А. Нестеренко, канд. физ.-мат. наук, А. Чайковский, канд. физ.-мат. наук

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВТОРАХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ КРАТНИХ АРГУМЕНТОВ

В работе получены новые неравенства для вторых модулей непрерывности кратных аргументов

O. Nesterenko, PhD, A. Chaikovskiy, PhD

INEQUALITIES FOR SECOND MODULUS OF CONTINUITY IN THE CASE OF MULTIPLE ARGUMENTS

New inequalities for second modulus of continuity in the case of multiple arguments are obtained.

УДК 513.88: 517.98

С. Тищенко, канд. фіз.-мат. наук, К. Денісова, студ.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: tish_serg56@mail.ru, Ket31@bigmir.net

АНАЛІТИЧНІ ТА ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ АЛГЕБРИ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ВІД ДВОХ ЕРМІТОВИХ ТВІРНИХ

Побудовано топологічну ядерну *- алгебру степеневих рядів від двох ермітових твірних. Досліджено топологічні й аналітичні властивості елементів алгебри. Для вибраних вагових послідовностей описано область збіжності та (для комутуючих змінних) множина лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів. У випадку антикомутуючих твірних алгебра реалізується як алгебра звичайних подвійних степеневих рядів від двох дійсних комутуючих змінних, наводиться її матрична реалізація та описується центр.

ВСТУП. На основі формальних степеневих рядів можна розвинути найбільш загальну форму операторного числення. Так, кожне співвідношення, яке має місце для формальних степеневих рядів, можна перенести на степеневі ряди у довільній асоціативній алгебрі, які збігаються у тому чи іншому сенсі. В якості асоціативної алгебри можна вибрати, наприклад, алгебру лінійних обмежених операторів у гільбертовому просторі.

Робота є розширеним і доповненим варіантом статті [2], в якій побудована топологічна *- алгебра степеневих рядів від антикомутуючих ермітових твірних, вивчені аналітичні властивості її елементів, а також наведений опис її центру, та статті [3], про зображення деякої топологічної *-алгебри, породженої двома комутуючими ермітовими твірними.

У роботі розглядаються окремо випадки комутуючих та антикомутуючих ермітових твірних. У випадку комутуючих змінних для вибраних вагових послідовностей описані область збіжності та множина лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів. Також у роботі наводиться функціональна реалізація алгебри рядів від двох антикомутуючих ермітових твірних у вигляді матрично-значних функцій, елементами яких є звичайні подвійні степеневі ряди від двох дійсних комутуючих змінних із певними граничними умовами.

Основні означення та поняття.

Означення 1. *- алгебра A називається топологічною *- алгеброю, якщо A є топологічним лінійним простором і відображення $A \ni f \mapsto f^* \in A$ (інволюція) неперервне, а відображення $A \times A \ni (f,g) \mapsto f \cdot g \in A$ (множення) є неперервним відносно кожного із співмножників при фіксованому другому (роздільно неперервне).

Означення 2. Нехай $(H_\tau)_{\tau\in T}$ (T – довільна множина індексів) – сім'я комплексних гільбертових просторів із скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_\tau := (\cdot,\cdot)_{H_\tau}$ та нормами $\|\cdot\|_\tau := \|\cdot\|_{H_\tau}$. Топологічний простір $A = prlim_{\tau\in T} H_\tau$ називається ядерним, якщо для кожного $\tau \in T$ знайдеться таке $\tau' \in T$, що оператор вкладення $H_{\tau'} \to H_\tau$ є оператором Гільберта - Шмідта.

Означення 3. Топологічний ядерний простір A називається ядерною алгеброю, якщо A є асоціативною алгеброю над полем C та операція множення $A \times A \ni (f,g) \mapsto f \cdot g \in A$ є роздільно неперервною в топології проективної границі.

Означення 4. Ядерною *- алгеброю будемо називати ядерну алгебру з інволюцією *, яка задовольняє умову $\|f^*\|_\tau = \|f\|_\tau$ для всіх $f \in A,\ \tau \in T$.

