УДК 519.6

К. Шаріпов, канд. фіз.-мат. наук.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: kosnazar61@ukr.net

СУМУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Розглянуто некоректну задачу відновлення неперервної функцій двох змінних за наближено заданими коефіцієнтами Фур'є. Ця задача розглянута для двох модельних класів скінченної гладкості: функцій з домінуючою змішаною частинною похідною та функцій Соболевського типу гладкості.

ВСТУП. Нехай $L_{2,N} = L_2(Q^N)$ – простір сумованих з квадратом дійсних функцій від N змінних на кубі $Q^N = [0,1]^N$, $C = C(Q^N)$ – простір неперервних на Q^N функцій, а l_2 – простір числових послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для яких $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$.

Дана стаття присвячена задачі сумування ряду Фур'є неперервних функцій з наближено заданими коефіцієнтами.

Нехай система функцій $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ є ортонормованою в просторі $L_2 = L_2(Q^1)$ відносно стандартного скалярного добутку $\langle \cdot,\cdot \rangle$, а $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k(t)$ є рядом Фур'є функції $y(t) \in C[Q^1]$. Припустимо, що замість коефіцієнтів Фур'є y_k нам відомі їх збурені значення y_k^{δ} і виконано умову $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_k^{\delta})^2 < \delta^2$. Природньо виникає важлива для застосувань задача: за наближеними значенням y_k^{δ} відновити в даній фіксованій точці t функцію $y(t) \in C(Q^1)$ з рівнем похибки $\varepsilon(\delta)$, що прямує до нуля при $\delta \to 0$.

Відомо (див., наприклад [5, с.268; 6, с.16]), що ця задача є некоректно поставленою, оскільки відхилення функції $y(t) \in C(Q^1)$ від суми її ряду $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{\delta} \cdot \varphi_k$ в метриці простору $C(Q^1)$ може виявитись як завгодно великим.

Для рішення цієї задачі в [5] А.М.Тихоновим запропоновано стійкий до малих збурень коефіцієнтів Фур'є в метриці простору l_2 загальний метод сумування рядів Фур'є, що базується на ідеї регуляризації [4].

$$T_n^{\alpha}(y^{\delta})(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r(k,\alpha)\, y_k^{\delta}\, \varphi_k(t), \qquad (1)$$

з регуляризуючим множником $r(k,\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha\cdot\psi_k}$. При цьому передбачалось, що $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність додатних чисел, порядок росту яких при $k\to\infty$ не нижчий, ніж $k^{2+\varepsilon}, \varepsilon \ge 0$, а значення параметру регуляризації α узгоджено з похибкою вхідних даних δ, $\alpha = \alpha(\delta)$. У [5] доведено збіжність (1) у випадку, коли $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ система власних функцій першої крайової задачі для звичайних диференційних рівнянь, на класі функцій

$$C_d = \left\{ y(t) \in C(Q^1): \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle y, \varphi_k \rangle\right|^2 \psi_k < d \right\}.$$

Згодом, В. А. Ільїн і Е.Г. Позняк [3] у випадку тригонометричної системи функцій та Б.Алієв [1] для більш загального випадку довільної ортонормованої системи рівномірно обмежених функцій:

$$\|\varphi_k\|_C < \infty, \qquad k = 1,2,...., \qquad (2)$$

отримали оцінку методу сумування $T_n^{\alpha}(y^{\delta})$ при $\psi_k = k^{2s}$, $s > 1/2$, для класу функцій зі швидко спадаючими коефіцієнтами Фур'є.

Визначення. Будемо казати, що ортонормована система $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ належить класу K^{β}, якщо для деякого $\beta \ge 0$ виконується умова $\|\varphi_k\|_C \succ\prec k^{\beta}, \quad k = 1,2,...$

Приклад. Тригонометрична система функцій належить класу K^{β} при $\beta = 0$ і, таким чином, задовольняє умову (2). В той же час, система поліномів Лежандра не задовольняє умову (2), але належить до класу K^{β} при $\beta = 1$.

