**ВИСНОВКИ**. Отримано нові умови існування подвійних операторних інтегралів, що узагальнюють нещодавні результати С. Альбеверіо і О. Мотовілова. Вивчено також властивості таких інтегралів, як трансформаторів класу $(S_p, S_p)$.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.** 1. Альбеверио С., Мотовилов А.К. Операторные интегралы Стилтьеса по спектральной мере и решения некоторых операторных уравнений // Труды Московського Математического Общества – 2011. – т. 72, №1, – С. 63–103. 2. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Двойные операторные интегралы Стильтьеса// Проблемы математической физики. – 1966. – № 1, – С 33–67. 3. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Двойные операторные интегралы Стильтьеса// Проблемы математической физики. – 1966. – № 2, – С. 26–60. 4. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Двойные операторные интегралы Стильтьеса// Проблемы математической физики. – 1966. – № 3, – С. 27–53. 5. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Интегрирование и дифференцирование эрмитовых операторов и приложение к теории возмущений. – Воронеж. Тр. семинара по функциональному анализу – 1956 – т. 1, – С. 81–105. 6. Маламуд М. М., Маламуд С. М., Спектральная теория операторных мер в гильбертовом пространстве, Алгебра и анализ. – 2003 – № 3. 7. Пеллер В. В., Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряжённых операторов // Функц. анал. и его прил., – 1985 – № 19, – С. 37–51. 8. Aleksandrov A.B., Peller V.V. Functions of perturbed unbounded self-adjoint operators. Operator Bernstein type inequalities // Indiana Univ. Math. J. – 2010. – Vol. 59, – P. 1451–1490. . 9. Birman M., Solomyak M. Double operator integrals in Hilbert space// Integral equ. oper. theory – 2003. – № 47. – С. 131–168. 10. Potapov D., Sukochev F. A. Lipschitz and commutator estimates in symmetric operator spaces//, Operator Theory 2008, – № 59:1, – С. 211–234.

**Надійшла до редколегії 05.11.12**

**Я. Журба асп., А. Константинов канд. физ.-мат. наук, доц.**

## ДВОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА

***Установлены новые достаточные условия существования двойных операторных интегралов, усиливающие и развивающие недавние результаты С.Альбеверио и А.Мотовилова***

**I. Zhurba, PhD graduate, O. Konstantinov, PhD**

## DOUBLE RIEMANN-STIELTJES OPERATOR INTEGRALS

***In paper give new sufficient conditions on the existence of double operator integrals which strengthen and extend recent results of S. Albeverio and A. Motovilov.***

**УДК 517.518**

**О. Нестеренко, канд. фіз.-мат. наук,**
**А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук,**
**КНУ імені Тараса Шевченка, Київ**
*Email: ChaikovskiyAV@ukr.net*

# НЕРІВНОСТІ ДЛЯ ДРУГИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ КРАТНИХ АРГУМЕНТІВ

***У роботі отримано нові нерівності для других модулів неперервності кратних аргументів.***

**ВСТУП.** Нехай $UC(\mathbb{R})$ – множина всіх рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ дійсних функцій. Визначимо для них другу скінченну різницю та другий (рівномірний) модуль неперервності:

$$\Delta_h^2(f,\ x) := f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),\ x \in \mathbb{R},\ h > 0,\ f \in UC(\mathbb{R});$$

$$\omega_2(f,\ t) = \sup_{h \in (0,\ t]} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\Delta_h^2(f,\ x)\right|,\ t > 0,\ f \in UC(\mathbb{R}).$$

У монографії [2] проведено детальне вивчення рівномірних модулів неперервності різних порядків, зокрема, наведено нерівності для них. У цій же монографії можна знайти й бібліографічні посилання. У даній статті отримано нерівності для других модулів неперервності кратних аргументів, які, наскільки нам відомо, у літературі не зустрічались.

**ОСНОВНА ЧАСТИНА.** Щоб сформулювати основний результат нашої роботи, для елементів простору $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ і чисел $k \in \mathbb{Z}$ і $n \in \mathbb{N}$ введемо позначення

$$p(k,\ n) := (\ \ldots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n-1,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots),$$

де перший ненульовий елемент цієї послідовності стоїть на $k$-ому місці. Через $p(k,\ n)_i$ позначатимемо $i$-ту координату елемента $p(k,\ n)$, де $i \in \mathbb{Z}$.

Основним результатом даної роботи є така теорема.

