з α_i у α_j.

Елементарному еквівалентному перетворенню I-го типу – від елементів i -го рядка матриці показників відняти ціле число t, а до елементів i -го стовпчика додати t, – відповідає перетворення вагової функції: вага кожної стрілки, що виходить з вершини i зменшується на t, а вага кожної стрілки, що входить у вершину t, збільшується на t.

У першому одиничному циклу C_1 з $\bar{Q}$ такими перетвореннями (перетворення над Q, а, отже, і над $\bar{Q}$) ми можемо зробити вагу стрілки з $P_{\max}$ у $P_{\min}$ одиничною. Тоді вага будь-якої іншої стрілки з цього циклу дорівнює 0. Розглянемо тепер одиничний цикл C_2, який має з циклом C_1 спільні вершини. Нехай $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}$ – вершини з $P_{\min}$, що належать циклам C_1 та C_2, $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2}$ – вершини з $P_{\max}$, що належать циклам C_1 та C_2 відповідно, α_1 і α_2 – спільні вершини циклів C_1 і C_2, $\alpha_1<\alpha_2$. Тоді стрілка ваги 1, яка належить циклу C_2, не може належати шляху від α_1 до α_2. Інакше частину циклу C_2 від α_2 до α_1 ваги 0, можна доповнити частиною циклу C_1 від α_1 до α_2 ваги 0 і отримаємо цикл ваги 0, що неможливо. Отже, стрілка ваги 1 циклу C_2 належить частині цього циклу – ланцюгу, який містить не більше однієї точки циклу C_1. Цей ланцюг містить стрілку від елемента α_{j_2} з $P_{\max}$ до елемента α_{i_2} з $P_{\min}$. Перетвореннями, що відповідають елементарним перетворенням I-го типу, вагу 1 стрілки у ланцюгу можна перемістити на стрілку $\left(\alpha_{j_2},\alpha_{i_2}\right)$. Продовжуючи аналогічні міркування, отримаємо таку вагову функцію ω на $\bar{Q}$, що $\omega\left(\alpha_i,\alpha_j\right)=1$ лише у тому випадку, коли $\alpha_i\in P_{\max}$, а $\alpha_j\in P_{\min}$.

Нехай $\alpha_i\in P_{\max}$, $\alpha_j\in P_{\min}$ належить циклу C_1. сагайдака $\bar{Q}$, а , α_j належить циклу C_s, причому цикли C_i та C_{i+1} мають спільні вершини для $i=1,...,n$. Індукцією за s легко показати, що вага будь-якої стрілки з $P_{\max}$ у $P_{\min}$ дорівнює 1. База індукції – α_i та α_j належать одному циклу в $\bar{Q}$. Припустимо, вага стрілки з $\alpha_{i_u}\in P_{\max}$ у $\alpha_{jk}\in P_{\min}$ дорівнює 1, якщо α_{i_u} належить циклу C_u, а α_{jk} – циклу C_k, де $u,k<s-1$. Оскільки для $\alpha_{i_k}\in P_{\max}$, що належить циклу C_k, $\omega\left(\alpha_{i2},\alpha_j\right)<\omega\left(\alpha_{i2},\alpha_{jk}\right)+\omega\left(P\left(\alpha_{j_k},\alpha_{ik}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{i_k},\alpha_j\right)=1+0+1$, то $\omega\left(\alpha_{i_2},\alpha_j\right)\le 1$.

З іншого боку $\omega\left(\alpha_{i2},\alpha_j\right)+\omega\left(P\left(\alpha_j,\alpha_{ik}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{ik},\alpha_j\right)>\omega\left(\alpha_{i_2},\alpha_{j_2}\right)=1$ або $\omega\left(\alpha_{i_2},\alpha_j\right)+0+1>1$. Отже, $\omega\left(\alpha_{i_1},\alpha_j\right)=1$, тобто, вага будь-якої стрілки з $P_{\max}$ у $P_{\min}$ дорівнює 1.

Розглянемо стрілку $\left(\alpha_k,\alpha_p\right)$, яка є в діаграмі $Q(P)$, але її немає в сагайдаку $\bar{Q}$. Нехай вершина α_k належить циклу C_a, а вершина α_p – циклу C_b, $\alpha_{a_1},\alpha_{a_2}$ – вершини циклу C_a, які належать $P_{\min}$ та $P_{\max}$, $\alpha_{b_1},\alpha_{b_2}$ – вершини циклу C_b, які належать $P_{\min}$ та $P_{\max}$. Тоді, $\omega(\alpha_k,\alpha_p) < \omega(P(\alpha_k,\alpha_{a_2})) + \omega(\alpha_{a_2},\alpha_{b_1}) + \omega(P(\alpha_b,\alpha_p)) = 0+1+0=1$. Отже, $(\alpha_k,\alpha_p)=0$.