Означення 5. Елемент f топологічної алгебри A називається цілим, якщо для довільного $\lambda > 0$ множина $\left\{\frac{1}{n!}(\lambda f)^n \in A,\ n = 1,2,\ldots\right\}$ є обмеженою в A.

Означення 6. Топологічна алгебра, в якій кожен елемент є цілим, називається топологічною цілою алгеброю.

Означення 7. Множина A_S всіх елементів топологічної алгебри A, які комутують з усіма елементами деякої підмножини $S \subset A$, називається комутантом множини S і позначається A'. Як відомо, комутант є підалгеброю алгебри A.

Означення 8. Центром Z алгебри A називається множина $Z = A \cap A'$.

Означення 9. Нехай Φ – комплексний лінійний простір, в якому задано зліченну систему скалярних добутків $(\varphi,\psi)_n$. Припустимо, що норми $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi,\varphi)_n}$, які відповідають цим скалярним добуткам, узгоджені між собою. Позначимо через H_n – поповнення Φ по відповідній нормі. Якщо простір $\bigcap_n H_n$ є повним і при цьому має місце рівність $\bigcap_n H_n = \Phi$, то простір Φ називається злічено-гільбертовим простором.

Об'єкт дослідження – топологічна *- алгебра степеневих рядів. Формальним степеневим рядом $a(u,v)$ від твірних u та v ("незалежних змінних") називається вираз вигляду [1] $a(u,v) = \sum_{n\in I} a_n u^{n_1} v^{n_2}$, де сумування розповсюджується на множину мультиіндексів $I \ni n=(n_1,n_2)$ з невід'ємними цілими компонентами n_1 та n_2, $a_n \in C$ – комплексні коефіцієнти. Приймемо також позначення $|n|=n_1+n_2$. Для рядів $a=a(u,v)=\sum_{n\in I} a_n u^{n_1}v^{n_2}$, $b=b(u,v)=\sum_{n\in I} b_n u^{n_1}v^{n_2}$ природно визначаються операції додавання та множення на скаляр (покоефіцієнтно): $a+b=\sum_{n\in I}(a_n+b_n)u^{n_1}v^{n_2}$, $\alpha\cdot a=\sum_{n\in I}(\alpha a_n)u^{n_1}v^{n_2}$ $(\forall a,b;\ \alpha\in\mathbb{C}^1)$. Добуток двох степеневих рядів визначимо за формулою $c=a\cdot b=\sum_{n\in I} c_n u^{n_1}v^{n_2}$, коефіцієнти c_n якого записуються у вигляді згортки відповідних коефіцієнтів рядів a та b: $c_n=\sum_{k,n-k\in I} s(n-k,k)\,a_{n-k}b_k=\sum_{k,n-k\in I} s(k,n-k)\,a_k b_{n-k}$. Вигляд функції $s(p,q)\,(p=(p_1,p_2)\in I, q=(q_1,q_2)\in I)$ залежить від формули комутації твірних, тобто якщо $uv=vu$, то $s(p,q)=1\ \forall p,\ q\in I$; якщо $uv=-vu$, то $s(p,q)=(-1)^{p_2q_1}\ \ \forall p,q\in I$.

Таким чином, на множині степеневих рядів визначено структуру лінійного простору над C, а також операцію множення, які у сукупності задовольняють всім аксіомам асоціативної алгебри. Інволюцію * в алгебрі визначимо формулою: $(a(u,v))^*=\left(\sum_{n\in I} a_n u^{n_1}v^{n_2}\right)^*=\sum_{n\in I} t(n)\overline{a_n}u^{n_1}v^{n_2}$. Вигляд функції $t(p)\,(p=(p_1,p_2)\in I)$ також залежить від формули комутації твірних: якщо $uv=vu$, то $t(p)=1\ \forall p\in I$; якщо $uv=-vu$, то $t(p)=(-1)^{p_1p_2}\ \ \forall p\in I$.

