циклу C_b, які належать $P_{\min}$ та $P_{\max}$. Тоді, $\omega(\alpha_k,\alpha_p) < \omega(P(\alpha_k,\alpha_{a_2})) + \omega(\alpha_{a_2},\alpha_{b_1}) + \omega(P(\alpha_b,\alpha_p)) = 0+1+0 = 1$. Отже, $(\alpha_k,\alpha_p) = 0$.

Таким чином, будь-яка вагова функція $\omega : AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$,що задовольняє умови теореми 6, еквівалентна функції, що діє за наступним правилом:

$$\omega(\alpha_i,\alpha_j) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \alpha_i \in P_{\max}, \alpha_j \in P_{\min}, \\ 0, \text{ в інших випадках}. \end{cases}$$

Ця вагова функція визначає зведену (0,1)-матрицю показників $\varepsilon(P) = (\alpha_{ij})$, де $\alpha_{ij} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i \le \alpha_j$, $\alpha_{i,j} = 1$ в інших випадках. Це означає, що сагайдак $\tilde{Q}(P)$ – жорсткий. Теорема доведена.

З теорем 10 та 15 отримуємо наступне твердження.

Теорема 16 Нехай P – скінченна частково впорядкована множина. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$ є жорстким тоді і тільки тоді, коли не існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \varnothing$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \ne \varnothing$.

ВИСНОВКИ. Отримано критерій жорсткості сагайдака, асоційованого зі скінченною частково впорядкованою множиною. Також встановлено критерій існування нескінченної кількості нееквівалентних зведених матриць показників з даним допустимим сагайдаком.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ
1. Завадский, А.Г., Кириченко, В.В., Модули без кручения над первичными кольцами,// Зап. науч. семинар. Ленинград. отдел. мат. инст. им. Стеклова (ЛОМИ) – 1976. – т. 57. – с. 100–116. 2.. Зеленський О.В. Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників. – Вісник Київського університету. Серія: фізико–математичні науки. – 2007. – No 3. – с.27–31. 3. Журавлёв В.Н., Допустимые колчаны. Фундаментальная и прикладная математика. Том 14, 2008. No 7, с. 121–128. 4. Кириченко В.В., Журавлёв В.Н., Цыгановская И.Н., О жестких колчанах. Фундаментальная и прикладная математика. Том 12, выпуск 8, 2006. Часть 1. С. 105 – 120. 5. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2004, v. 1, 380 p. 6. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2007, v. 2, 400 p. 7. V.V.Kirichenko, A.V.Zelensky, V.N.Zhuravlev, Exponent matrices and tiled orders over discrete valuation rings,Algebra and Computation, 15, No 5 & 6 (2005), pp.997–1012.

Надійшла до редколегії 31.10.12

В. Журавлев, доц., Т. Журавлева, асп., А. Зеленський, канд. физ.-мат. наук

ЖЕСТКИЕ КОЛЧАНЫ, АССОЦИРОВАННЫЕ С ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Приведены критерии жесткости колчана, ассоциированном с конечным частично упорядоченным множеством.

V. Zhuravlev, Associate Professor, T. Zhuravleva, PhD graduate, A. Zelensky, PhD

RIGID QUIVERS ASSOCIATED WITH PARTIALLY ORDERED SETS

We give a criterion of rigidity of quiver associated with finite partially ordered set.

УДК 519.21

О. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: alvil@i.ua

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Знайдено умови існування періодичних розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з періодичними коефіцієнтами.

ВСТУП. В [4] наведено умови існування стохастично обмежених розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння. Як виявилося, за умови періодичності коефіцієнтів, стохастично обмежений розв'язок може бути також періодичним, тобто мати періодичні всі скінченновимірні розподіли. У даній статті автор встановлює, що при наявності раціональної залежності між періодами коефіцієнтів рівняння, існування єдиного періодичного розв'язку еквівалентно не рівності нулю інтегрального середнього по періоду від показника стійкості лінійної частини. Такий критерій еквівалентний експоненціальній p – стійкості або p – нестійкості, при деякому $p > 0$ (див. [5, 6]), розв'язку однорідного рівняння, хоча поширеною для такого класу задач є практика використання стійкості у середньоквадратичному [3, 7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ, ПРИПУЩЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dx(t) = (b(t)x(t) + f(t))dt + \sum_{k=1}^{m} (\sigma_k(t)x(t) + g_k(t))dw_k(t), \tag{1}$$

де $b(t)$, $f(t)$, $\sigma_k(t)$, $g_k(t)$ – неперервні і періодичні за $t \in R$ відповідно T_{10}, T_{20}, T_{1k} та T_{2k} періодів дійсні функції; $w_k(t)$ – одновимірні незалежні вінерівські процеси, $t \in R$, $k = \overline{1,m}$.