В [8] П.Мате і С.В. Переверзєвим було розглянуто метод сумування, що визначається наступним чином

$$T_n^{\lambda}(y^{\delta})(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, y_k^{\delta}\, \varphi_k(t), \qquad (3)$$

де відносно трикутної матриці $\lambda = \{\lambda_k = \lambda_k^n: \quad k = 1,2....,n, \quad n \in N\}$ передбачалось, що існують така сталі c_{λ} і деяке число $\theta \ge 0$, для яких виконується умова $|1-\lambda_k| \le c_{\lambda} \cdot \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\theta}$. При цьому для класу функцій $W_{2,1}^{\mu} = \left\{ y(t) \in L_2(Q^1): \quad \|y\|_{W_2^{\mu}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\mu} \left|\langle y, \varphi_k \rangle\right|^2 < \infty \right\}$ у [8] були отримані оцінки похибки методу (3) у випадку довільних ортонормованих систем, що задовольняють різні умови росту. Зокрема, було встановлено, що у випадку систем $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ з класу K^{β} справедлива оцінка

$$\left\| y(t) - T_n^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t) \right\|_C \le c \cdot \delta^{\frac{\mu-\beta-1/2}{\mu}},$$

де стала c не залежить від δ.

Далі в [9], останній результат було узагальнено на випадок класу неперервних функцій $W_{2,1}^{\psi}$, що пов'язаний із заданою системою $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ із класу K^{β} наступним чином

$$W_{2,1}^{\psi} = \left\{ y(t) \in L_2\left(Q^1\right): \quad \|y\|_{W_2^{\mu}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) \left|\left\langle y, \varphi_k \right\rangle\right|^2 < \infty \right\},$$

де $\psi(k)$ – деяка монотонно зростаюча функція, $\psi(1) = 1$. При цьому для (3) на класі функцій $W_{2,1}^{\psi}$ отримано оцінку

$$\left\| y(t) - T_n^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t) \right\|_C \le \ c\,\delta \left[\psi^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]^{\beta+1/2},$$

де стала c не залежить від δ.

Зазначимо, що всі згадані вище результати отримані для класів функцій однієї змінної $(N = 1)$. Для функцій багатьох змінних дослідження з даної проблематики майже не проводились. З відомих нам праць варто згадати [2; 7]. У [7] (2) узагальнено на випадок, коли $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \in R^N$, являє собою фундаментальну систему оператора Лапласа в обмеженій N– вимірній області $(N \ge 4)$, де в якості регуляризуючих множників використовувалися множники вигляду $(1+\alpha\,\lambda_k)^{-s}$, $s = \left[\frac{N}{4}\right] + 1$. У [2] аналогічні дослідження проведені для функцій двох змінних, представлених у вигляді ряду Фур'є за тригонометричним базисом, де в якості регуляризуючих множників пропонувались множники вигляду $\left[\left(1+\alpha\cdot k_1^2\right)\cdot\left(1+\alpha\cdot k_2^2\right)\right]^{-1}$. Зазначимо, що як в [2], так і в [7] автори обмежились встановленням факту збіжності запропонованого методу сумування.

Таким чином, проблема встановлення швидкості збіжності методу сумування рядів Фур'є функцій багатьох змінних (на парі просторів C і l_2) досі залишається відкритою. Саме дослідженню цієї задачі для деяких класів функцій двох змінних присвячена дана стаття, яку можна розглядати в якості продовження [10].

КЛАСС ФУНКЦІЙ З ДОМІНУЮЧОЮ ЗМІШАНОЮ ЧАСТИННОЮ ПОХІДНОЮ. Нехай $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормована система функцій в $L_2\left(Q^1\right)$, що належить класу K^{β}, а $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_{i,j}\,\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau)$, $\quad y_{i,j} = \left\langle y, \varphi_i \cdot \varphi_j \right\rangle$, є рядом Фур'є функції $y(t,\tau) \in C\left(Q^2\right)$. Припустимо, що замість коефіцієнтів Фур'є $\{y_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ відомо їх збурені значення, а саме: задано послідовність чисел $y^{\delta} := \{y_{i,j}^{\delta}\}_{i,j=1}^{\infty}$, для яких

$$y_{i,j}^{\delta} = y_{i,j} + \delta \cdot \xi_{i,j}, \qquad i, j = 1, 2, \dots \quad , \tag{4}$$

де $\delta \in (0,1))$ и $\|\xi\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_{i,j}\right|^2\right)^{1/2} \le 1$.

Розглянемо суму

$$T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\; y_{i,j}^{\delta}\; \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \ . \tag{5}$$

Апроксимуючі властивості методу залежать від рівня дискретизації n и m, а також від властивості множини $\lambda = \left\{\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}^{n,m} :\ i = 1,2,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots,m; \quad n, m \in N\right\}$. Будемо припускати, що існують така стала c_{θ} і деяке число θ, що виконується умова $\left|1-\lambda_{i,j}\right| \le c_{\theta}\left(\frac{i \cdot j}{n \cdot m}\right)^{\theta}$. У цьому випадку будемо говорити, що метод сумування (5) має порядок θ.

