СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ
1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с. 2. Далецкий Ю. Л. Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с. 3. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Вища шк., 1992. – 319 с. 4. Ільченко О. В. Стохастично обмежені розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння // Теорія Ймовір. та Матем. Статист., 2003, Вип. 68, С. 47–54. 5 Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1987. – 328 с. 6. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с. 7. Ichikawa A. Bounded and periodic solutions of a linear stochastic evolution equations // Lect. Notes Math. 1299. – 1988. – Springer – Verlag. – p. 124–130.

Надійшла до редколегії 28.10.12

А. Ильченко, канд. физ.-мат. наук

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Найдены условия существования периодических решений линейного неоднородного стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами.

A. Ilchenko, PhD

PERIODIC SOLUTIONS OF THE LINEAR NONHOMOGENUOUS STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

Conditions for existence of periodic solutions of the linear nonhomogenuous stochastic differential equation with periodic coefficients are found.

УДК 519.21

І. Сенько, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: ivan_senko@ukr.net

ВЛАСТИВОСТІ ПОКРАЩЕНОЇ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У ЛІНІЙНІЙ ВЕКТОРНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАЛЕЖНИХ ПОХИБОК У ЗМІННИХ

Розглянуто покращену оцінку найменших квадратів для множинної векторної лінійної моделі з похибками у змінних для випадку p-залежних похибок. Доведено теореми про слабку та строгу консистентність цієї оцінки.

ВСТУП. Розглядаться множинна векторна лінійна модель регресії, у якій припускається наявність похибок вимірювання як у регресорах, так і у відгуках. Невідомий матричний параметр оцінюється за допомогою покращеної оцінки найменших квадратів. Детальний огляд подібних моделей для одновимірного випадку можна знайти у [4].Також розглядалися різноманітні узагальнення одновимірної моделі для різних умов щодо апріорно відомої інформації про похибки вимірювання. Із посиланнями можна ознайомитися у вступі до [2]. Також у [2] розглядалася подібна задача для випадку сукупно незалежних похибок у змінних. Проте складність та людинозалежність систем, які розглядає сучасне природознавство, передбачає складний взаємний зв'язок між елементами цих систем. Тому, для розв'язання задач, пов'язаних із моделюванням, недостатньо припускати умови, подібні до умов класичних теорем теорії ймовірностей, коли окремі випадкові елементи розглядаються незалежними у сукупності. Тому у даній статті розглядається ситуація, коли похибки вимірювання є залежними між собою, а саме *p*-залежними. Подібний зв'язок між похибками для структурної загальної оцінки найменших квадратів розглядався у [6].

Робота побудована наступним чином. У розділі 2 описано модель спостережень та наведено оцінку, властивості якої досліджуються. У розділі 3 доведено теорему про слабку консистентність. У розділі 4 міститься теорема про строгу консистентність. Розділ 5 включає висновки.

Надалі будуть використовуватися наступні позначення. Усі вектори є стовпцями; $\|z\|$ – евклідова норма вектора $z \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{I}_n$ – одинична матриця розміру $n \times n$, для матриці $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ будемо позначати $\|Z\|$ – операторна норма матриці , що відповідає евклідовій нормі у $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{R}^n$, а $\|Z\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2}$ – норма Фробеніуса матриці Z. Через $Z^\dagger$ будемо позначати псевдообернену матрицю до матриці Z [1, розд. 1]. Математичне сподівання та дисперсія будуть позначатися символами E та var, відповідно. Для послідовності випадкових матриць $\{X_m \in \mathbb{R}^{n\times d},\ \ m \geqslant 1\}$ запис $X_m \xrightarrow{P} X_0,\, m \to \infty$, де $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$, означає збіжність за ймовірністю. Аналогічно, для матриць означається збіжність майже напевно $X_m \xrightarrow{P1} X_0,\, m \to \infty$. Позначення $X_m = o_P(1),\, m \to \infty$ означає, що $X_m \xrightarrow{P} 0,\, m \to \infty$, а $X_m = O_P(1),\, m \to \infty$ означає, що послідовність $\{\|X_m\|\}$ є стохастично обмеженою. Для квадратної симетричної матриці V через $\lambda_{\min}(V)$ та $\lambda_{\max}(V)$ позначаються відповідно її найменше та найбільше власні числа. Через const будемо позначати довільну сталу, яка не залежить від кількості вимірювань m.