Під вінерівським процесом $w(t)$, $t \in R$ будемо розуміти процес з незалежними приростами і такий, що для довільних $s,t \in R$ різниця $w(t) - w(s)$ – гауссовська випадкова величина, $w(0) = 0$, $\mathrm{M}(w(t) - w(s)) = 0$, $\mathrm{M}(w(t) - w(s))^2 = |t - s|$.

Пов'яжемо з процесами $w_k(t)$, $k=\overline{1,m}$, такі потоки σ-алгебр

$$F_t = \sigma a\left\{w_k(s_2)-w_k(s_1): s_1\le s_2\le t, k=\overline{1,m}\right\},\ F^t = \sigma a\left\{w_k(s_2)-w_k(s_1): t\le s_1\le s_2, k=\overline{1,m}\right\}.$$

Означення. Процес $x(t)$, $t\in R$, називається періодичним з періодом T, якщо існує таке $T>0$, що для довільного $n\in N$, борелівських множин $A_k\subset R$, $t_k\in R$, $k=\overline{1,n}$

$$\mathrm{P}\left\{x(t_1+T)\in A_1, x(t_2+T)\in A_2,\dots,x(t_n+T)\in A_n\right\} = \mathrm{P}\left\{x(t_1)\in A_1, x(t_2)\in A_2,\dots,x(t_n)\in A_n\right\}. \tag{2}$$

Разом з рівнянням (1) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$dh_s^t = b(t)h_s^t dt + \sum_{k=1}^m \sigma_k(t)h_s^t dw_k(t), \tag{3}$$

яке при $s\le t$ і $h_s^s=1$ має розв'язок (див. [1,5]) $h_s^t = \exp\left\{\int_s^t\left(b(u)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\sigma_k^2(u)\right)du + \sum_{k=1}^m\int_s^t \sigma_k(u)dw_k(u)\right\}$. Шляхом безпосереднього підрахунку легко отримати, що для довільного $p\in R$ $\mathrm{M}\left(h_s^t\right)^p = \exp\left\{p\int_s^t\left(b(u)-\frac{1}{2}(1-p)\sum_{k=1}^m\sigma_k^2(u)\right)du\right\}$.

Надалі будемо припускати, що виконується умова

А) Періоди коефіцієнтів рівняння (1) зв'язані системою несуперечливих співвідношень вигляду $lT_{ij}=mT_{kr}$ для $l,m\in N$, $i,k=0,1$, $j,r=\overline{1,m}$.

Зауваження. Якщо умова А) виконана, то коефіцієнти рівняння (1) мають спільний період T.

Позначимо $\gamma=\frac{1}{T}\int_0^T\left(b(u)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\sigma_k^2(u)\right)du$. Для $p>0$ справедливі оцінки

$$\mathrm{M}\left(h_s^t\right)^p \le \exp\left\{p\gamma(t-s)+pL_1+p^2L_3(t-s)\right\}, \tag{4}$$

$$\mathrm{M}\left(h_s^t\right)^{-p} \le \exp\left\{-p\gamma(t-s)-pL_2+p^2L_3(t-s)\right\}, \tag{5}$$

де $L_1=\sup_{0\le s\le T}\int_0^s\left(b(u)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\sigma_k^2(u)-\gamma\right)du$, $L_2=\inf_{0\le s\le T}\int_0^s\left(b(u)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\sigma_k^2(u)-\gamma\right)du$, $L_3=\sup_{0\le s\le T}\frac{1}{2}\sum_{r=1}^m\sigma_k^2(s)$.