Наділимо множину всіх формальних степеневих рядів топологічною структурою. Для цього при кожному натуральному $\tau\in N$ визначимо гільбертів простір H_τ рядів $a=a(u,v)=\sum_{n\in I} a_n u^{n_1}v^{n_2}$, $b=b(u,v)=\sum_{n\in I} b_n u^{n_1}v^{n_2}$:

$$H_\tau=\left\{a(u,v)=\sum_{n\in I} a_n u^{n_1}v^{n_2},\ b(u,v)=\sum_{n\in I} b_n u^{n_1}v^{n_2}:\ (a,b)_\tau=\sum_{n\in I} a_n\overline{b_n}m_n(\tau),\ \|a\|_\tau^2=(a,a)_\tau=\sum_{n\in I}|a_n|^2 m_n(\tau)<\infty\right\},$$

де $\{m_n(\tau)\}_{n\in I}$ – деяка вагова послідовність. Наявність топологічної структури дозволяє не використовувати слово "формальний" і писати коротко "степеневий ряд". Розглянемо локально-опуклий топологічний простір $U=prlim_{\tau=1,2,\ldots}H_\tau$, який як множина співпадає з перетином $\bigcap_{\tau\in N} H_\tau$ зліченного числа гільбертових просторів H_τ (є зліченно-гільбертовим простором). Базис околів нуля в U утворюють множини $W(0;\ \tau,\ \delta)=\{a\in U:\ \|a\|_\tau<\delta\}$ при довільних $\tau\in N$ та $\delta>0$. Простір U буде ядерним локально-опуклим топологічним простором. Накладемо на множину всіх вагових послідовностей $\{m_n(\tau)\}_{n\in I}$ наступні дві умови: 1) $\forall\tau\in N,\ \exists\tau_1\in N$ таке, що $\sum_{n\in I}\dfrac{m_n(\tau)}{m_n(\tau_1)}<\infty$; 2) $m_{n+l}(\tau)\le c(\tau)m_n(\tau)m_l(\tau)$ $(n=(n_1,n_2),\ l=(l_1,l_2)\in I; \tau=1,2\ldots;$ $c(\tau)=const)$. Наприклад, легко перевірити, що обидві умови 1) та 2) виконуються для двох вагових послідовностей наступного вигляду: $m_n(\tau)=(1+|n|^2)^\tau$ та $m_n(\tau)=\tau^{|n|}$.

Покажемо, що $U=prlim_{\tau=1,2,\ldots}H_\tau$ є топологічною *- алгеброю, тобто множення (згортка) $a{\cdot}b$ та інволюція * є неперервними операціями в U. Дійсно, для $\tau_0=\tau_1$, що задовольняє умову 1), маємо згідно нерівності Коші–Шварца:

$$\|a\cdot b\|_\tau^2=\sum_{n\in I}\left|(a\cdot b)_n\right|^2 m_n(\tau)=\sum_{n\in I}\left|\sum_{k+m=n} s(m,k)\,a_m b_k\right|^2 m_n(\tau)=\sum_{n\in I}\left|\sum_{k+m=n} s(m,k)\,a_m m_k^{-1/2}(\tau_0)\,b_k m_k^{1/2}(\tau_0)\right|^2 m_n(\tau_0)\le$$

$$\le\sum_{n\in I}\left(\sum_{k+m=n}|a_m|^2 m_k(\tau_0)\right)\left(\sum_{k\in I}|b_k|^2 m_k(\tau_0)\right)m_n(\tau)\le$$

$$\|b\|_{\tau_0}^2\sum_{n\in I}\sum_{k,n-k\in I}|a_{n-k}|^2 m_k^{-1}(\tau_0)\,m_n(\tau)=\|b\|_{\tau_0}^2\sum_{k\in I} m_k^{-1}(\tau_0)\left(\sum_{n\in I}|a_n|^2 m_{n+k}(\tau)\right)\le$$

$$\le c(\tau)\|b\|_{\tau_0}^2\left(\sum_{k\in I}\frac{m_k(\tau)}{m_k(\tau_0)}\right)\sum_{n\in I}|a_n|^2 m_n(\tau)=c(\tau)\|a\|_\tau^2\cdot\|b\|_{\tau_0}^2\cdot\left(\sum_{k\in I}\frac{m_k(\tau)}{m_k(\tau_0)}\right)=c_1(\tau,\tau_0)\|a\|_\tau^2\cdot\|b\|_{\tau_0}^2,$$

