УДК 519.21

Н. Стефанська, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛАПЛАСА І ПУАССОНА В КУЛІ

Введено невласний інтеграл Рімана від необмеженої випадкової функції. Розв'язано задачу Діріхле для стохастичних рівнянь Лапласа і Пуассона в кулі, керованих загальними стохастичними мірами. Отримано розв'язки цих рівнянь.

ВСТУП. В [1] розглянуто задачу Діріхле для рівнянь Лапласа і Пуассона в R^3, розв'язки якої записані за допомогою функції Гріна. У цій статті розглядаються стохастичні рівняння Лапласа і Пуассона.

Позначимо через $L_0(\Omega, F, P)$ множину дійснозначних випадкових величин, заданих на довільному повному ймовірносному просторі (Ω, F, P) (точніше кажучи, їх класів P-еквівалентності). Збіжність в L_0 – це збіжність за ймовірністю, тобто збіжність за семінормою $\|\eta\| = \sup\{\delta : P\{|\eta| > \delta\} > \delta\}$.

Нехай $D = D(R^d)$ – множина всіх нескінченно диференційовних функцій $\varphi : R^d \to R$, $d \geq 2$, з компактним носієм.

Означення 1 [3]. *Узагальненою випадковою функцією (у. в. ф.)* називається лінійне неперервне відображення $\xi : D \to L_0$. Множину таких у. в. ф. позначимо $D_r^{'} = D_r^{'}(R^d)$.

Нехай $\mathrm{B} = \mathrm{B}(R^d)$ – σ-алгебра борельових підмножин простору R^d, $S_d = \{|s| = 1\}$ – одинична сфера в R^d, $P = P(S_d)$ – множина визначених і неперервних на одиничній сфері функцій $\psi : S_d \to R$.

Означення 2. *Стохастичною мірою* називається σ-адитивне відображення $\mu : \mathrm{B} \to L_0$.

У [10] розглянуто властивості таких мір, а також визначено та досліджено інтеграл вигляду $\int_A f d\mu$, де $A \in \mathrm{B}$, f – дійсна вимірна функція. Будується він стандартним чином з використанням наближення простими функціями. Зокрема, будь-яка обмежена вимірна дійсна функція є інтегрованою за μ. Для такого інтеграла має місце аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність.

Теорема 1 [3]. Стохастична міра μ визначає у. в. ф. $\dot{\mu}$ за таким правилом:

$$\left(\dot{\mu}, \varphi\right) = \int_{R^d} \varphi(x) d\mu(x), \varphi \in D. \tag{1}$$

Означення 3 [10]. Нехай $M \subset R^d$ – вимірна за Жорданом множина, $\xi : M \times \Omega \to R$ – вимірна випадкова функція. Будемо говорити, що ξ *інтегрована (за Ріманом) на* M, якщо для будь-якої послідовності розбиття множини $M = \bigcup_{1 \leq k \leq k_n} M_k$, $n \geq 1$, $\max_k diam M_k \to 0$ при $n \to \infty$, $x_k \in M_k$, існує границя за ймовірністю інтегральних сум

$$P \lim_{n \to \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \xi(x_k) m(M_k) = \int_M \xi(x) dx.$$

Тут m позначає міру Жордана, в кожному розбитті множини M_k, $1 \leq k \leq k_n$, вимірні за Жорданом і можуть перетинатись тільки по своїх межах.

Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними (СДРЧП) описують різні процеси в фізичних і біологічних моделях при наявності випадкового впливу.

Для знаходження узагальненого розв'язку рівняння записують в інтегральній (слабкій формі) з наявністю основної функції із відповідного простору і деякого стохастичного інтеграла. У [5] розглянуто параболічні СДРЧП, де в інтегральному записі в якості стохастичної частини використано інтеграл Іто по відрізку часу, а по просторових змінних похідні брались звичайним чином. Аналогічні рівняння в областях вивчені в [9].

У [13] побудовано стохастичний інтеграл по мартингальній мірі $\mathrm{M}_t(A)$, $A \subset R^d$, $t \geq 0$. Рівняння, яке записане в слабкій формі, містило інтеграл по $\mathrm{M}(dx, dt)$, а шуканими об'єктами були у. в. ф., визначені на основних функціях Шварца в R^{d+1}. Узагальнення цього інтеграла для розв'язку хвильового рівняння в багатовимірному випадку наведено в [8]. М'які розв'язання стохастичного рівняння Пуассона розглянуто в [11].