Розв'язок $x_s(t)$, $s\le t$, рівняння (1) зображується (див. [1,4]) у вигляді

$$x_s(t) = h_s^t\left[x(s)+\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}\left(f(u)-\sum_{k=1}^m\sigma_k(u)g_k(u)\right)du+\sum_{k=1}^m\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}g_k(u)dw_k(u)\right],\ s\le t. \tag{6}$$

Поведінка розв'язку $x_s(t)$, $s\le t$, визначається інтегральними доданками у (6). Умови збіжності при $t\to+\infty$ цих виразів встановлюються у наступних лемах.

Лема 1. Припустимо що $\varphi(t)$– неперервна T-періодична функція, $t\in R$. Тоді при $s\le t$ справедлива формула заміни напрямку інтегрування для стохастичних інтегралів

$$h_s^t\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}\varphi(u)dw_k(u) = -\int_t^s h_u^t\varphi(u)dw_k(u)-\int_t^s h_u^t\varphi(u)\sigma_k(u)du.$$

Лема 2. Нехай виконуються умови:

1) $\gamma<0$;

2) $\varphi(t)$ – неперервна T-періодична функція, $t\in R$.

Тоді для довільного $t\in R$ майже напевно існують границі

$$\lim_{s\to-\infty}h_s^t\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}\varphi(u)du=\int_{-\infty}^t h_u^t\varphi(u)du,\ \lim_{s\to-\infty}h_s^t\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}\varphi(u)dw_k(u) = -\int_t^{-\infty}h_u^t\varphi(u)dw_k(u)-\int_t^{-\infty}h_u^t\varphi(u)\sigma_k(u)du.$$

Доведення лем 1 і 2 проводиться аналогічно [4] з урахуванням оцінок (4) і (5), які гарантують відповідні викладки.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Теорема. Нехай виконується умова а). Для того щоб рівняння (1) мало єдиний T-періодичний розв'язок $\tilde{x}(t)$, $t\in R$ необхідно і достатньо, щоб $\gamma\ne0$. Цей розв'язок задається формулою

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}-\int_t^{-\infty}h_u^t f(u)du-\sum_{k=1}^m\int_t^{-\infty}h_u^t g_k(u)dw_k(u), & \gamma<0;\\ -\int_t^{+\infty}\left(h_t^u\right)^{-1}\left(f(u)-\sum_{k=1}^m\sigma_k(u)g_k(u)\right)du-\sum_{k=1}^m\int_t^{+\infty}\left(h_t^u\right)^{-1}g_k(u)dw_k(u), & \gamma>0.\end{cases}$$

Доведення. Достатність. Розглянемо випадки $\gamma<0$ і $\gamma>0$ окремо.

1) Нехай $\gamma<0$. Покладемо

$$x_{-\infty}(t) = -\int_t^{-\infty}h_u^t f(u)du-\sum_{k=1}^m\int_t^{-\infty}h_u^t g_k(u)dw_k(u),\ t\in R. \tag{7}$$

З леми 2 випливає, що вираз в правій частині (7) існує для кожного $t\in R$. Перевірка того, що $x_{-\infty}(t)$ задовольняє співвідношення (6), а відтак становить розв'язок рівняння (1), проводиться аналогічно [4]. Зазначимо, що цей розв'язок вимірний відносно потоку F_t. Покажемо, що процес $x_{-\infty}(t)$ періодичний. Для цього перевіримо співвідношення (2). Оскільки процес $x_{-\infty}(t)$ марковський, то

$$\mathrm{P}\left\{x(t_1)\in A_1, x(t_2)\in A_2,\ldots,x(t_n)\in A_n\right\} = \int\limits_{A_{n-1}}\cdots\int\limits_{A_1} P\{x(t_1)\in dx_1\}\prod_{k=1}^{n-2}P\{t_k,x_k,x(t_{k+1})\in dx_{k+1}\}P\{t_{n-1},x_{n-1},x(t_n)\in A_n\}dx_1\ldots dx_{n-1}. \quad (8)$$

З (8) випливає, що періодичність $x_{-\infty}(t)$ еквівалентна періодичності перехідної функції $\mathrm{P}\left\{s,x,x_s(t)\in A\right\}$ та періодичності $\mathrm{P}\left\{x_{-\infty}(t)\in A\right\}$.