Розглянемо апроксимуючі властивості $T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)$ на класі функцій

$$L_{2,2}^{\mu,\nu} := L_2^{\mu,\nu}\left(Q^2\right) = \left\{ y(t,\tau) \in L_2\left(Q^2\right): \qquad \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} i^{2\mu} j^{2\nu} \left|\left\langle y, \varphi_i \cdot \varphi_j \right\rangle\right|^2 < \infty \right\},$$

Додатково, будемо припускати, що для n, m, які визначають рівень дискретизації методу $T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)$ і μ, ν, які визначають гладкість по кожній змінній функції з класу $L_{2,2}^{\mu,\nu}$, виконано умову

$$n^{-\mu} \approx m^{-\nu} \tag{6}$$

Неважко бачити, що функції з $L_{2,2}^{\mu,\nu}$ є узагальненням функцій з домінуючою змішаною частковою похідною порядку $n+m$.

Лема 1. При $\mu > \frac{\beta}{2}$ і $\nu > \frac{\beta}{2}$ для $y(t,\tau) \in L_{2,2}^{\mu,\nu}$ мають місце оцінки

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{\sqrt{2\nu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}}\, \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}, \tag{7}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{\sqrt{2\mu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}}\, \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}, \tag{8}$$

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{1}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}} m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}}\, \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}. \tag{9}$$

Доведення. Застосовуючи нерівність Коші-Шварца для доведення (7) отримуємо

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\cdot\varphi_i(t)\cdot\varphi_j(\tau) \right\|_C = \left\| \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} i^{\mu} j^{\nu}\cdot y_{i,j}\cdot \frac{\varphi_i(t)\cdot\varphi_j(\tau)}{i^i j^j} \right] \right\|_C \le$$

$$\le \left\| \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} i^{2\mu} j^{2\nu} \left|y_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left|\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)\right|^2}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \le \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{i^{2\beta} j^{2\beta}}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{2\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{2\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2\mu-2\beta-1}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}}\, \frac{\sqrt{2\nu-2\beta}}{\sqrt{2\nu-2\beta-1}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\nu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}}\, \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}.$$

Діючи аналогічним чином для доведення (8) і (9) відповідно маємо

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\cdot\varphi_i(t)\cdot\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{i^{2\beta} j^{2\beta}}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{2\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{2\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{2\mu-2\beta}}{\sqrt{2\mu-2\beta-1}}\, m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}}\, \frac{1}{\sqrt{2\nu-2\beta-1}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\mu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}}\, \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}},$$

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=n+1}^{n\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{i^{2\beta} j^{2\beta}}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{2\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{2\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}} m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}}\, \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}.$$

Лему доведено.

Справедлива теорема:

Теорема 1. Нехай $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \in K^{\beta}$ і дано послідовність збурених значень коефіцієнтів Фур'є (4) функції $y(t,\tau)\in L_2^{\mu,\nu}(Q^2)$ для деяких $\mu > \beta + 1/2$ и $\nu > \beta + 1/2$. Тоді для методу сумування $T_{n,m}^{\lambda}(y^{\delta})$ порядку $\theta > \max(\mu,\nu)$ при $l = \max(n,m) \succ\prec \delta^{2/(2\rho+2\beta+1)}$, $\rho = \min(\mu,\nu)$, має місце оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}\le 1} \left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}(y^{\delta})(t,\tau) \right\|_C \le \breve{c}\cdot\delta^{\frac{2\rho-2\beta-1}{2\rho+2\beta+1}},$$ де стала $\breve{c}$ не залежить від δ.

Доведення. Враховуючи (4) для $y(t,\tau)\in L_2^{\mu,\nu}(Q^2)$ і сумування вираз для $T_{n,m}^{\lambda}(y^{\delta})(t,\tau)$ маємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}(y^{\delta})(t,\tau) \right\|_C = \left\| \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\ y_{i,j}^{\delta}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \tag{10}$$

$$\le \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C + \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C + \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C +$$

$$+ \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda_{i,j})\, y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C + \delta \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\ \xi_{i,j}\ y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C.$$