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ.

Означення 4. Випадкова функція $\xi : K \times \Omega \to R$ називається *обмеженою за ймовірністю* на множині K, якщо

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{x \in K} P\{|\xi(x)| > c\} = 0 \text{ або ж } \lim_{c \to \infty} \sup_{x \in K} \|c\xi(x)\| = 0.$$

Нехай на обмеженій множині $K \subset R^d$ задано необмежену допустиму випадкову функцію $\xi : K \times \Omega \to R$. Це означає, що існує така множина $Z \subset K$, $m(Z) = 0$, що поза будь-яким її околом функція $\xi(x)$ обмежена за ймовірністю. Візьмемо довільну послідовність жорданових множин $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K$ (вичерпні множини) таких, що будь-яка доповнююча множина $K \setminus K_n$ містить строго Z і сама міститься в деякому ε_n-околі множини Z, причому $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо для інтегралів $I_n(\xi) = \int_{K_n} \xi(x) dx$ при $n \to \infty$ існує границя за ймовірністю, яка не залежить від вибору послідовності множин K_n, то будемо говорити, що *невласний інтеграл* $I(\xi)=\int_K \xi(x)dx$ *існує*, або *збігається за ймовірністю*, і покладемо

$$I(\xi)=\int_K \xi(x)dx = P\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}\xi(x)dx\ .$$

Для дійсної функції дане визначення співпадає з визначенням у звичайному сенсі невласного інтеграла Рімана [2].

Побудова вичерпної послідовності володіє такою властивістю: якщо множина Z замкнена, $K_1\subset K_2\subset\ldots$ і $K_1^{'}\subset K_2^{'}\subset\ldots$ – дві вичерпні послідовності, то будь-яка множина K_n із першої послідовності міститься в деякій множині $K_{n'}^{'}$ із другої послідовності, і навпаки. Тому, маючи дві вичерпні послідовності множин, завжди можна побудувати змішану вичерпну послідовність $K_{i_1}\subset K_{i_1'}^{'}\subset K_{i_2}\subset K_{i_2'}^{'}\subset\ldots$. Звідси слідує, що із наявності границі за ймовірністю інтегралів вигляду $I_n(\xi)=\int_{K_n}\xi(x)dx$ по кожній вичерпній послідовності вже існує збіг цих границь: границя за ймовірністю по змішаній послідовності має співпадати із границями за ймовірністю по послідовностях $K_1\subset K_2\subset\ldots$ і $K_1^{'}\subset K_2^{'}\subset\ldots$, звідки випливає рівність цих границь.

Теорема 2. Нехай необмежена випадкова функція ξ інтегровна на обмеженій множині K в невласному сенсі, $f:K\to R$ – невипадкова обмежена рівномірно неперервна на K функція. Тоді $f\xi$ інтегровна на K в невласному сенсі.

Доведення. Візьмемо послідовність вичерпних множин $K_n\uparrow K$, на кожній з яких функція ξ обмежена за ймовірністю. З означення обмеженості функції f $\exists C>0:\left|f(x)\right|\le C$. Згідно леми 3.6 [10] отримаємо, що $\left\|\int_{K_n\setminus K_l} f(x)\xi(x)\right\|\le 16\sup_{A\subset(K_n\setminus K_l)}\left\|C\int_A \xi(x)dx\right\|$. Якщо ліва частина цієї нерівності не прямує до нуля при $n,l\to\infty$, то побудуємо послідовність множин $E_j\uparrow K$, $j\to\infty$, таку для якої, що інтеграли по цих множинах від ξ утворюють нефундаментальну послідовність. □

Теорема 3. Нехай необмежена випадкова функція ξ інтегровна на обмеженій множині K в невласному сенсі, $f_n:K\to R$ – невипадкові обмежені рівномірно неперервні на K такі функції, що $\sup_{n\ge1,x\in K}\left|f_n(x)\right|=C<\infty$, $\sup_{x\in K_l}\left|f_n(x)\right|\to 0$, $K_l\subset K$, ξ інтегровна на кожній K_l. Тоді $\int_K f_n(x)\xi(x)dx\xrightarrow{P}0$, $n\to\infty$.