Перехідна функція для $s\le t$ задається співвідношенням (6). Позначимо $F(t)=f(t)-\sum_{k=1}^{m}\sigma_k(t)g_k(t)$, $w_k^T(t)=w_k(T+t)-w_k(T)$, $t\in R$. Для перехідної функції справедливо наступне

$$\mathrm{P}\left\{s+T,x,x_{s+T}(t+T)\in A\right\} = P\left\{h_{s+T}^{t+T}\left[x+\int_{s+T}^{t+T}\left(h_{s+T}^{u}\right)^{-1}F(u)\,du+\sum_{k=1}^{m}\int_{s+T}^{t+T}\left(h_{s+T}^{u}\right)^{-1}g_k(u)\,dw_k(u)\right]\in A\right\}=$$

$$=P\left\{h_{s+T}^{t+T}\left[x+\int_{s}^{t}\left(h_{s+T}^{v+T}\right)^{-1}F(v+T)\,du+\sum_{k=1}^{m}\int_{s}^{t}\left(h_{s+T}^{v+T}\right)^{-1}g_k(v+T)\,dw_k^T(v)\right]\in A\right\}=$$

$$=P\left\{h_{s}^{t}\left[x+\int_{s}^{t}\left(h_{s}^{v}\right)^{-1}F(v)\,du+\sum_{k=1}^{m}\int_{s}^{t}\left(h_{s}^{v}\right)^{-1}g_k(v)\,dw_k(v)\right]\in A\right\}=\mathrm{P}\left\{s,x,x_s(t)\in A\right\}.$$

Покажемо періодичність $\mathrm{P}\left\{x_{-\infty}(t)\in A\right\}$. Маємо: $\mathrm{P}\left\{x_{-\infty}(t+T)\in A\right\}=$

$$=\mathrm{P}\left\{-\int_{t+T}^{-\infty}h_u^{t+T}f(u)\,du-\sum_{k=1}^{m}\int_{t+T}^{-\infty}h_u^{t+T}g_k(u)\,dw_k(u)\in A\right\}=\mathrm{P}\left\{-\int_{t}^{-\infty}h_{v+T}^{t+T}f(v+T)\,dv-\sum_{k=1}^{m}\int_{t}^{-\infty}h_{v+T}^{t+T}g_k(v+T)\,dw_k^T(v)\in A\right\}=$$

$$=\mathrm{P}\left\{-\int_{t}^{-\infty}h_v^{t}f(v+T)\,dv-\sum_{k=1}^{m}\int_{t}^{-\infty}h_v^{t}g_k(v+T)\,dw_k(v)\in A\right\}=\mathrm{P}\left\{-\int_{t}^{-\infty}h_v^{t}f(v)\,dv-\sum_{k=1}^{m}\int_{t}^{-\infty}h_v^{t}g_k(v)\,dw_k(v)\in A\right\}=\mathrm{P}\left\{x_{-\infty}(t)\in A\right\}.$$

Покажемо, що періодичний розв'язок $x_{-\infty}(t)$ єдиний. Дійсно, якщо $y(t)$ інший періодичний розв'язок рівняння (1), то $z(t)=x_{-\infty}(t)-y(t)$ задовольняє однорідне рівняння (3) і в силу припущення теореми $\lim\limits_{t\to-\infty}\left|z(t)\right|=+\infty\ (\mathrm{P}=1)$, що суперечить періодичності процесів $x_{-\infty}(t)$ і $y(t)$.

2) Нехай $\gamma>0$. Покладемо $x_{+\infty}(t)=-\int_t^{+\infty}\left(h_t^u\right)^{-1}\left(f(u)-\sum_{k=1}^{m}\sigma_k(u)g_k(u)\right)du-\sum_{k=1}^{m}\int_t^{+\infty}\left(h_t^u\right)^{-1}g_k(u)\,dw_k(u)$. Умови, що накладені на коефіцієнти рівняння (1), забезпечують існування $x_{+\infty}(t)$ в силу леми 2, оскільки $-\gamma<0$. Процес $x_{+\infty}(t)$ вимірний відносно F^t. У випадку $t\le s$ співвідношення (6) в результаті застосування леми 1, як показано в [4], переходить у таке

$$x_s(t)=\left(h_t^s\right)^{-1}\left[x(s)-\int_s^t h_u^s f(u)\,du-\sum_{k=1}^{m}\int_s^t h_u^s g_k(u)\,dw_k(u)\right], t\le s \quad (9)$$

