УДК 517.518.124

Я. Журба асп., О. Константінов, канд. фіз.-мат. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: jar86@mail.ru, konstant12@yahoo.com

ПОДВІЙНІ ОПЕРАТОРНІ ІНТЕГРАЛИ РІМАНА-СТІЛТЬЄСА

Встановлені нові достатні умови існування подвійних операторних інтегралів, що підсилюють і розвивають недавні результати С. Альбеверіо та О. Мотовілова.

ВСТУП. У статті досліджуються подвійні операторні інтеграли вигляду:

$$\Phi(T)=\iint\limits_{[a,b)\times[c,d)} F(x,y)dE_1(x)TdE_2(y)\,, \tag{1}$$

де E_1,E_2 – спектральні міри (розклади одиниці) в гільбертовому просторі H, $F(x,y)$ – операторнозначна функція зі значеннями в просторі $L(H)$. лінійних обмежених операторів в H, $T\in L(H)$. У випадку скалярної функції F теорія таких інтегралів побудована в серії робіт М. Ш. Бірмана та М. З. Соломяка [2–4, 9]. Ця теорія знайшла численні застосування в теорії збурень самоспряжених операторів (див., наприклад, [7, 8, 10]). Разом з тим інтеграли вигляду (1) для операторнозначних функцій F практично не досліджувалися. Лише нещодавно у статті С. Альбеверіо і О. Мотовілова [1] отримано деякі достатні умови існування таких інтегралів. Ми підсилюємо результати [1] і розширюємо клас функцій F. Більш того, у данній статті вивчаються властивості відображення (1), як трансформатора класу (S_p,S_q) (лінійного неперервного оператора $\Phi:S_p\to S_q$). Тут S_p – класи Неймана-Шетена компактних операторів. Зауважимо також, що звичайні операторні інтеграли Рімана-Стілтьєса вигляду.

$$\int\limits_a^b K(\lambda)dE_\lambda\,, \tag{2}$$

де $K:[a,b)\to L(H)$ – розглядалися ще в [2–5, 9].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ. Пояснимо означення інтегралу (1). Для розбиття $\Lambda=\Lambda_1\times\Lambda_2=\{x_k\}\times\{y_k\}$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b,\ \ c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d$ введемо інтегральну суму функції $F:[a,b)\times[c,d)\to L(H)$,

$$S(\Lambda)=S\left(F,\Lambda,E_1,E_2,T\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m F(\alpha_i,\beta_j)E_1([x_{i-1},x_i))TE_2([y_{j-1},y_j)),$$

де $\alpha_i\in[x_{i-1},x_i),\beta_j\in[y_{j-1},y_j),E_i([\alpha,\beta))=E_i(\beta)-E_i(\alpha)$.

Будемо казати, що подвійний операторний інтеграл (1) збігається за операторною нормою, якщо існує границя (за нормою $L(H)$) інтегральних сум: $\Phi=\lim\limits_{|\Lambda|\to 0}S(\Lambda)$, де $|\Lambda|$ – діаметр розбиття Λ.

Основним результатом статті є наступна теорема:

Теорема. Нехай E_1,E_2 – спектральні міри в H, $T\in L(H)$, $F:[a,b)\times[c,d)\to L(H)$. Припустимо, що функція F задовольняє умову Гьольдера з показником $\alpha>\frac{1}{2}$, тобто

$$\|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)\|\le C(|x_1-x_2|^\alpha+|y_1-y_2|^\alpha) \tag{3}$$

І існує таке число $C>0$, що

$$\|F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_2,y_2)\|\le C\,|x_1-x_2|\times|y_1-y_2|\,. \tag{4}$$

Тоді існують повторний та подвійний інтеграли Рімана – Стілтьєса (1). Ці інтеграли рівні між собою і функція $T\to\Phi(T)$ є трансформатором класу (S_p,S_p) для всіх $p\in[1,+\infty]$.

Зауваження 1. Теорема підсилює та узагальнює результати С. Альбеверіо і О. Мотовілова [1], які довели існування інтегралу (1) було доведено у випадку $\alpha=1$ в (3). Заважимо, що в [1] S_p – властивості таких трансформаторів не вивчалися. Для скалярних функцій F результат теореми встановлено в [2] (в скалярному випадку умова (4) не потрібна). Існування одновимірного інтеграла (2) також встановлено в [2] за умови гьольдеровості K з показником $\alpha>\frac{1}{2}$.

Зауваження 2. За допомогою теореми Наймарка (див., наприклад, [6]) про ділатацію результат теореми переноситься на узагальнені розклади одиниці (неортогональні операторні міри) E_1,E_2.