МОДЕЛЬ СПОСТЕРЕЖЕНЬ. Нехай є деякий невідомий лінійний оператор $\mathfrak{X}$ з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^d$, $\mathfrak{X}z = X_0^T z,\, z \in \mathbb{R}^n$. Тут $X_0 = \left(x_{ij}^0\right)_{i=1,\, j=1}^{n\quad d}$. Для знаходження цього оператора спостерігаються набори його вхідних і вихідних значень; спостереження містять адитивні випадкові похибки. Позначимо через $a_i^0 \in \mathbb{R}^n,\, i \geqslant 1$, невипадкові вектори, що задають істинні значення вхідних даних; $b_i^0 \in \mathbb{R}^d,\, i \geqslant 1,$ – це вектори, що задають істинні значення вихідних даних; елементи цих векторів позначатимемо відповідно a_{ij}^0 та b_{ij}^0. Розглядається функціональна модель, тобто a_i^0 та b_i^0 – невипадкові. Для істинних значень виконується рівність $b_i^0 = X_0^T a_i^0, \quad i \geqslant 1$.

Спостерігаються вектори $a_i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant m$, причому $a_i = a_i^0 + \tilde{a}_i, \quad b_i = b_i^0 + \tilde{b}_m$, де $\tilde{a}_i$ та $\tilde{b}_i$ – центровані випадкові похибки вимірювань. Елементи цих векторів будуть позначатися аналогічно через $a_{ij},\ \tilde{a}_{ij},\ b_{ij},\ \tilde{b}_{ij}$. Тоді векторна лінійна модель з похибками у змінних задається рівностями $b_i = X_0^T a_i^0 + \tilde{b}_i, \quad a_i = a_i^0 + \tilde{a}_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$

Використовуючи позначення $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}^T = \left(a_{ij}\right)_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$ і так само задаючи A_0, $\tilde{A}$, B, B_0, $\tilde{B}$, де $A = A_0 + \tilde{A}$, $B = B_0 + \tilde{B}$, цю модель можна символічно записати у вигляді наближеної рівності $AX_0 \approx B$, за умови, що $A_0 X_0 = B_0$.

Будемо позначати $V_{\tilde{A}} = E\tilde{A}^T\tilde{A}$ – кореляційна матриця сукупних похибок у регресорі. Вона вважається відомою.

Основним припущенням про похибки спостережень є наступне:

1) *Набори похибок $\{\tilde{a}_{ij}, i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ та $\{\tilde{b}_{il}, i \geqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant d\}$ незалежні між собою і складаються з центрованих випадкових величин, що мають скінченні другі моменти.*

За допомогою методу Corrected Score [3, розд. 7], може бути побудована покращена оцінка найменших квадратів матричного параметра X_0

$$\hat{X} = \hat{X}_m = \left(A^T A - V_{\tilde{A}}\right)^{\dagger} A^T B. \tag{4}$$

У [2] розглядалася консистентність та строга консистентність цієї оцінки за умови незалежності похибок вимірювання, тобто коли виконувалося наступне припущення.

2) *Рядки матриці $\tilde{A}$ незалежні, тобто незалежними є вектори $\{\tilde{a}_i, i \geqslant 1\}$, та рядки матриці $\tilde{B}$ незалежні, тобто незалежними є вектори $\{\tilde{b}_i, i \geqslant 1\}$.*

Проте, як було сказано у розділі 1, така умова не завжди відповідає потребам сучасних прикладних досліджень. Тому розглянемо випадок, коли похибки вимірювань можуть бути залежними між собою.

Означення 1. Будемо казати, що послідовність випадкових векторів $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ є *p*-залежною для деякого $p \geqslant 1$, якщо для будь-якого $i \geqslant 1$ набори векторів $\{\xi_1, \dots, \xi_i\}$ та $\{\xi_{i+p}, \xi_{i+p+1}, \dots\}$ є незалежними між собою.