Перевірка того, що $x_{+\infty}(t)$ задовольняє (9), тобто є розв'язком рівняння (1), виконана в [4]. Доведення періодичності $x_{+\infty}(t)$ здійснюється аналогічно випадку $\gamma<0$ з урахуванням того, що перехідна функція задається співвідношенням (9). Єдиність випливає з тих же міркувань, що і у попередньому випадку. Достатність доведена.

Необхідність. Доведемо необхідність умови теореми від супротивного. Припустимо, що $\gamma=0$ і покажемо, що тоді існують неперервні T-періодичні функції $f(t)$, $g_k(t)$ $k=\overline{1,m}$, для яких не існує жодного T-періодичного розв'язку рівняння (1). Розглянемо при $t\ge 0$ рівняння

$$dx(t)=\left(b(t)x(t)+L+f(t)\right)dt+\sigma(t)x(t)\,dw(t),\quad L=1+\sup_{0\le t\le T}\left|f(t)\right| \quad (10)$$

Розв'язок рівняння (10) при $t\ge 0$ має вигляд

$$x(t)=\exp\left\{\psi(t)+\int_0^t\sigma(u)\,dw(u)\right\}\left[x(0)+\int_0^t\exp\left\{-\psi(u)-\int_0^u\sigma(v)\,dw(v)\right\}\left(L+f(u)\right)du\right],$$

$$\psi(t)=\int_0^t\left(b(u)-\tfrac{1}{2}\sigma^2(u)\right)du,\ \left|\psi(t)\right|\le K<+\infty,\ t\ge 0.$$

Якщо $\sigma(t)$ – неперервна функція і $\sigma(t)\ne 0$, $0<t<T$, то для кожного $x(0)\in R$ маємо

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left[x(0)+\int_0^t\exp\left\{-\psi(u)-\int_0^u\sigma(v)\,dw(v)\right\}\left(L+f(u)\right)du\right]=+\infty$ з ймовірністю 1, а відтак, і за ймовірністю.

Оскільки для деякого $r>0$ $\mathrm{P}\left\{\exp\left\{\psi(t)+\int_0^t\sigma(u)\,dw(u)\right\}\ge r\right\}\ge\dfrac{1}{2}$, то для довільного $N>0$ існує таке $\bar{t}$, що $\mathrm{P}\left\{x(t)>N\right\}\ge\dfrac{1}{4}$ при $t>\bar{t}$. Це суперечить періодичності процесу $x(t)$ і унеможливлює існування періодичних розв'язків рівняння (10). Отже $\gamma\ne 0$. Теорему доведено.

ВИСНОВКИ. Встановлено критерій існування періодичних розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з періодичними коефіцієнтами за умови відсутності багаточастотних ефектів між періодичними коефіцієнтами. Умова існування єдиного періодичного розв'язку точна. Вона відповідає детермінованому випадку і полягає у відмінності від нуля інтегрального середнього за періодом від показника стійкості лінійної частини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с. 2. Далецкий Ю. Л. Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с. 3. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Вища шк., 1992. – 319 с. 4. Ільченко О. В. Стохастично обмежені розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння // Теорія Ймовір. та Матем. Статист., 2003, Вип. 68, С. 47–54. 5 Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1987. – 328 с. 6. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с. 7. Ichikawa A. Bounded and periodic solutions of a linear stochastic evolution equations // Lect. Notes Math. 1299. – 1988. – Springer – Verlag. – p. 124–130.

Надійшла до редколегії 28.10.12

А. Ильченко, канд. физ.-мат. наук

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Найдены условия существования периодических решений линейного неоднородного стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами.

A. Ilchenko, PhD

PERIODIC SOLUTIONS OF THE LINEAR NONHOMOGENUOUS STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

Conditions for existence of periodic solutions of the linear nonhomogenuous stochastic differential equation with periodic coefficients are found.