Таким чином, будь-яка вагова функція $\omega: AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$,що задовольняє умови теореми 6, еквівалентна функції, що діє за наступним правилом:

$$\omega(\alpha_i,\alpha_j) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \alpha_i \in P_{\max}, \alpha_j \in P_{\min,} \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Ця вагова функція визначає зведену (0,1)-матрицю показників $\varepsilon(P)=(\alpha_{ij})$, де $\alpha_{ij}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i \le \alpha_j$, $\alpha_{i,j}=1$ в інших випадках. Це означає, що сагайдак $\tilde{Q}(P)$ – жорсткий. Теорема доведена.

З теорем 10 та 15 отримуємо наступне твердження.

Теорема 16 Нехай P – скінченна частково впорядкована множина. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$ є жорстким тоді і тільки тоді, коли не існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \varnothing$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \ne \varnothing$.

ВИСНОВКИ. Отримано критерій жорсткості сагайдака, асоційованого зі скінченною частково впорядкованою множиною. Також встановлено критерій існування нескінченної кількості нееквівалентних зведених матриць показників з даним допустимим сагайдаком.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Завадский, А.Г., Кириченко, В.В., Модули без кручения над первичными кольцами,// Зап. науч. семинар. Ленинград. отдел. мат. инст. им. Стеклова (ЛОМИ) – 1976. – т. 57. – с. 100–116. 2.. Зеленський О.В. Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників. – Вісник Київського університету. Серія: фізико–математичні науки. – 2007. – No 3. – с.27–31. 3. Журавлёв В.Н., Допустимые колчаны. Фундаментальная и прикладная математика. Том 14, 2008. No 7, с. 121–128. 4. Кириченко В.В., Журавлёв В.Н., Цыгановская И.Н., О жестких колчанах. Фундаментальная и прикладная математика. Том 12, выпуск 8, 2006. Часть 1. С. 105 – 120. 5. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2004, v. 1, 380 p. 6. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2007, v. 2, 400 p. 7. V.V.Kirichenko, A.V.Zelensky, V.N.Zhuravlev, Exponent matrices and tiled orders over discrete valuation rings,Algebra and Computation, 15, No 5 & 6 (2005), pp.997–1012.

Надійшла до редколегії 31.10.12

В. Журавлев, доц., Т. Журавлева, асп., А. Зеленський, канд. физ.-мат. наук

ЖЕСТКИЕ КОЛЧАНЫ, АССОЦИРОВАННЫЕ С ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Приведены критерии жесткости колчана, ассоциированном с конечным частично упорядоченным множеством.

V. Zhuravlev, Associate Professor, T. Zhuravleva, PhD graduate, A. Zelensky, PhD

RIGID QUIVERS ASSOCIATED WITH PARTIALLY ORDERED SETS

We give a criterion of rigidity of quiver associated with finite partially ordered set.

УДК 519.21

О. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: alvil@i.ua

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Знайдено умови існування періодичних розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з періодичними коефіцієнтами.

ВСТУП. В [4] наведено умови існування стохастично обмежених розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння. Як виявилося, за умови періодичності коефіцієнтів, стохастично обмежений розв'язок може бути також періодичним, тобто мати періодичні всі скінченновимірні розподіли. У даній статті автор встановлює, що при наявності раціональної залежності між періодами коефіцієнтів рівняння, існування єдиного періодичного розв'язку еквівалентно не рівності нулю інтегрального середнього по періоду від показника стійкості лінійної частини. Такий критерій еквівалентний експоненціальній p – стійкості або p – нестійкості, при деякому $p>0$ (див. [5, 6]), розв'язку однорідного рівняння, хоча поширеною для такого класу задач є практика використання стійкості у середньоквадратичному [3, 7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ, ПРИПУЩЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dx(t) = \big(b(t)x(t)+f(t)\big)dt + \sum_{k=1}^{m}\big(\sigma_k(t)x(t)+g_k(t)\big)dw_k(t), \tag{1}$$

де $b(t)$, $f(t)$, $\sigma_k(t)$, $g_k(t)$ – неперервні і періодичні за $t \in R$ відповідно T_{10}, T_{20}, T_{1k} та T_{2k} періодів дійсні функції; $w_k(t)$ – одновимірні незалежні вінерівські процеси, $t \in R$, $k=\overline{1,m}$.

Під вінерівським процесом $w(t)$, $t \in R$ будемо розуміти процес з незалежними приростами і такий, що для довільних $s,t \in R$ різниця $w(t)-w(s)$ – гауссовська випадкова величина, $w(0)=0$, $\mathrm{M}\big(w(t)-w(s)\big)=0$, $\mathrm{M}\big(w(t)-w(s)\big)^2 = |t-s|$.