Доведення. Будемо використовувати абстрактні результати М. Ш. Бірмана та М. З. Соломяка про багатовимірні інтеграли Рімана – Стілтьєса від функцій зі значеннями в банаховому просторі [2, теорема 5]. Зокрема, для доведення існування подвійного інтегралу достатньо довести, що існує таке L>0 , що для довільного розбиття Λ та довільних інтегральних сум $S(\Lambda),S'(\Lambda)$, що відповідають цьому розбиттю, виконується нерівність

$$\|S(\Lambda)-S'(\Lambda)\|\le L\,|\Lambda|^{\alpha-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

і, крім того, для довільного розбиття $\Lambda=\Lambda_1\times\Lambda_2$ та його під розбиття $\Lambda'=\Lambda_1'\times\Lambda_2$ (або $\Lambda'=\Lambda_1\times\Lambda_2'$), де підрозбиття Λ_i' містить не більше однієї нової точки між двома точками розбиття Λ_i, існують інтегральні суми $S(\Lambda),S'(\Lambda')$ такі, що

$$\left\| S(\Lambda) - S'(\Lambda') \right\| \le L \left| \partial \right|^{\alpha - \frac{1}{2}}, \tag{6}$$

де $|\partial|$ – максимальна довжина інтервалу, що належить Λ'_i, але не належить Λ_i.

Доведемо (5). Нехай $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{ a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_m = b \} \times \{ c = \mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_n = d \}$, $(x_i, y_j), (x'_i, y'_j) \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i) \times [\mu_{j-1}, \mu_j)$.

Тоді маємо

$$S(\Lambda) - S'(\Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Big(\big(F(x_i, y_j) - F(x'_i, y'_j) \big) \big(E_1(\lambda_i) - E_1(\lambda_{i-1}) \big) T \left(E_2(\mu_j) - E_2(\mu_{j-1}) \right) \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \big(F(x_i, y_j) - F(x'_i, y_j) + F(x'_i, y_j) - F(x'_i, y'_j) \big) \big(E_1(\lambda_i) - E_1(\lambda_{i-1}) \big) T \left(E_2(\mu_j) - E_2(\mu_{j-1}) \right) = W_1 + W_2,$$

де

$$W_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \big(F(x_i, y_j) - F(x'_i, y_j) \big) \big(E_1(\lambda_i) - E_1(\lambda_{i-1}) \big) T \left(E_2(\mu_j) - E_2(\mu_{j-1}) \right),$$

$$W_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \big(F(x'_i, y_j) - F(x'_i, y'_j) \big) \big(E_1(\lambda_i) - E_1(\lambda_{i-1}) \big) T \left(E_2(\mu_j) - E_2(\mu_{j-1}) \right).$$

Позначимо $\overline{E}(\lambda, \mu) := E_1(\lambda) T E_2(\mu)$. Тоді можна записати $W_1 = R_1 + R_2 + R_3$, де

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} \big(F(x_i, y_1) - F(x'_i, y_1) \big) \big(\overline{E}(\lambda_i, \mu_0) - \overline{E}(\lambda_{i-1}, \mu_0) \big),$$

$$R_2 = \sum_{i=1}^{m} \big(F(x_i, y_n) - F(x'_i, y_n) \big) \big(\overline{E}(\lambda_i, \mu_n) - \overline{E}(\lambda_{i-1}, \mu_n) \big),$$

$$R_3 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} \big(F(x_i, y_j) - F(x'_i, y_{j+1}) - F(x_i, y_j) + F(x'_i, y_{j+1}) \big) \big(E_1(\lambda_i) - E_1(\lambda_{i-1}) \big) T \left(E_2(\mu_j) - E_2(\mu_{j-1}) \right)$$

З (3) випливає, що для всіх $v \in H$ маємо

$$\| R_1 v \| \le C \sum_{i=1}^{m} |x_i - x'_i|^{\alpha} \left\| \big(\overline{E}(\lambda_i, \mu_0) - \overline{E}(\lambda_{i-1}, \mu_0) \big) v \right\| \le$$

$$\le C \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - x'_i|^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{m} \big\langle (E_1(\lambda_i) - E_1(\lambda_{i-1})) T E_2(\mu_0) v, T E_2 v \big\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C \max_{j=1}^{m} |x_i - x'_i|^{\alpha - \frac{1}{2}} \sqrt{b - a} \left(\big\langle (E_1(b) - E_1(a)) T E_2(\mu_0) v, T E_2(\mu_0) v \big\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \le C_1 |\Lambda|^{\alpha - \frac{1}{2}} \| v \|$$

Отже, $\| R_1 \| \le C_1 |\Lambda|^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Аналогічно $\| R_2 \| \le C_2 |\Lambda|^{\alpha - \frac{1}{2}}$.