Доведення. Припустимо, що твердження невірне. Використовуючи лему 3.7 [10], можна знайти $\varepsilon_0>0$, підпослідовність f_{n_j}, $j\ge1$, обмежені неперетинні множини $K_j\subset K\setminus K_l$ для яких $\left\|\int_{K_j} f_{n_j}(x)\xi(x)\right\|>\varepsilon_0$. Лема 3.6 [10] показує, що знайдуться такі обмежені неперетинні множини $A_j\subset K\setminus K_l$ для яких $\left\|C\int_{A_j}\xi(x)dx\right\|>\frac{\varepsilon_0}{16}$. Остання нерівність суперечить інтегровності у невласному сенсі ξ на K. □

Інтегровна на обмеженій множині K необмежена випадкова функція ξ породжує у. в. ф. за правилом

$$(\xi(x),\varphi(x))=\int_K \xi(x)\varphi(x)dx\ ,\ \varphi\in D\ . \tag{2}$$

Множину таких функцій позначимо через $D_r^o=D_r^0(R^d)$.

Теорема 4. Нехай G – довільна множина з $\mathrm{B}(R^d)$, $\beta=\beta(G)$ – σ-алгебра борельових підмножин на G, μ – стохастична міра на (G,β), $K\subset R^d$ – обмежена множина. Необмежена (невипадкова) функція $f(x,g):K\times G\to R$ вимірна, інтегровна за Ріманом по dx на K в невласному сенсі при кожному фіксованому $g\in G$, $\left|f(x,g)\right|\le h(g)$ і $\int_K\left|f(x,g)\right|dx\le h_1(g)$ для функцій $h,h_1:G\to R$, які є інтегровними за μ на G. Тоді випадкова функція $\eta(x)=\int_G f(x,g)d\mu(g)$ інтегровна на K в сенсі означення 4 і $\int_K dx\int_G f(x,g)d\mu(g)=\int_G d\mu(g)\int_K f(x,g)dx$.

Доведення. Внутрішній інтеграл в правій частині існує за умовою. За теоремою 7.3.5 [12] існує внутрішній інтеграл в лівій частині. Візьмемо послідовність вичерпних множин $K_n\uparrow K$. На кожній із множин K_n функція f є обмеженою. За теоремою 4.1 [10] маємо $\int_{K_n}dx\int_G f(x,g)d\mu(g)=\int_G d\mu(g)\int_{K_n}f(x,g)dx$. Тепер використовуємо аналог теореми Лебега і умову обмеженості функцією h_1. □

Означення 5. Нехай $t=\varphi(u):R^k\to R^d$ – взаємно однозначне відображення, що визначене на замкнутій жордановій множині G, $G\subset R^k$. Випадкова функція $\xi(t)$ визначена і неперервна на T, $T=t(G)\subset R^d$. Візьмемо довільне розбиття множини G, $G=\bigcup_i B_i$, $i\ge1$, $\max_i diamB_i\to0$ при $i\to\infty$, $\tau_i\in B_i$. Розглянемо відображення $\tau_i+\Delta u\to\varphi(\tau_i)+\varphi'(\tau_i)\Delta u$. Тоді $T=\bigcup_i E_i$, E_i – образи множин B_i, E_i – жорданові множини. Будемо говорити, що ξ *інтегровна (за Ріманом) по поверхні* T, якщо існує границя за ймовірністю інтегральних сум

$$P\lim_{i\to\infty}\sum_i\xi(\varphi(\tau_i))\left\|\left[\frac{d\varphi(\tau_i)}{du_1},\ldots,\frac{d\varphi(\tau_i)}{du_d}\right]\right\|\left|B_i\right|=\int_G\xi(\varphi(u))\left\|\left[\frac{d\varphi(u)}{du_1},\ldots,\frac{d\varphi(u)}{du_d}\right]\right\|du=\int_T\xi(t)d\sigma_t.$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ. Нехай μ – стохастична міра на борельових підмножинах одиничної сфери $\{|t|=1\}$ в R^d. Позначимо $d\sigma_t$ – елемент площі сфери в R^d, $\omega_d=\dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ – площа одиничної сфери в R^d.