де позначено $c_1(\tau,\tau_0)=c(\tau)\sum_{k\in I}\dfrac{m_k(\tau)}{m_k(\tau_0)}$ і $c_1<\infty$ згідно умови 1). Остаточно маємо: $\|a\cdot b\|_\tau^2\le c_1(\tau,\tau_0)\|a\|_\tau^2\|b\|_{\tau_0}^2$. Ця нерівність означає, що операція множення в U є сумісно неперервною. Повторно застосовуючи останню нерівність для довільних $a\in U,\ b=a$, одержимо $\|a^m\|_\tau^2=\|a\cdot a^{m-1}\|_\tau^2\le\left(c_1(\tau,\tau_0)\|a\|_{\tau_0}^2\right)^{m-1}\|a\|_\tau^2$. Отже

$$0\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m!}\|a^m\|_\tau^2\le\|a\|_\tau^2\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m!}\left(c_1(\tau,\tau_0)\|a\|_{\tau_0}^2\right)^{m-1}=0.$$

Це означає, що довільний елемент a алгебри $U=prlim_{\tau\in N}H_\tau$ є цілим. Оскільки

$$\|a^*\|_\tau^2=\sum_{n\in I}\left|t(n)\overline{a_n}\right|^2 m_n(\tau)=\sum_{n\in I}|a_n|^2 m_n(\tau)=\|a\|_\tau^2,$$

то інволюція є унітарним оператором в кожному просторі H_τ, а отже є неперервним оператором в алгебрі U.

Сумуючи доведене вище, одержимо, що алгебра U степеневих рядів від двох ермітових твірних є ядерною топологічною *- алгеброю, кожен елемент якої є цілим. Зауважимо також, що як лінійний простір *- алгебра U ізоморфна *- алгебрі подвійних степеневих рядів від двох дійсних комутуючих змінних [4, с.346] із звичайними лінійними операціями, але з інволюцією * й некомутативним множенням, що визначаються формулами вище. Враховуючи цей ізоморфізм, збіжність формального степеневого ряду від антикомутуючих твірних (u,v) далі будемо розуміти як збіжність відповідного подвійного степеневого ряду від дійсних комутуючих змінних (x,y) після заміни $u \to x$, $v \to y$.

Випадок комутуючих змінних. Розглянемо топологічну *- алгебру U , елементами якої є степеневі ряди від двох звичайних комутуючих ермітових змінних $u = x$ та $v = y$ $(x \cdot y = y \cdot x,\ x^* = x,\ y^* = y)$ із заданою умовою спадання їх коефіцієнтів. Легко побачити, що в силу комутації змінних x та y, довільні два ряди $a(x,y) = \sum_{n\in I} a_n x^{n_1} y^{n_2}$ та $b(x,y) = \sum_{n\in I} b_n x^{n_1} y^{n_2}$ також комутують між собою: $a(x,y)\cdot b(x,y) = b(x,y)\cdot a(x,y)$. Це означає, що наша алгебра є комутативною асоціативною *- алгеброю.

Опис множини лінійних неперервних мультиплікативних симетричних функціоналів. Розглянемо випадок вагової послідовності $m_n(\tau) = (1+|n|^2)^\tau$. Оскільки алгебра U як лінійний топологічний простір є перетином зліченої кількості гільбертових просторів H_τ , тобто $U = \bigcap_{\tau=1,2,\ldots} H_\tau$, то згідно загальної теорії для таких просторів, спряжений до U простір U' лінійних неперервних функціоналів є об'єднанням зліченної кількості гільбертових просторів $H_{-\tau}$, тобто $U' = \bigcup_{\tau=0,1,\ldots} H_{-\tau}$ з топологією індуктивної границі. Нехай $l(\cdot) \in U'$ і додатково $l(\cdot)$ є симетричним мультиплікативним функціоналом. Запишемо умови, яким повинен задовольняти функціонал $l(\cdot)$ для довільних $a = a(x,y),\ b = b(x,y)$ із U та довільних $\alpha,\beta \in \mathbb{C}^1$:

1) лінійність: $l(\alpha a + \beta b) = \alpha l(a) + \beta l(b)$;

2) неперервність (обмеженість): $|l(a)| \le c_l \|a\|_\tau$,(c_l =const, τ – фіксоване натуральне);

3) симетричність - $l(a^*) = \overline{l(a)}$;

4) мультиплікативність: $l(a\cdot b) = l(a)l(b)$.