На похибки вимірювання накладається така умова:

2) *Для деякого сталого натурального числа p, яке не залежить від кількості спостережень m, вектори $\{\tilde{a}_i, i \geqslant 1\}$ є p-залежними, а також p-залежними є вектори $\{\tilde{b}_i, i \geqslant 1\}$.*

Приклад 1. Розглянемо випадок, коли кожне наступне вимірювання параметрів $\{a_i\}$ пов'язане із попереднім за допомогою зсуву. А саме, якщо зсув координат векторів відбувається на q елементів вліво, то для $a_i = \left(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}\right)^T$, наступний вектор $a_{i+1} = \left(a_{i,q+1}, a_{i,q+2}, \dots, a_{i,n}, a_{i+1,n-q+1}, a_{i+1,n-q+2}, \dots, a_{i+1,n}\right)^T$, $i \geqslant 1$. Тоді матриці істинних значень A_0 і похибок $\tilde{A}$ будуть блочно-ганкелевими, а самі похибки *p*-залежними для $p = \left[m/q\right] + 1$. Для зсуву вправо, відповідно, отримуються блочно-тьоплицеві матриці.

СЛАБКА КОНСИСТЕНТНІСТЬ. Для доведення консистентності на моменти похибок у змінних накладається умова:

3) $E\tilde{a}_{ij}^{\,4} \leqslant const;\ E\tilde{b}_{il}^{\,2} \leqslant const,\ i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant d.$

На істинні значення змінних у регресорі накладається умова типу Галло [5]:

4)
$$\frac{\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right) + m}{\lambda^2_{\min}\left(V_{A_0}\right)} \to 0, \quad m \to \infty,$$

де $V_{A_0} \overset{def}{=} A_0^T A_0$.

Тоді справедлива наступна теорема про слабку консистентність.

Теорема 1. Нехай виконуються припущення *1), 2), 3)* та *4)*. Тоді $\hat{X} \xrightarrow{P} X_0, m \to \infty$.

Доведення. Із припущення *4)* випливає, що існує таке $m_0 \in \mathbb{N}$, що для будь-якого $m \geqslant m_0$ виконується $\det V_{A_0} \neq 0$. Тоді для $m \geqslant m_0$ існує $\left(A^T A - V_{\tilde{A}}\right)^{-1}$ і рівняння (4) можна еквівалентно перетворити наступним чином:

$$V_{A_0}^{-1}\left(A^T A - V_{\tilde{A}}\right)\hat{X} = V_{A_0}^{-1} A^T A_0 X_0 + V_{A_0}^{-1} A^T \tilde{B},$$

або

$$\left(I_n + V_{A_0}^{-1} A_0^T \tilde{A} + V_{A_0}^{-1} \tilde{A}^T A_0 + V_{A_0}^{-1}\left(\tilde{A}^T\tilde{A} - V_{\tilde{A}}\right)\right)\hat{X} = X_0 + V_{A_0}^{-1}\tilde{A}^T A_0 X_0 + V_{A_0}^{-1} A^T \tilde{B}. \tag{5}$$

Для консистентності оцінки (4) достатньо показати, що при $m \to \infty$:

$$V_{A_0}^{-1}\left(\tilde{A}^T\tilde{A} - V_{\tilde{A}}\right) \xrightarrow{P} 0; \tag{6}$$

$$V_{A_0}^{-1}\tilde{A}^T A_0 \xrightarrow{P} 0; \tag{7}$$

$$V_{A_0}^{-1} A^T \tilde{B} \xrightarrow{P} 0. \tag{8}$$

Доведемо (6). Маємо

$$V_{A_0}^{-1}\left(\tilde{A}^T\tilde{A} - V_{\tilde{A}}\right) = V_{A_0}^{-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\tilde{a}_j\tilde{a}_j^T - E\tilde{a}_j\tilde{a}_j^T\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^T - E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^T\right)\right). \tag{9}$$