Розглянемо задачу Діріхле для стохастичного рівняння Лапласа в кулі

$$\Delta\eta(x)=0\,,\ |x|<1,\ \eta=\dot{\mu}\ \text{на множині}\ \{|x|=1\} \tag{3}$$

відносно невідомої вимірної випадкової функції $\eta(x)$. Рівняння (3) в слабкому сенсі має вигляд

$$(\eta(x),\Delta\varphi(x))=0\,,\ |x|<1,\ \operatorname{supp}\varphi\subset\{|x|\le 1\}\,,\ \varphi\in D\,, \tag{4}$$

$$P\lim_{r\to 1-}\int_{|t|=1}\eta(rt)\psi(t)\,d\sigma_t=\int_{|t|=1}\psi(t)\,d\mu(t)\,,\ \psi\in P\,. \tag{5}$$

Теорема 5. Функція $\eta(x)=\dfrac{1}{\omega_d}\displaystyle\int_{|s|=1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\mu(s)$ є розв'язком задачі (4)–(5).

Доведення. Розглянемо властивості випадкової функції $\eta(x)$. Для кожного x, $|x|<1$, підінтегральна функція обмежена і неперервна, тому інтеграл визначено. Перевіримо інтегровність $\eta(x)$ за Ріманом у невласному сенсі. Візьмемо зростаючі вимірні за Жорданом многочлени K_n, $K_n\subset K_{n+1}$, $K_n\subset\{|x|<1\}$, $\bigcup\limits_{n\ge1}K_n=\{|x|<1\}$. На кожній K_n функція $\dfrac{1-|x|^2}{|s-x|^d}$ обмежена по множині $|s|=1$, тобто $K_n\subset\{|x|\le 1-\delta_n\}$, $\delta_n\to 0+$. Для $B_k=K_n\setminus K_{n-1}$ маємо перевірити збіжність ряду

$$\sum_{k\ge1}\int_{B_k}\eta(x)dx=\frac{1}{\omega_d}\sum_{k\ge1}\int_{B_k}dx\int_{|s|=1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\mu(s)\overset{(I)}{=}\frac{1}{\omega_d}\sum_{k\ge1}\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{B_k}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx\overset{(II)}{=}$$

$$=\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\sum_{k\ge1}\int_{B_k}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx=\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx.$$

Згідно теореми 4.1 [10] на кожній B_k зміна порядку інтегрування законна, тому перехід (I) справедливий. Друга рівність очевидна, так як зовнішній інтеграл не залежить від k. Останній інтеграл є обмеженою функцією. Для $|s|=1$ маємо

$$\int_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx\le\int_{|x|<1}\frac{2}{|s-x|^{d-1}}dx\le\int_{|s-x|<2}\frac{2}{|s-x|^{d-1}}dx=4\omega_d<\infty\,. \tag{6}$$

Отже, $\eta(x)$ – інтегровна за Ріманом у невласному сенсі на $\{|x|<1\}$ і за теоремою 2 породжує у. в. ф.

Доведемо гармонічність функції $\eta(x)$ (як узагальненого лінійного функціонала). Маємо:

$$(\Delta\eta(x),\varphi(x))=(\eta(x),\Delta\varphi(x))=\int_{|x|<1}\eta(x)\Delta\varphi(x)=\int_{|x|<1}\Delta\varphi(x)\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\mu(s)\overset{(I)}{=}$$

$$=\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}\Delta\varphi(x)dx\overset{(II)}{=}\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{|x|<1}\varphi(x)\Delta\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx\overset{(III)}{=}\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\times 0=0.$$

В (I) ми використали можливість перестановки порядку інтегрування, яка пояснюється так. Для кожного $\delta>0$ є потрібна в теоремі 4 обмеженість, і ми маємо

$$\int_{|x|\le1-\delta}\eta(x)\Delta\varphi(x)dx=\int_{|x|\le1-\delta}\Delta\varphi(x)dx\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\mu(s)=\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{|x|\le1-\delta}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}\Delta\varphi(x)dx.$$

За теоремою 2 для інтегровної за Ріманом функции η інтегровною буде $\eta\Delta\varphi$. При $\delta\to0$ перший вираз прямує до $\displaystyle\int_{|x|<1}\eta(x)\Delta\varphi(x)dx$, а останній за аналогом теореми Лебега – до $\dfrac{1}{\omega_d}\displaystyle\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}\Delta\varphi(x)dx.$ Використовуючи нерівність (6), знаходимо $\displaystyle\int_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}\Delta\varphi(x)dx\le C\int_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx\le 4\omega_d C.$