Нехай $a(x,y) = \sum_{n\in I} a_n x^{n_1} y^{n_2} \in U$. Тоді при кожному $\tau = 1,2,\ldots$ маємо $\sum_{n\in I} |a_n|^2 (1+|n|^2)^\tau = \|a\|_\tau^2 < \infty$. Використовуючи умови 1), 2) та 4) на функціонал $l(\cdot)$, одержуємо:

$$l\left(a\left(x,y\right)\right) = l\left(\sum_{n\in I} a_n x^{n_1} y^{n_2}\right) = \sum_{n\in I} a_n l\left(x^{n_1} y^{n_2}\right) = \sum_{n\in I} a_n l(x^{n_1}) l(y^{n_2}) = \sum_{n\in I} a_n \left[l(x)\right]^{n_1}\left[l(y)\right]^{n_2}.$$

Введемо скорочені позначення: $l(x) = l_1,\ l(y) = l_2$. Тоді $l(a) = l\left(a\left(x.y\right)\right) = \sum_{n\in I} a_n l_1^{n_1} l_2^{n_2}$. Для довільного фіксованого $\tau = 1,2,\ldots$, використовуючи обмеженість функціоналу $l(\cdot)$ та нерівність Коші-Шварца, знаходимо:

$$\left| l(a)\right|^2 = \left|\sum_{n\in I} a_n l_1^{n_1} l_2^{n_2}\right|^2 = \left|\sum_{n\in I}\left(a_n\left(1+|n|^2\right)^{\tau/2}\right)\left(l_1^{n_1} l_2^{n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau/2}\right)\right|^2 \le \sum_{n\in I} |a_n|^2 \left(1+|n|^2\right)^\tau \sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau} =$$

$$= \left(\sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau}\right)\left\| a\left(x,y\right)\right\|_\tau^2 = \left(\sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau}\right)\left\| a\left(x,y\right)\right\|_\tau^2 = C_l^2 \| a \|_\tau^2,$$

де позначено $C_l^2 = \sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau}$. Із одержаної оцінки $\| l(a)\| \le C_l \| a\|_\tau$ випливає, що необхідною і достатньою умовою обмеженості функціонала $l(\cdot)$ є умова $C_l < \infty$ для довільного фіксованого $\tau = 1,2,\ldots$. Фактично задача зводиться до того, щоб вказати ті значення l_1 та l_2 , для яких подвійний ряд, що визначає C_l , збігається. Розглянемо спочатку елементи вигляду $a^{(k)} = \sum \delta_n^{(k)} x^{n_1} y^{n_2}$, де $k \in I$ $(k \ne 0)$ – довільний фіксований мультиіндекс, причому $\delta_n^{(k)} = 0$, якщо $n \ne k$ і $\delta_k^{(k)} = 1$, якщо $n = k$. Так як $l(\cdot)$ – симетричний функціонал, то для довільного $n \in I$ маємо: $l(a^{(n)}) = l\left(x^{n_1} y^{n_2}\right) = l_1^{n_1} l_2^{n_2} = l\left(\left(a^{(n)}\right)^*\right) = l\left(x^{n_1} y^{n_2}\right) = \overline{l_1^{n_1} l_2^{n_2}}$, тобто $l_1^{n_1} l_2^{n_2}$, а отже l_1 та l_2 є дійсними. Далі розглянемо можливі випадки для l_1 та l_2 :