Використовуючи припущення (ii), знаходимо:

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}}\left(\tilde a_{jp+k}\tilde a_{jp+k}^T-E\tilde a_{jp+k}\tilde a_{jp+k}^T\right)\right\|_F^2\leqslant\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot E\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}}\left(\tilde a_{jp+k,i_1}\tilde a_{jp+k,i_2}-E\tilde a_{jp+k,i_1}\tilde a_{jp+k,i_2}\right)\right)^2=$$

$$=\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\mathrm{var}\left(\sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}}\tilde a_{jp+k,i_1}\tilde a_{jp+k,i_2}\right)=\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}}\mathrm{var}\left(\tilde a_{jp+k,i_1}\tilde a_{jp+k,i_2}\right).$$

Із припущення *3)* отримуємо:

$$\mathrm{var}\left(\tilde a_{jp+k,i_1}\tilde a_{jp+k,i_2}\right)=E\left(\tilde a_{jp+k,i_1}\tilde a_{jp+k,i_2}\right)^2-\left(E\tilde a_{jp+k,i_1}\tilde a_{jp+k,i_2}\right)^2\leqslant E\left(\tilde a_{jp+k,i_1}\tilde a_{jp+k,i_2}\right)^2\leqslant\sqrt{E\tilde a_{jp+k,i_1}^4}\cdot\sqrt{E\tilde a_{jp+k,i_2}^4}\leqslant const.$$

Далі, використовуючи співвідношення $\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|=\dfrac{1}{\lambda_{\min}\left(V_{A_0}\right)}$, отримуємо оцінку

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}}\left(\tilde a_{jp+k}\tilde a_{jp+k}^T-E\tilde a_{jp+k}\tilde a_{jp+k}^T\right)\right\|_F^2\leqslant const\cdot\frac{[m/p]+1}{\lambda_{\min}^2\left(V_{A_0}\right)}.$$

Тоді з припущення *4)* маємо: $\quad V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}}\left(\tilde a_{jp+k}\tilde a_{jp+k}^T-E\tilde a_{jp+k}\tilde a_{jp+k}^T\right)\xrightarrow{P}0,\quad m\to\infty.$

А отже, $V_{A_0}^{-1}\left(\tilde A^T\tilde A-V_{\tilde A}\right)=\sum_{k=1}^{p}o_P(1)\xrightarrow{P}0,\quad m\to\infty.$

Доведемо (7). Маємо

$$V_{A_0}^{-1}\tilde A^TA_0=V_{A_0}^{-1}\sum_{j=1}^{m}\tilde a_j a_j^{0T}=\sum_{k=1}^{p}\left(V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\tilde a_{jp+k}a_{jp+k}^{0T}\right).\qquad(10)$$

Оцінимо, із використанням припущень *2)* та *3)*,

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\tilde a_{jp+k}a_{jp+k}^{0T}\right\|_F^2\leqslant\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1,i_2=1}^{n}E\left(\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\tilde a_{jp+k,i_1}a_{jp+k,i_2}^{0T}\right)^2=$$

$$=\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(a_{jp+k,i_2}^{0T}\right)^2E\left(\tilde a_{jp+k,i_1}\right)^2\right)\leqslant\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot const\cdot\left\|A_0\right\|_F^2\leqslant const\cdot\frac{\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right)}{\lambda_{\min}^2\left(V_{A_0}\right)}.$$

Тоді з припущення *4)* випливає, що $V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\tilde a_{jp+k}a_{jp+k}^{0T}\xrightarrow{P}0,\quad m\to\infty.$ А отже, $V_{A_0}^{-1}\tilde A^TA_0=\sum_{k=1}^{p}o_P(1)\xrightarrow{P}0,\quad m\to\infty.$

Доведемо (8). Маємо

$$V_{A_0}^{-1}A^T\tilde B=V_{A_0}^{-1}\sum_{j=1}^{m}a_j\tilde b_j^T=\sum_{k=1}^{p}\left(V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}a_{jp+k}\tilde b_{jp+k}^T\right).\qquad(11)$$