Рівність (II) справедлива завдяки формулі Гріна (див. [7], гл. 4, п. 4.52) (та нульовому граничному значенні φ). Функція $\dfrac{1-|x|^2}{|s-x|^d}$ гармонічна (див. п. 4.56д [7]). Скориставшись означенням гармонічної функції, отримаємо перехід (III). Залишилось перевірити граничну умову. За теоремою 1.10 [6] для неперервної на одиничній сфері функції f при $|x_0|=1$ справджується рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}f(s)\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\sigma_s=f(x_0),|x_0|=1. \tag{7}$$

У данному випадку для $\psi \in P$, при $r \to 1-$, маємо

$$\lim_{r\to 1-} \int_{|t|=1} \eta(rt)\psi(t)\,d\sigma_t = \lim_{r\to 1-} \frac{1}{\omega_d} \int_{|t|=1} \psi(t)\,d\sigma_t \int_{|s|=1} \frac{1-|rt|^2}{|s-rt|^d}\,d\mu(s) \overset{(I)}{=} \lim_{r\to 1-} \frac{1}{\omega_d} \int_{|s|=1} d\mu(s) \int_{|t|=1} \frac{1-|rt|^2}{|s-rt|^d}\psi(t)\,d\sigma_t \overset{(II)}{=}$$

$$= \lim_{r\to 1-} \frac{1}{\omega_d} \int_{|s|=1} d\mu(s) \int_{|t|=1} \frac{1-r^2}{|rs-t|}\psi(t)\,d\sigma_t \overset{(III)}{=} \lim_{r\to 1-} \frac{1}{\omega_d} \int_{|s|=1} d\mu(s) \int_{|t|=1} \frac{1-|x|^2}{|t-x|^d}\psi(t)\,d\sigma_t.$$

За теоремою (4) зміна порядку інтегрування (I) виконується. В (II) використано, що $|s-rt| = |rs-t|$, при $|t| = |s| = 1$. При фіксованому s, $rs = x$, $r = |x|$ справедлива рівність (III).

Гармонічна функція набуває найбільше значення на сфері. Оскільки $\psi \in P$, тоді підінтегральна функція $\frac{1}{\omega_d}\frac{1-|x|^2}{|t-x|^d}\psi(t)$ обмежена.

Отже, маємо $\left|\frac{1}{\omega_d}\int_{|t|=1}\frac{1-|x|^2}{|t-x|^d}\psi(t)\,d\sigma_t\right| \le \max_t|\psi(t)|\frac{1}{\omega_d}4\omega_d = 4C, C = const.$

За аналогом теореми Лебега і рівністю (7) справджується співвідношення

$$P\lim_{r\to 1-} \frac{1}{\omega_d} \int_{|s|=1} d\mu(s) \int_{|t|=1} \frac{1-|x|^2}{|t-x|^d}\psi(t)\,d\sigma_t = \frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}\psi(s)\,d\mu(s).$$

Нехай ν – стохастична міра на борельових підмножинах відкритої кулі $|x|<1$ в R^d, $\dot{\nu}$ – у. в. ф., яка визначається аналогічно за правилом $\left(\dot{\nu},\varphi\right) = \int_{|x|<1}\varphi(x)\,d\nu(x)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x|\le 1\}$, $\varphi \in D$.

Розглянемо задачу Діріхле для стохастичного рівняння Пуассона в кулі вигляду

$$\Delta\eta(x) = -\dot{\nu}(x),\ |x|<1,\ \eta = 0 \text{ на множині } \{|x|=1\}, \tag{8}$$

яка в слабкому сенсі запишеться наступним чином

$$\left(\eta(x),\Delta\varphi(x)\right) = -\int_{|x|<1}\varphi(x)\,d\nu(x),\ |x|<1,\ \operatorname{supp}\varphi\subset\{|x|\le 1\},\ \varphi\in D, \tag{9}$$

$$P\lim_{n\to\infty}\int_{|x|<1}d\nu(x)\int_{|y|<1}\Im(x,y)\varphi_n(y)\,dy = 0, \tag{10}$$

де $\varphi_n \in D$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset \{1-\varepsilon_n \le |x| \le 1\}$ для $\varepsilon_n \to 0+$, $\varphi_n \to \delta_{\{|y|=1\}}$ при $n\to\infty$ в слабкому сенсі (тобто $\lim_{n\to\infty}\int_{|y|\le 1}\varphi_n(y)f(y)\,dy = \int_{|y|=1}f(y)\,d\sigma_y$ для будь-якої неперервної f,

функція $h(x) = \sup_n\left|\int_{|y|<1}\Im(x,y)\varphi_n(y)\,dy\right|$ інтегровна за мірою $d\nu(x)$.