Нехай одночасно $|l_1| = 1,\ |l_2| > 1$ або $|l_1| > 1,\ |l_2| = 1$. Розглянемо випадок $|l_1| = 1,\ |l_2| > 1$, тоді $\sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau} =$

$$= \sum_{n\in I} l_2^{2n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau} = \sum_{n\in I}\frac{\left(l_2^2\right)^{n_2}}{\left(1+\left(n_1+n_2\right)^2\right)^\tau}$$

. Оскільки чисельник дробу зростає як показникова функція з основою $l_2^2 > 1$, а знаменник – як степенева, то ряди в обох випадках

1) розбігаються;

2) $|l_1| = |l_2| = 1$, $\sum_{n\in I}\left(l_1^2\right)^{n_1}\left(l_2^2\right)^{n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau} = \sum_{n\in I}\dfrac{1}{\left(1+\left(n_1+n_2\right)^2\right)^\tau}$. Цей ряд, очевидно, збігається;

3) $|l_1| > 1, |l_2| > 1$ ряд розбігається (див. випадок 1));

4) $|l_1| < 1,\ |l_2| < 1$ ряд збігається, так як в чисельнику дробу $\sum_{n\in I}\dfrac{l_1^{2n_1} l_2^{2n_2}}{\left(1+\left(n_1+n_2\right)^2\right)^\tau}$ члени спадають як показникові функції з основами $|l_1^2| < 1, |l_2^2| < 1$;

5) $|l_1|<1, |l_2|>1$ або $|l_1|>1, |l_2|<1$. Нехай $|l_1|<1$, $|l_2|>1$, Тоді $\sum_{n\in I}\left(l_1^2\right)^{n_1}\left(l_2^2\right)^{n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau}=\sum_{(n_1=0)n_2=0,1,\ldots}\frac{\left(l_2^2\right)^{n_2}}{\left(1+n_2^2\right)^{\tau}}+\ldots=+\infty.$

Очевидно, що ряд розбігається.

Отже, ми довели, що множину M лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів згідно формули $l(a)=\sum_{n\in I}a_n l_1^{n_1}l_2^{n_2}$ можна ототожнити з множиною L на площині R^2: $L=\left\{l=(l_1,l_2)\in R^2 \,\middle|\, |l_1|\le 1, |l_2|\le 1\right\}$.

Опис області збіжності. Знайдемо область збіжності степеневого ряду $a(x,y)=\sum_{n\in I}a_n x^{n_1}y^{n_2}$ з умовою спадання коефіцієнтів $\sum_{n\in I}|a_n|^2\tau^{|n|}<\infty$. Для цього зафіксуємо довільну точку $(x_0,y_0)\in R^2$. Маємо оцінку:

$$\left|\sum_{n\in I}a_n x_0^{n_1}y_0^{n_2}\right|^2=\left|\sum_{n\in I}(a_n\tau^{\frac{|n|}{2}})\left(\frac{x_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{n_1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{n_2}\right|^2\le\sum_{n\in I}(|a_n|^2\tau^{|n|})\sum_{n\in I}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{2n_1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{2n_2}.$$

Для довільної точки $(x_0,y_0)\in R^2$ вибираємо таке τ, що одночасно $\frac{|x_0|}{\sqrt{\tau}}\le q_1<1$, $\frac{|y_0|}{\sqrt{\tau}}\le q_2<1$. Враховуючи, що

$$\sum_{n\in I}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{2n_1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{2n_2}=\sum_{n_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_0^2}{\tau}\right)^{n_1}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left(\frac{y_0^2}{\tau}\right)^{n_2}=\frac{1}{1-\frac{x_0^2}{\tau}}\cdot\frac{1}{1-\frac{y_0^2}{\tau}}=\frac{\tau^2}{(\tau-x_0^2)(\tau-y_0^2)}<\infty,$$

отримаємо, що для довільної фіксованої точки площини $(x_0,y_0)\in R^2$ ряд $\sum_{n\in I}a_n x_0^{n_1}y_0^{n_2}$ збігається, а отже областю збіжності є вся площина R^2.

Випадок антикомутуючих твірних.