Тоді з припущень *2)–4)* знаходимо:

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}a_{jp+k}\tilde b_{jp+k}^T\right\|_F^2\leqslant\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{d}E\left(\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}a_{jp+k,i_1}\tilde b_{jp+k,i_2}^T\right)^2=\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{d}\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}E\left(a_{jp+k,i_1}\right)^2E\left(\tilde b_{jp+k,i_2}^T\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot const\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}E\left(\left(a_{jp+k,i_1}^0\right)^2+2a_{jp+k,i_1}^0\tilde a_{jp+k,i_1}+\left(\tilde a_{jp+k,i_1}\right)^2\right)\leqslant const\cdot\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\left(\left\|A_0\right\|_F^2+m\right)\leqslant$$

$$\leqslant const\cdot\frac{\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right)+m}{\lambda_{\min}^2\left(V_{A_0}\right)}\to 0,\quad m\to\infty.$$

Отже, $V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}a_{jp+k}\tilde b_{jp+k}^T\xrightarrow{P}0,\quad m\to\infty.$ Разом із тим $V_{A_0}^{-1}A^T\tilde B=\sum_{k=1}^{p}o_P(1)\xrightarrow{P}0,\quad m\to\infty.$

Зауваження 1. Так само як і у [2] можна отримати порядок збіжності оцінки $\hat X$ до істинного значення X_0.

$$\left\|\hat X-X_0\right\|_F=\frac{\sqrt{\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right)}+\sqrt{m}}{\lambda_{\min}\left(V_{A_0}\right)}\cdot O_P(1),\quad m\to\infty.$$

СТРОГА КОНСИСТЕНТНІСТЬ. Розглянемо наступну лему, яка є різновидом нерівності Розенталя [7].

Лема 1 *(Нерівність Розенталя для p-залежних випадкових векторів)* Нехай $\{\xi_i, i\geqslant 1\}$ – послідовність p-залежних випадкових векторів з $\mathbb{R}^n$, $E\xi_i=0, i\geqslant 1$. Тоді:

а) для будь-якого $\gamma \geqslant 2$ та для всіх $m \geqslant 1$ має місце нерівність

$$E\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i\right\|^{\gamma} \leqslant c_1(\gamma,p,n)\cdot\max\left\{\left(\sum_{i=1}^{m}E\|\xi_i\|^2\right)^{\gamma/2},\sum_{i=1}^{m}E\|\xi_i\|^{\gamma}\right\};$$

б) для будь-якого $\gamma \geqslant 2$, для всіх $m \geqslant 1$ та для будь-якого набору чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$E\left\|\sum_{i=1}^{m}a_i\xi_i\right\|^{\gamma} \leqslant c_2(\gamma,p,n)\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\right)^{\gamma/2}\cdot\sup_{1\leqslant i\leqslant m}E\|\xi_i\|^{\gamma};$$

де $c_1(\gamma,p,n)$ та $c_2(\gamma,p,n)$ не залежать від m та від вибору чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Для доведення строгої консистентності на похибки вимірювання накладаються такі умови:

5) $\exists r > 2 : E|\tilde{a}_{ij}|^{2r} \leqslant const; E\left|\tilde{b}_{ij}\right|^{r} \leqslant const,\ i \geqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant d.$

Для істинних значень припускається виконання наступної умови.

6) Для числа r з умови (vi^{o}) та деякого $m_0 \geqslant 1$ виконується:

$$\sum_{m=m_0}^{\infty}\left(\frac{\left(\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right)\right)^{r/2}}{\lambda_{\min}^{r}\left(V_{A_0}\right)}+\frac{m^{r/2}}{\lambda_{\min}^{r}\left(V_{A_0}\right)}\right)<\infty.$$

Зауваження 2. Розглядати ряд, починаючи з $m = m_0$, потрібно внаслідок того, що матриця V_{A_0} гарантовано буде виродженою для малих значень m, зокрема для $m < n$.

Зауваження 3. Умови *5)* та *6)* є посиленим варіантом умов *3)* та *4)*, відповідно.