Теорема 6. У. в. ф. η із значеннями в $D_r^{'}$, яка задана рівністю

$$\left(\eta,\varphi(x)\right) = \int_{|x|<1}d\nu(x)\int_{|y|<1}\Im(x,y)\varphi(y)\,dy, \tag{11}$$

де $\Im(x,y)$ – функція Гріна для даної області, $\operatorname{supp}\varphi\subset\{|x|\le 1\}$, $\varphi\in D$, є розв'язком задачі (9), (10).

Доведення. Для функції Гріна справджується нерівність

$$0 < \Im(x,y) < \frac{1}{\omega_d|x-y|^{d-2}}, \text{ при } d \ge 3. \tag{12}$$

Тому для $\varphi \le C$ маємо $\left|\int_{|y|<1}\Im(x,y)\varphi(y)\,dy\right| \le C\int_{|y|<1}\Im(x,y)\,dy < \infty.$ Вираз в (11) визначено коректно.

Перевіримо виконання рівності (9) для функції η.

Враховуючи умову (11), отримуємо:

$$\left(\eta(x),\Delta_x\varphi(x)\right) = \int_{|x|<1}d\nu(x)\int_{|y|<1}\Im(x,y)\Delta_y\varphi(y)\,dy \overset{(I)}{=} \int_{|x|<1}d\nu(x)\int_{|y|<1}\Delta_y\Im(x,y)\varphi(y)\,dy \overset{(II)}{=} -\int_{|x|<1}\varphi(x)\,d\nu(x).$$

Рівність (I) справедлива завдяки відповідній формулі Гріна [7, гл. 4, п. 4.52], (та нульовому граничному значенню φ). В (II) використано, що для функції Гріна в кулі при кожному x в сенсі узагальнених функцій буде $\Delta_y\Im(x,y) = -\delta(x-y)$, де δ − функція Дірака [1,§ 29].

Покажемо виконання граничної умови (10). Для кожного x, $|x|<1$ маємо

$$\int_{|y|\le 1}\Im(x,y)\varphi_n(y)\,dy = \int_{|y|>1-\delta_n}\Im(x,y)\varphi_n(y)\,dy.$$

При досить великому n, $|x|<1-\delta_n$, а функція Гріна $\Im(x,y)$ неперервна на області інтегрування. З умови слабкї збіжності $\varphi_n \to \delta_{|y|=1}$ останній інтеграл прямує до $\int\limits_{|y|=1} \Im(x,y)\,d\sigma_y \overset{(I)}{=} \int\limits_{|y|=1} 0\cdot d\sigma_y = 0$. Рівність (I) справедлива, так як функція Гріна рівна нулеві на межі області (див. умову (2), § 29 в [1]). За аналогом теореми Лебега і інтегровністю функції $h(x)$ за мірою $d\nu(x)$ маємо виконання умови (10).

ВИСНОВОК. Побудовано розв'язки (в слабкому сенсі) задачі Діріхле для стохастичних рівнянь Лапласа і Пуассона в одиничній кулі. В записах цих розв'язків використовується інтеграл Рімана від випадкової функції за дійсною мірою і інтеграл від дійсної функції за загальною стохастичною мірою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М., 1981. 2. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2 т. – М., 1983. – Т. 2. 3. Радченко В. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами // Укр. мат. журн. – 2008. – № 12. – С. 1675–1685. 4. Радченко В.Н. Интегралы по общим случайным мерам. – К., 1999. 5. Розовский Б.Л. Эволюционные стохастические системы. – М., 1983. 6. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах– М., 1974. 7. Шилов Г.Е. Математический анализ: Функции нескольких вещественных переменных: В 3 ч. – М., 1972. – Ч. 1-2. 8. Dalang R. Extending martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous SPDE's // Electron. J. Probab. – 1999. – Vol. 4, № 6. – P. 1–29. 9. Kim K. On stochastic partial differential equations with variable coefficients in C^1 domains // Stochastic processes and their applications. – 2004. – V. 112, № 2. – P. 261–283. 10. Radchenko V. Riemann integral of random function and parabolic equation with a general stochastic measure // Теор. ймовірн. та матем. статист. – 2012. – № 87. – С. 163–175. 11. Sanz-Sole M., Torrecilla I. A fractional Poisson equation: existence, regularity and approximations of the solution // Stochastics and Dynamics. – 2009. – Vol. 9, № 4. – P. 519–548. 12. Turpin P. Convexites dans les espaces vectoriels topologiques generaux // Diss. Math. – 1976. – V. 131. – 220 p. 13. Walsh J. An introduction to stochastic partial differential equations // Lect. Notes Math. – 1984. – V. 1180. – P. 236–434.