УДК 519.21

І. Сенько, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: ivan_senko@ukr.net

ВЛАСТИВОСТІ ПОКРАЩЕНОЇ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У ЛІНІЙНІЙ ВЕКТОРНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАЛЕЖНИХ ПОХИБОК У ЗМІННИХ

Розглянуто покращену оцінку найменших квадратів для множинної векторної лінійної моделі з похибками у змінних для випадку р-залежних похибок. Доведено теореми про слабку та строгу консистентність цієї оцінки.

ВСТУП. Розглядаться множинна векторна лінійна модель регресії, у якій припускається наявність похибок вимірювання як у регресорах, так і у відгуках. Невідомий матричний параметр оцінюється за допомогою покращеної оцінки найменших квадратів. Детальний огляд подібних моделей для одновимірного випадку можна знайти у [4].Також розглядалися різноманітні узагальнення одновимірної моделі для різних умов щодо апріорно відомої інформації про похибки вимірювання. Із посиланнями можна ознайомитися у вступі до [2]. Також у [2] розглядалася подібна задача для випадку сукупно незалежних похибок у змінних. Проте складність та людинозалежність систем, які розглядає сучасне природознавство, передбачає складний взаємний зв'язок між елементами цих систем. Тому, для розв'язання задач, пов'язаних із моделюванням, недостатньо припускати умови, подібні до умов класичних теорем теорії ймовірностей, коли окремі випадкові елементи розглядаються незалежними у сукупності. Тому у даній статті розглядається ситуація, коли похибки вимірювання є залежними між собою, а саме *p*-залежними. Подібний зв'язок між похибками для структурної загальної оцінки найменших квадратів розглядався у [6].

Робота побудована наступним чином. У розділі 2 описано модель спостережень та наведено оцінку, властивості якої досліджуються. У розділі 3 доведено теорему про слабку консистентність. У розділі 4 міститься теорема про строгу консистентність. Розділ 5 включає висновки.

Надалі будуть використовуватися наступні позначення. Усі вектори є стовпцями; $\|z\|$ – евклідова норма вектора $z \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{I}_n$ – одинична матриця розміру $n \times n$, для матриці $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ будемо позначати $\|Z\|$ – операторна норма матриці , що відповідає евклідовій нормі у $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{R}^n$, а $\|Z\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2}$ – норма Фробеніуса матриці Z. Через $Z^\dagger$ будемо позначати псевдообернену матрицю до матриці Z [1, розд. 1]. Математичне сподівання та дисперсія будуть позначатися символами E та var, відповідно. Для послідовності випадкових матриць $\left\{X_m \in \mathbb{R}^{n\times d},\quad m \geqslant 1\right\}$ запис $X_m \xrightarrow{P} X_0, m \to \infty$, де $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$, означає збіжність за ймовірністю. Аналогічно, для матриць означається збіжність майже напевно $X_m \xrightarrow{P1} X_0, m \to \infty$. Позначення $X_m = o_P(1), m \to \infty$ означає, що $X_m \xrightarrow{P} 0, m \to \infty$, а $X_m = O_P(1), m \to \infty$ означає, що послідовність $\left\{\|X_m\|\right\}$ є стохастично обмеженою. Для квадратної симетричної матриці V через $\lambda_{\min}(V)$ та $\lambda_{\max}(V)$ позначаються відповідно її найменше та найбільше власні числа. Через const будемо позначати довільну сталу, яка не залежить від кількості вимірювань m.

МОДЕЛЬ СПОСТЕРЕЖЕНЬ. Нехай є деякий невідомий лінійний оператор $\mathfrak{X}$ з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^d$, $\mathfrak{X}z = X_0^T z, z \in \mathbb{R}^n$. Тут $X_0 = \left(x_{ij}^0\right)_{i=1,j=1}^{n\quad d}$. Для знаходження цього оператора спостерігаються набори його вхідних і вихідних значень; спостереження містять адитивні випадкові похибки. Позначимо через $a_i^0 \in \mathbb{R}^n, i \geqslant 1$, невипадкові вектори, що задають істинні значення вхідних даних; $b_i^0 \in \mathbb{R}^d, i \geqslant 1$, – це вектори, що задають істинні значення вихідних даних; елементи