Зауваження 4. Умова *6)* з числом $r > 2$ виконується, зокрема, коли $m^{-1}V_{A_0} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m}a_i^0 a_i^{0T}$ прямує до деякої додатно визначеної матриці, коли $m \to \infty$.

Теорема 2 *(Строга консистентність)* Нехай виконуються припущення 1), 2), 5) та 6). Тоді

$$\hat{X} \xrightarrow{P1} X_0,\ m \to \infty.$$

Доведення. Використаємо представлення (5). Тоді для строгої консистентності достатньо довести, що збіжність у (6)–(8) буде майже напевно.

Доведемо, що (6) збігається майже напевно. Використовуючи представлення (9), достатньо показати, що для будь-якого k, $1 \leqslant k \leqslant p$, виконується

$$V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right)\xrightarrow{P1}0,\quad m\to\infty. \tag{12}$$

Для цього оцінимо момент порядку r для числа $r > 2$ з умови (v) за допомогою леми 1 маємо:

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right)\right\|_F^{r}\leqslant\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^{r}E\left\|\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right)\right\|_F^{r}\leqslant$$

$$\leqslant const\cdot\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^{r}\max\left(\left(\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{2}\right)^{r/2},\ \sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{r}\right).$$

Використовуючи припущення (ii) та (v), розглянемо окремо:

$$E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{r}=E\left(\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\geqslant m}}\left(\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}-E\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right)^2\right)^{r/2}\leqslant$$

$$\leqslant const\cdot E\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\left(|\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}|^{r}+r|\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}|^{r-1}E\left|\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right|\right)=$$

$$=const\cdot\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\left(E|\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}|^{r}+rE|\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}|^{r-1}E\left|\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right|\right)=$$

$$\leqslant const\cdot\sum_{j,k=1}^{n}\left(\sqrt{E|\tilde{a}_{jp+k,i_1}|^{2r}}\sqrt{E|\tilde{a}_{jp+k,i_2}|^{2r}}+r\sqrt{E|\tilde{a}_{jp+k,i_1}|^{2r-2}}\sqrt{E|\tilde{a}_{jp+k,i_2}|^{2r-2}}E\sqrt{|\tilde{a}_{jp+k,i_1}|^2|\tilde{a}_{jp+k,i_2}|^2}\right)\leqslant const.$$

Далі знаходимо

$$E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{2}\leqslant\left(E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{r}\right)^{\frac{2}{r}}\leqslant const.$$

Отже,

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right)\right\|_F^{r}\leqslant const\cdot\frac{m^{r/2}}{\lambda_{\min}^{r}\left(V_{A_0}\right)}.$$

Тоді, використовуючи припущення *6)*, за лемою Бореля-Кантеллі отримуємо (12). А отже, (6) збігається майже напевно.

Доведемо, що (7) *збігається майже напевно.* Використовуючи представлення (10), достатньо показати, що для будь-якого $k, 1 \leqslant k \leqslant p$, виконується

$$V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} \tilde{a}_{jp+k} a_{jp+k}^{0T} \xrightarrow{P1} 0, \quad m \to \infty. \tag{13}$$

За допомогою леми 1 оцінимо момент

$$E\left\| V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} \tilde{a}_{jp+k} a_{jp+k}^{0T} \right\|_F^r \leqslant \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r E\left\| \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} \tilde{a}_{jp+k} a_{jp+k}^{0T} \right\|_F^r \leqslant \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r const \cdot \left(\sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} \left\| a_{jp+k}^{0} \right\|^2 \right)^{r/2} \sup_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} \left\| \tilde{a}_{jp+k} \right\|^r \leqslant$$

$$\leqslant \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r const \cdot \left\| A_0 \right\|_F^r \leqslant const \cdot \frac{\left(\lambda_{\max}\left(V_{A_0} \right) \right)^{r/2}}{\lambda_{\min}^r\left(V_{A_0} \right)}.$$

Тому з припущення (vi) за лемою Бореля-Кантеллі випливає (13), а разом із тим (7) збігається майже напевно.