Надійшла до редколегії 25.02.13

Н. Стефанская, асп.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА В ШАРЕ

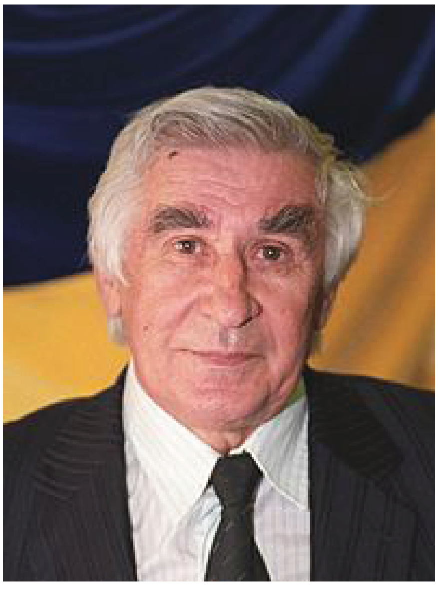
Введен несобственный интеграл Римана от неограниченной случайной функции. Решена задача Дирихле для стохастических уравнений Лапласа и Пуассона в шаре, управляемыми общими мерами. Получены решения этих уравнений.

N. Stefanska, PhD graduate

THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR LAPLACE AND POISSON STOCHASTIC EQUATIONS IN THE BALLS

The improper Riemann integral of unbounded random function is introduced. The Dirichlet problem for Laplace and Poisson stochastic equations in the balls, driven by general stochastic measure, is solved. Solutions of the considered equations are obtained.

ДО 75-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АНАТОЛІЯ МИХАЙЛОВИЧА САМОЙЛЕНКА



2 січня 2013 року виповнилось 75 років видатному українському математику, академіку Національної академії наук України Анатолію Михайловичу Самойленку.

Народився Анатолій Михайлович в селі Потіївка на Житомирщині. По закінченню середньої школи в місті Малин він вступає на геологічний факультет Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка. Невдовзі серйозне захоплення математикою вносить корективи в подальші життєві плани юнака: він приймає рішення продовжити навчання уже на механіко-математичному факультеті.

У 1960 році А.М. Самойленко з відзнакою закінчує університет і за запрошенням академіка Ю.О. Митропольського вступає до аспірантури Інституту математики АН УРСР. Вибір теми дисертації – "Застосування асимптотичних методів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з "нерегулярною" правою частиною" був повністю закономірний: саме в той час бурхливо розвивалась, набираючи світової популярності, Київська школа з нелінійної механіки, заснована академіками М.М. Криловим і М.М. Боголюбовим.

По закінченню аспірантури А.М. Самойленко протягом наступних 11 років працює в Інституті математики АН УРСР. Захистивши у 1968 році докторську дисертацію на тему: "Деякі питання теорії періодичних і квазіперіодичних систем", він стає самим молодим в Україні доктором наук.

У період з 1974 по 1987 рік А.М. Самойленко очолює кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка. З його приходом на кафедрі істотно активізується науково-дослідна робота, підготовка кандидатів і докторів наук, а організований ним семінар з диференціальних рівнянь стає відомим не лише в Україні, але й далеко за її межами. У 1978 році Анатолія Михайловича обирають членом-кореспондентом АН УРСР.

Невдовзі, після повернення у 1987 році до Інституту математики АН УРСР, А.М. Самойленко стає його директором і ось уже впродовж 25 років очолює цей провідний математичний центр України. За цей час Анатолій Михайлович зарекомендував себе не лише, як видатний вчений, але й вмілий організатор науки. За його ініціативи та при безпосередній участі в якості голови оргкомітету, було проведено велику кількість авторитетних міжнародних конференцій, серед яких – два Українських математичних конгреси (2001р., 2009р.), в кожному з яких взяли участь більш, ніж півтисячі математиків, як українських, так і закордонних. А.М. Самойленко є головним редактором