**Теорема.** Якщо для деяких натуральних чисел $m$, $n$, $n_1, \ldots, n_m$ та цілих чисел $k$, $k_1, \ldots, k_m$ і $s$, $s_1, \ldots, s_m$ виконується рівність $sp(k,\ n) = \sum_{i=0}^{m} s_i p(k_i,\ n_i)$, то справджується нерівність

$$|s|\ \omega_2(f,\ nt) \le \sum_{i=1}^{m} |s_i|\ \omega_2(f,\ n_i t),\ t > 0,\ f \in UC(\mathbb{R}).$$

**Доведення.** Друга скінченна різниця допускає зображення (яке можна отримати, записавши формулу (1.31) з [1] при $m = 2$ і звівши в ній подібні), а саме:

$$\Delta_{nh}^2(f,\ x) = f(x+2nh) - 2f(x+nh) + f(x) = \Delta_h^2(f,\ x) + 2\Delta_h^2(f,\ x+h) + \ldots + (n-1)\Delta_h^2(f,\ x+(n-2)h) +$$
$$+ n\Delta_h^2(f,\ x+(n-1)h) + (n-1)\Delta_h^2(f,\ x+nh) + \ldots + 2\Delta_h^2(f,\ x+(2n-3)h) + \Delta_h^2(f,\ x+(2n-2)h) =$$
$$= \sum_{j=0}^{2n-2} p(k,\ n)_{j+k}\ \Delta_h^2(f,\ jh) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p(k,\ n)_{j+k}\ \Delta_h^2(f,\ x+jh),\ x \in \mathbb{R},\ h > 0,\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ f \in UC(\mathbb{R}). \quad (1)$$

Маємо такі рівності (пояснення див. нижче):

$$s\Delta_h^2(f,\ x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} s\,p(k,\ n)_{j+k}\,\Delta_h^2(f,\ x+jh) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{m} s_i\,p(k_i,\ n_i)_{j+k}\,\Delta_h^2(f,\ x+jh) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j_i\in\mathbb{Z}} p(k_i,\ n_i)_{j_i+k_i}\,\Delta_h^2\left(f,\ x+(k_i-k+j_i)h\right) = \sum_{i=1}^{m} s_i\Delta_{n_ih}^2\left(f, x+(k_i-k)h\right).$$

У першій та останній рівностях ми скористались формулою (1), у другій – рівністю з умови теореми, а в третій рівності ми змінили порядок підсумовування та у внутрішніх сумах зробили заміну індексу сумування: $j = k_i - k + j_i$, $1 \le i \le m$. Звідси

$$|s|\ \omega_2(f,\ nt) = |s| \sup_{h\in(0,\ t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Delta_{nh}^2(f,\ x)\right| \le \sum_{i=1}^{m}|s_i| \sup_{h\in(0,\ t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Delta_{n_ih}^2\left(f,\ x+(k_i-k)h\right)\right| \le \sum_{i=1}^{m}|s_i|\ \omega_2(f,\ n_it).$$

Теорему доведено.

**Наслідок 1.** Нехай $f \in UC(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Тоді $\omega_2(f,\ nt) \le n^2\omega_2(f,\ t)$.

**Зауваження.** Твердження наслідку 1 добре відоме. Для модуля неперервності функції на відрізку див., наприклад, [2, формула (2.24)].

**Доведення** випливає з теореми та рівності

$$p(1,\ n) = p(1,\ 1) + 2p(2,\ 1) + 3p(3,\ 1) + \ldots + (n-1)\,p(n-1,\ 1) + np(n,\ 1) +$$
$$+ (n-1)\,p(n+1,\ 1) + \ldots + 3p(2n-3,\ 1) + 2p(2n-2,\ 1) + p(2n-1,\ 1).$$

**Наслідок 2.** Нехай $f \in UC(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Тоді

$$\omega_2\left(f,\ (2n-1)t\right) \le 2\omega_2(f,\ nt) + 2\omega_2\left(f,\ (n-1)t\right) + \omega_2(f,\ t).$$

**Зауваження.** Твердження наслідку 2 є аналогом частинного випадку нерівності з наслідку 1 $\omega_2(f,\ 2nt) \le 4\omega_2(f,\ nt)$ на випадок, коли розглядається непарне кратне аргумента.

**Доведення** випливає з теореми та рівності

$$p(1,\ 2n-1) = p(1,\ n) + p(2n-1,\ n) + 2p(n+1,\ n-1) - p(2n-1,\ 1).$$

**Наслідок 3.** Нехай $f \in UC(\mathbb{R})$, $m,\ n \in \mathbb{N}$, $n > m$, $t > 0$. Тоді

$$2\omega_2(f,\ nt) \le \omega_2\left(f,\ (n+m)t\right) + \omega_2\left(f,\ (n-m)t\right) + 2\omega_2(f,\ mt).$$

**Доведення** випливає з теореми та рівності

$$p(1,\ n+m) + p(2m+1,\ n-m) = p(1,\ m) + 2p(m+1,\ n) + p(2n+1,\ m).$$

**Наслідок 4.** Нехай $f \in UC(\mathbb{R})$, $H_1,\ H_2 \in \mathbb{R}$, $H_1 > H_2 > 0$, $t > 0$. Тоді

$$2\omega_2(f,\ H_1) \le \omega_2(f,\ H_1+H_2) + \omega_2(f,\ H_1+H_2) + 2\omega_2(f,\ H_2).$$

**Доведення** випливає з наслідку 3, якщо спрямувати $t \to 0$, $n \to \infty$ і $m \to \infty$ так, щоб $nt \to H_1$, $mt \to H_2$, і врахувати неперервність функції $\omega_2$ (див. [2, лема 2.2]).