З (4) слідує, що для всіх $v \in H$ маємо

$$\| R_3 v \| \le C \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} |x_i - x'_i| \left(y_{j+1} - y_j \right) \left\| \big(\overline{E}(\lambda_i, \mu_j) - \overline{E}(\lambda_{i-1}, \mu_j) \big) v \right\| \le$$

$$\le C \sum_{j=1}^{n-1} \left(y_{j+1} - y_j \right) \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - x'_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{m} \big\langle (E_1(\lambda_i) - E_1(\lambda_{i-1})) T E_2(\mu_j) v, T E_2(\mu_j) v \big\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C \max_{j=1}^{m} |x_i - x'_i|^{\frac{1}{2}} \sqrt{b - a} \sum_{j=1}^{n-1} \left(y_{j+1} - y_j \right) \| T E_2(\mu_j) v \| \le C_3 |\Lambda|^{\frac{1}{2}} \| v \|$$

Тоді $\| R_3 \| \le C_3 |\Lambda|^{\frac{1}{2}} \le C'_3 |\Lambda|^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Отже $\| W_1 \| \le L_1 |\Lambda|^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Аналогічно $\| W_2 \| \le L_2 |\Lambda|^{\alpha - \frac{1}{2}}$.

Звідси легко випливає (5). Доведення (6) цілком аналогічне. Таким чином, ми довели, що подвійний інтеграл існує. Зауважимо, що існування повторного інтегралу (2) випливає з результатів [2]. Звідси випливає і те, що повторний інтеграл визначає трансформатор класу (S_p, S_p). Нескладно доводиться і рівність подвійного та повторного інтегралу.

Наведемо приклад, що показує істотність умови (4) (у випадку скалярної F ця умова не потрібна). Нехай $H = l_2$, $\{e^{\infty}_{n=1}{}^{n}_{i=1}{}^{n}_{j=1}\}$, $\{u^{\infty}_{n=1}\}$ – ортонормовані базиси H. Функція $F : [0,1)^2 \to L(l_2)$, визначена рівністю

$$F(\lambda, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n(\cdot, e_{nij}) \max \left\{ 0, \frac{1}{n} - \left| \frac{i-1}{n} - \lambda \right| \right\} \max \left\{ 0, \frac{1}{n} - \left| \frac{j-1}{n} - \mu \right| \right\},$$

$$E_1(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\cdot, e_{nij}) e_{nij} X_{\Delta} \left(\frac{i}{n} \right),$$

$$E_2(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\cdot, e_{nij}) e_{nij} X_{\Delta} \left(\frac{j}{n} \right)$$

Неважко показати, що виконується умова (3) з показником $\alpha = 1$ та послаблена умова (4):

$$\| F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_2, y_2) \| \le C |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}} \times |y_1 - y_2|^{\frac{1}{2}}.$$

Проте, легко показати, що інтеграл (1) з одиничним оператором T не існує. Отже, умова (4) теореми істотна.

ВИСНОВКИ. Отримано нові умови існування подвійних операторних інтегралів, що узагальнюють нещодавні результати С. Альбеверіо і О. Мотовілова. Вивчено також властивості таких інтегралів, як трансформаторів класу (S_p, S_p).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ. 1. Альбеверио С., Мотовилов А.К. Операторные интегралы Стилтьеса по спектральной мере и решения некоторых операторных уравнений // Труды Московського Математического Общества – 2011. – т. 72, №1, – С. 63–103. 2. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Двойные операторные интегралы Стильтьеса// Проблемы математической физики. – 1966. – № 1, – С 33–67. 3. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Двойные операторные интегралы Стильтьеса// Проблемы математической физики. – 1966. – № 2, – С. 26–60. 4. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Двойные операторные интегралы Стильтьеса// Проблемы математической физики. – 1966. – № 3, – С. 27–53. 5. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Интегрирование и дифференцирование эрмитовых операторов и приложение к теории возмущений. – Воронеж. Тр. семинара по функциональному анализу – 1956 – т. 1, – С. 81–105. 6. Маламуд М. М., Маламуд С. М., Спектральная теория операторных мер в гильбертовом пространстве, Алгебра и анализ. – 2003 – № 3. 7. Пеллер В. В., Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряжённых операторов // Функц. анал. и его прил., – 1985 – № 19, – С. 37–51. 8. Aleksandrov A.B., Peller V.V. Functions of perturbed unbounded self-adjoint operators. Operator Bernstein type inequalities // Indiana Univ. Math. J. – 2010. – Vol. 59, – P. 1451–1490. . 9. Birman M., Solomyak M. Double operator integrals in Hilbert space// Integral equ. oper. theory – 2003. – № 47. – C. 131–168. 10. Potapov D., Sukochev F. A. Lipschitz and commutator estimates in symmetric operator spaces//, Operator Theory 2008, – № 59:1, – С. 211–234.