Про центр алгебри. Нехай $a=\sum_{\alpha\in I}a_\alpha u^{\alpha_1}v^{\alpha_2}$, b = $b=\sum_{\beta\in I}a_\beta u^{\beta_1}v^{\beta_2}$. Тоді має місце теорема [2]:

Теорема 1. Центр Z алгебри утворює сукупність рядів $a=\sum_{\alpha\in I}a_\alpha u^{\alpha_1}v^{\alpha_2}$, в яких компоненти мультиіндексу $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ є парними.

Матрична реалізація. Як відомо [4, с.157], найпростішою невиродженою парою антикомутуючих твірних є пара 2×2 матриць вигляду: $u=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & -x\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0 & y\\ y & 0\end{pmatrix}$, де *x, y* >0. Має місце теорема [2]:

Теорема 2. Між алгеброю рядів $\{a(u,v)\}$ від двох антикомутуючих твірних u, v та алгеброю матрично-значних 2×2 функцій $M_a(x,y)$ від двох дійсних змінних x, y вигляду $M_a(x,y)=\begin{pmatrix}a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y)\\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y)\end{pmatrix}$ існує взаємно однозначна відповідність тоді і тільки тоді, коли матричні елементи $a_{ij}(x,y)(i,j=1,2)$ задовольняють наступним граничним умовам: 1) $a_{11}(0,y)=a_{22}(0,y)(y\ge 0)$; 2) $a_{12}(0,y)=a_{21}(0,y)(y\ge 0)$; 3) $a_{12}(x,0)=a_{21}(x,0)(x\ge 0)$.

ВИСНОВКИ. У статті побудовано топологічну ядерну *- алгебра степеневих рядів від двох ермітових твірних. Досліджуються топологічні й аналітичні властивості алгебри. Розглянуто окремо випадки комутуючих та антикомутуючих ермітових твірних. У випадку комутуючих змінних для вибраних вагових послідовностей описано область збіжності та множина лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів. Також дано функціональну реалізацію алгебри рядів від двох антикомутуючих ермітових твірних у вигляді матрично-значних функцій, елементами яких є звичайні подвійні степеневі ряди від двох дійсних комутуючих змінних із певними граничними умовами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. - М.: Наука, 1969. - 475с. 2. Тищенко С.В., Могильна Т.О. Про деяку топологічну *-алгебру степеневих рядів від N анти комутуючих твірних // Вісник КНУ, Серія Мат. Мех. – 2001. – Вип.6. – С.56-61. 3. Тищенко С.В. Зображення деякої топологічної *-алгебри, породженої двома комутуючими ермітовими твірними. // Вісник КНУ, Серія Мат. Мех. – 1996. – С.126-135. 4. Samoilenko Yu.S. Spectral theory of families of self-adjoint operators. - Kluwer Academic Publisher, 1991, Transl. from Russian ed-n.: Naukova Dumka, Kiev, 1984. – 232p.

Надійшла до редколегії 31.10.12

С. Тищенко, канд. физ.-мат. наук, К. Денисова, студ.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРЫ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ОТ ДВУХ ЭРМИТОВЫХ ОБРАЗУЮЩИХ

Построена топологическая ядерная *-алгебра степенных рядов от двух эрмитовых образующих. Исследованы топологические и аналитические свойства элементов алгебры. Для выбранных весовых последовательностей описаны область сходимости и (для коммутирующих переменных) множество линейных непрерывных симметричных мультипликативных функционалов. Для случая антикоммутирумых образующих алгебра реализуется как алгебра обычных двойных степенных рядов от двух действительных коммутирующих переменных, приводится ее матричная реализация и описывается центр.

S. Tyshchenko PhD, K. Denisova, student

ANALYTIC AND TOPOLOGICAL PROPERTIES OF ALGEBRA POWER SERIES FROM TWO HERMITIAN GENERATORS

Topological nuclear *-algebra of power series of two hermitian generators is constructed. Topological and analytic properties elements of algebra are investigated. For choosen weight sequences the domain of convergense and (for commuting variables) the set of linear continious symmetric multiplicative functionals are described. In the case of anticommuting generators algebra realized as algebra of ordinary double power series of two real commuting variables, matrix realization and center are described.