**Зауваження.** Нерівність з наслідку 4 встановлена С.В. Конягіним [1, теорема 1].

**Приклад.** З теореми випливає, що для функції $f \in UC(\mathbb{R})$ і числа $t > 0$ справджуються наступні нерівності:

1) $\omega_2(f,\ 7t) \le 2\omega_2(f,\ 4t) + \omega_2(f,\ 3t) + 2\omega_2(f,\ 2t)$, бо $p(1,\ 7) = p(1,\ 4) + p(7,\ 4) + p(5,\ 3) + p(5,\ 2) + p(7,\ 2)$;

2) $\omega_2(f,\ 7t) \le 2\omega_2(f,\ 4t) + 2\omega_2(f,\ 3t) + \omega_2(f,\ t)$ за наслідком 2;

3) $\omega_2(f,\ 7t) \le 5\omega_2(f,\ 3t) + 4\omega_2(f,\ t)$, бо

$p(1,\ 7) = p(1,\ 3) + p(4,\ 3) + p(5,\ 3) + p(6,\ 3) + p(9,\ 3) + p(4,\ 1) + p(5,\ 1) + p(9,\ 1) + p(10,\ 1)$;

4) $\omega_2(f,\ 7t) \le 4\omega_2(f,\ 3t) + 3\omega_2(f,\ 2t) + \omega_2(f,\ t)$, бо

$p(1,\ 7) = p(1,\ 3) + p(4,\ 3) + p(6,\ 3) + p(9,\ 3) + p(4,\ 2) + p(6,\ 2) + p(8,\ 2) + p(7,\ 1)$;

5) $\omega_2(f,\ 7t) \le 2\omega_2(f,\ 5t) + 3\omega_2(f,\ t)$, бо $p(1,\ 7) = p(1,\ 5) + p(5,\ 5) + p(7,\ 1) - p(5,\ 1) - p(9,\ 1)$;

6) $\omega_2(f,\ 7t) \le \omega_2(f,\ 5t) + \omega_2(f,\ 4t) + 2\omega_2(f,\ 2t)$, бо

$2p(1,\ 7) = p(1,\ 5) + p(1,\ 4) + p(5,\ 5) + p(7,\ 4) + p(5,\ 2) + 2p(6,\ 2) + p(7,\ 2)$;

7) $\omega_2(f,\ 7t) \le \omega_2(f,\ 5t) + 2\omega_2(f,\ 3t) + \omega_2(f,\ 2t) + 2\omega_2(f,\ t)$, бо

$p(1,\ 7) = p(1,\ 5) + p(6,\ 3) + p(9,\ 3) + p(6,\ 2) + p(9,\ 1) + p(10,\ 1)$.

**ВИСНОВКИ.** Запропоновано досить загальну схему отримання нерівностей для других модулів неперервності кратних аргументів. Як наслідки основного результату одержано як відомі, так і нові нерівності для других модулів неперервності.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Конягин С. В. О вторых модулях непрерывности // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – С. 1–3. 2. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – К.: Наукова думка, 1992. – 224 с.

Надійшла до редколегії 23.10.12

А. Нестеренко, канд. физ.-мат. наук, А. Чайковский, канд. физ.-мат. наук

**НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВТОРАХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ КРАТНИХ АРГУМЕНТОВ**

*В работе получены новые неравенства для вторых модулей непрерывности кратных аргументов*

O. Nesterenko, PhD, A. Chaikovskiy, PhD

**INEQUALITIES FOR SECOND MODULUS OF CONTINUITY IN THE CASE OF MULTIPLE ARGUMENTS**

*New inequalities for second modulus of continuity in the case of multiple arguments are obtained.*

УДК 513.88: 517.98

**С. Тищенко, канд. фіз.-мат. наук, К. Денісова, студ.**
**КНУ імені Тараса Шевченка, Київ**
*Email: tish_serg56@mail.ru, Ket31@bigmir.net*

# АНАЛІТИЧНІ ТА ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ АЛГЕБРИ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ВІД ДВОХ ЕРМІТОВИХ ТВІРНИХ