Надійшла до редколегії 05.11.12

Я. Журба асп., А. Константинов канд. физ.-мат. наук, доц.

ДВОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА

Установлены новые достаточные условия существования двойных операторных интегралов, усиливающие и развивающие недавние результаты С.Альбеверио и А.Мотовилова

I. Zhurba, PhD graduate, O. Konstantinov, PhD

DOUBLE RIEMANN-STIELTJES OPERATOR INTEGRALS

In paper give new sufficient conditions on the existence of double operator integrals which strengthen and extend recent results of S. Albeverio and A. Motovilov.

УДК 517.518

О. Нестеренко, канд. фіз.-мат. наук,
А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: ChaikovskiyAV@ukr.net

НЕРІВНОСТІ ДЛЯ ДРУГИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ КРАТНИХ АРГУМЕНТІВ

У роботі отримано нові нерівності для других модулів неперервності кратних аргументів.

ВСТУП. Нехай $UC(\mathbb{R})$ – множина всіх рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ дійсних функцій. Визначимо для них другу скінченну різницю та другий (рівномірний) модуль неперервності:

$$\Delta_h^2(f,\ x) := f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),\ x\in\mathbb{R},\ h>0,\ f\in UC(\mathbb{R});$$

$$\omega_2(f,\ t) = \sup_{h\in(0,\ t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Delta_h^2(f,\ x)\right|,\ t>0,\ f\in UC(\mathbb{R}).$$

У монографії [2] проведено детальне вивчення рівномірних модулів неперервності різних порядків, зокрема, наведено нерівності для них. У цій же монографії можна знайти й бібліографічні посилання. У даній статті отримано нерівності для других модулів неперервності кратних аргументів, які, наскільки нам відомо, у літературі не зустрічались.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Щоб сформулювати основний результат нашої роботи, для елементів простору $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ і чисел $k\in\mathbb{Z}$ і $n\in\mathbb{N}$ введемо позначення

$$p(k,\ n) := (\ \ldots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n-1,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots),$$

де перший ненульовий елемент цієї послідовності стоїть на k-ому місці. Через $p(k,\ n)_i$ позначатимемо i-ту координату елемента $p(k,\ n)$, де $i\in\mathbb{Z}$.

Основним результатом даної роботи є така теорема.

Теорема. Якщо для деяких натуральних чисел m, n, n_1, $\ldots$, n_m та цілих чисел k, k_1, $\ldots$, k_m і s, s_1, $\ldots$, s_m виконується рівність $sp(k,\ n) = \sum_{i=0}^{m} s_i p(k_i,\ n_i)$, то справджується нерівність

$$|\,s\,|\ \omega_2(f,\ nt) \le \sum_{i=1}^{m}\left|\,s_i\right|\ \omega_2(f,\ n_i t),\ t>0,\ f\in UC(\mathbb{R}).$$

Доведення. Друга скінченна різниця допускає зображення (яке можна отримати, записавши формулу (1.31) з [1] при $m=2$ і звівши в ній подібні), а саме:

$$\Delta_{nh}^2(f,\ x) = f(x+2nh) - 2f(x+nh) + f(x) = \Delta_h^2(f,\ x) + 2\Delta_h^2(f,\ x+h) + \ldots + (n-1)\Delta_h^2(f,\ x+(n-2)h) +$$
$$+ n\Delta_h^2(f,\ x+(n-1)h) + (n-1)\Delta_h^2(f,\ x+nh) + \ldots + 2\Delta_h^2(f,\ x+(2n-3)h) + \Delta_h^2(f,\ x+(2n-2)h) =$$
$$= \sum_{j=0}^{2n-2} p(k,\ n)_{j+k}\,\Delta_h^2(f,\ jh) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(k,\ n)_{j+k}\,\Delta_h^2(f,\ x+jh),\ x\in\mathbb{R},\ h>0,\ k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\ f\in UC(\mathbb{R}). \quad (1)$$