Доведемо, що (8) збігається майже напевно. Використовуючи представлення (11), достатньо показати, що для будь-якого $k, 1 \leqslant k \leqslant p$, виконується

$$V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \xrightarrow{P1} 0, \quad m \to \infty. \tag{14}$$

Використовуючи припущення *2)* та лему 1, оцінимо момент

$$E\left\| V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \leqslant \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r E\left\| \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \leqslant$$

$$\leqslant const \cdot \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r \max\left(\left(\sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} E\left\| a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^2 \right)^{r/2}, \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} E\left\| a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \right).$$

Далі, за припущеннями *2)* та *5)* оцінимо для $r \geqslant 2$

$$\sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} E\left\| a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \leqslant \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} E\left\| a_{jp+k} \right\|^r E\left\| \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|^r \leqslant const \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} \left(\left\| a_{jp+k}^{0} \right\|^r + E\left\| \tilde{a}_{jp+k} \right\|^r \right) \leqslant const \cdot \left(\left\| A_0 \right\|_F^r + m \right).$$

Тоді

$$\left(\sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} E\left\| a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^2 \right)^{r/2} \leqslant \left(const \left(\left\| A_0 \right\|_F^2 + m \right) \right)^{r/2} \leqslant const \cdot \left(\left\| A_0 \right\|_F^r + m^{r/2} \right).$$

Остаточно отримуємо, що

$$E\left\| V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j\geq 0 \\ jp+k\leq m}} a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \leqslant const \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r \left(\left\| A_0 \right\|_F^r + m^{r/2} \right) \leqslant const \left(\frac{\left(\lambda_{\max}\left(V_{A_0} \right) \right)^{r/2}}{\lambda_{\min}^r\left(V_{A_0} \right)} + \frac{m^{r/2}}{\lambda_{\min}^r\left(V_{A_0} \right)} \right).$$

Отже, за припущенням *6)* справджується (14), а тому збіжність у (8) буде майже напевно.

ВИСНОВКИ. Доведено слабку та строгу консистентність покращеної оцінки найменших квадратів для лінійної множинної моделі регресії з похибками у змінних за умови, коли ці похибки є *p*-залежними. Цікавим висновком є те, що умови на моменти похибок та істинні значення регресорів можуть бути взяті такими самими, як і у випадку повністю незалежних похибок. Подальший інтерес для дослідження становитьзнаходження умов асимптотичної нормальності цієї оцінки для такої моделі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1988. 2. Сенько І.О. Консиситентність покращеної оцінки найменших квадратів у векторній лінійній моделі з похибками вимірювання // Український математичний журнал. – 2012. – №11. 3. Carroll R.J., Ruppert D., and Sefanski L.A. Measurement Error in Nonlinear Models. – London. – 1995. 4. Fuller W.A. Measurement Error Models. – New York. – 1987. 5. Gallo P.P. Consistency of regression estimates when some variables are subject to error // Comm. Statist. B-Theory Methods. – 1982. – №11. 6. Kukush A., Markovsky I., and Van Huffel S. Consistency of the structured total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model // Journal of Statistical Planning and Inference. – 2005. – №2. 7. Rosenthal H.P. On the subspaces of Lp(p>2) spanned by sequences of independent random variables // Israelian Journal of Mathematics. – 1970. – №4.

Надійшла до редколегії 31.10.12

И. Сенько, асп

СВОЙСТВА УЛУЧШЕНОЙ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ЛИНЕЙНОЙ ВЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ ПРИ НАЛИЧКИ ЗАВИСИМЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрена улучшенная оценка наименьших квадратов для множественной векторной линейной модели с погрешностями в переменных для случая p-зависимых погрешностей. Доказана теорема о слабой и строгой консистентности этой оценки.

I.Senko, PhD graduate

PROPERTIES OF ADJUSTED LEAST SQUARES ESTIMATOR IN A LINEAR VECTOR ERRORS-IN-VARIABLES MODEL WITH DEPENDENT ERRORS

Adjusted least squares estimator for multivariate vector linear errors-in-variables model under assumption of p-dependence of errors is considered. Theorems about weak and strong consistency of this estimator are proved.