***Побудовано топологічну ядерну *- алгебру степеневих рядів від двох ермітових твірних. Досліджено топологічні й аналітичні властивості елементів алгебри. Для вибраних вагових послідовностей описано область збіжності та (для комутуючих змінних) множина лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів. У випадку антикомутуючих твірних алгебра реалізується як алгебра звичайних подвійних степеневих рядів від двох дійсних комутуючих змінних, наводиться її матрична реалізація та описується центр.***

**ВСТУП**. На основі формальних степеневих рядів можна розвинути найбільш загальну форму операторного числення. Так, кожне співвідношення, яке має місце для формальних степеневих рядів, можна перенести на степеневі ряди у довільній асоціативній алгебрі, які збігаються у тому чи іншому сенсі. В якості асоціативної алгебри можна вибрати, наприклад, алгебру лінійних обмежених операторів у гільбертовому просторі.

Робота є розширеним і доповненим варіантом статті [2], в якій побудована топологічна *- алгебра степеневих рядів від антикомутуючих ермітових твірних, вивчені аналітичні властивості її елементів, а також наведений опис її центру, та статті [3], про зображення деякої топологічної *-алгебри, породженої двома комутуючими ермітовими твірними.

У роботі розглядаються окремо випадки комутуючих та антикомутуючих ермітових твірних. У випадку комутуючих змінних для вибраних вагових послідовностей описані область збіжності та множина лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів. Також у роботі наводиться функціональна реалізація алгебри рядів від двох антикомутуючих ермітових твірних у вигляді матрично-значних функцій, елементами яких є звичайні подвійні степеневі ряди від двох дійсних комутуючих змінних із певними граничними умовами.

**Основні означення та поняття.**

**Означення 1.** *- алгебра $A$ називається топологічною *- алгеброю, якщо $A$ є топологічним лінійним простором і відображення $A \ni f \mapsto f^* \in A$ (інволюція) неперервне, а відображення $A \times A \ni (f,g) \mapsto f \cdot g \in A$ (множення) є неперервним відносно кожного із співмножників при фіксованому другому (роздільно неперервне).

**Означення 2**. Нехай $(H_\tau)_{\tau \in T}$ ($T$ – довільна множина індексів) – сім'я комплексних гільбертових просторів із скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_\tau := (\cdot,\cdot)_{H_\tau}$ та нормами $\|\cdot\|_\tau := \|\cdot\|_{H_\tau}$. Топологічний простір $A = prlim_{\tau \in T} H_\tau$ називається ядерним, якщо для кожного $\tau \in T$ знайдеться таке $\tau' \in T$, що оператор вкладення $H_{\tau'} \to H_\tau$ є оператором Гільберта - Шмідта.

**Означення 3.** Топологічний ядерний простір $A$ називається ядерною алгеброю, якщо $A$ є асоціативною алгеброю над полем $C$ та операція множення $A \times A \ni (f,g) \mapsto f \cdot g \in A$ є роздільно неперервною в топології проективної границі.

**Означення 4.** Ядерною *- алгеброю будемо називати ядерну алгебру з інволюцією *, яка задовольняє умову $\|f^*\|_\tau = \|f\|_\tau$ для всіх $f \in A,\ \tau \in T$.

**Означення 5.** Елемент $f$ топологічної алгебри $A$ називається цілим, якщо для довільного $\lambda > 0$ множина $\left\{ \frac{1}{n!}(\lambda f)^n \in A,\ n = 1,2,\ldots \right\}$ є обмеженою в $A$.

**Означення 6.** Топологічна алгебра, в якій кожен елемент є цілим, називається топологічною цілою алгеброю.

**Означення 7.** Множина $A_S$ всіх елементів топологічної алгебри $A$, які комутують з усіма елементами деякої підмножини $S \subset A$, називається комутантом множини $S$ і позначається $A'$. Як відомо, комутант є підалгеброю алгебри $A$.

**Означення 8.** Центром $Z$ алгебри $A$ називається множина $Z = A \cap A'$.

**Означення 9.** Нехай $\Phi$ – комплексний лінійний простір, в якому задано зліченну систему скалярних добутків $(\varphi,\psi)_n$. Припустимо, що норми $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi,\varphi)_n}$, які відповідають цим скалярним добуткам, узгоджені між собою. Позначимо через $H_n$ – поповнення $\Phi$ по відповідній нормі. Якщо простір $\bigcap_n H_n$ є повним і при цьому має місце рівність $\bigcap_n H_n = \Phi$, то простір $\Phi$ називається зліченно-гільбертовим простором.

Об'єкт дослідження – топологічна *- алгебра степеневих рядів. Формальним степеневим рядом $a(u,v)$ від твірних $u$ та $v$ ("незалежних змінних") називається вираз вигляду [1] $a(u,v) = \sum_{n \in I} a_n u^{n_1} v^{n_2}$, де сумування