Оцінимо спочатку четвертий доданок правої частини (10). Знаходимо

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda_{i,j})\, y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \left\| \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (1-\lambda_{i,j})^2 \left|y_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau)\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \le \tag{11}$$

$$\le \left\| \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(1-\lambda_{i,j}\right)^2 \frac{1}{i^{2\mu}j^{2\nu}} \left|y_{i,j}\right|^2 i^{2\mu}j^{2\nu} \right]^{\frac12} \right\|_C \times \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(i\ j\right)^{2\beta} \right]^{\frac12} \le$$

$$\le c_\theta \max_{1\le i\le n,\,1\le j\le m} \left[\left(\frac{ij}{nm}\right)^{2\theta} \frac{1}{i^{2\mu}j^{2\nu}} \right]^{\frac12} \left\| \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|y_{i,j}\right|^2 i^{2\mu}j^{2\nu} \right]^{\frac12} \right\|_C \left[\sum_{i=1}^{n} i^{2\beta} \right]^{\frac12} \left[\sum_{j=1}^{m} j^{2\beta} \right]^{\frac12} \le$$

$$\le c_\theta\, n^{-\mu}m^{-\nu} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}\, n^{\beta+\frac12}\, m^{\beta+\frac12} = c_\theta\, n^{-\mu+\beta+\frac12}\, m^{-\nu+\beta+\frac12} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} .$$

Зазначимо, що з властивості множини λ випливає, нерівність $\left|\lambda_{i,i}\right| \le c_\theta + 1$. Тоді для останнього доданку правої частини (10) маємо

$$\delta \left\| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\ \xi_{i,j}\ y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \delta \left\| \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_{i,j}\right|^2 \left|\xi_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac12} \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau)\right|^2 \right]^{\frac12} \right\|_C \le \quad (12)$$

$$\le \delta\left(1+c_\theta\right)\cdot \|\xi\|_{l_2} n^{\beta+\frac12} m^{\beta+\frac12} = \left(c_\theta+1\right)\delta\, n^{\beta+\frac12} m^{\beta+\frac12}.$$

Припустимо, що $\mu \le \nu$. А отже, з умови (6) витікає, що $n \ge m$. Тоді враховуючи умову (6) з (10) – (12) і леми 1 отримаємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^\delta\right)(t,\tau) \right\|_C \le \quad (13)$$

$$\le \frac{\sqrt{2\nu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+1/2} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + \frac{\sqrt{2\mu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+1/2} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-2\mu+2\beta+1} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_\theta\, n^{-2\mu+2\beta+1} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + \left(c_\theta+1\right)\delta\, n^{2\beta+1} =$$

$$= c_1\, n^{-\mu+\beta+\frac12} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_2\,\delta\, n^{2\beta+1},$$

де $c_1 = \dfrac{\sqrt{2\mu-2\beta}+\sqrt{2\nu-2\beta}+1}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} + c_\theta$, $\quad c_2 = c_\theta + 1$.

Аналогічним чином, для випадку $\mu \ge \nu$ (при цьому $n \le m$) маємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^\delta\right)(t,\tau) \right\|_C \le c_1\, m^{-\nu+\beta+\frac12} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_2\,\delta\, m^{2\beta+1} . \quad (14)$$

Виберемо тепер $l = \max(n,m)$ так, щоб $l^{-\rho-\beta-1/2} \succ\prec \delta$, тобто $l \succ\prec \delta^{-\frac{1}{\rho+\beta+1/2}}$, $\rho = \min(\mu,\nu)$. Тоді з (13) і (14) отримаємо

$$\sup_{\|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} \le 1} \left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^\delta\right)(t,\tau) \right\|_C \le \breve{c}\, \delta^{\frac{2\rho-2\beta-1}{2\rho+2\beta+1}},$$

де стала $\breve{c}$ не залежить від δ.
Теорему доведено**.**

КЛАС ФУНКЦІЙ СОБОЛІВСЬКОГО ТИПУ ГЛАДКОСТІ. У даному розділі вивчаються властивості методу сумування (5) на класі функцій Соболівського типу гладкості, який представлений у наступному вигляді

$$W_{2,2}^{\mu,\nu} := W_2^{\mu,\nu}\left(Q^2\right) = \left\{ y(t,\tau) \in L_2\left(Q^2\right): \quad \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(i^{2\mu}+j^{2\nu}\right)\left|y_{i,j}\right|^2 < \infty \right\}.$$

Лема 2. Для функції $y(t,\tau) \in W_{2,2}^{\mu,\nu}$ при $\mu > 2\beta+1$ і $\nu > 2\beta+1$ виконуються співвідношення

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{\sqrt{\nu-2\beta}}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac12} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \quad (15)$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{\sqrt{\mu-2\beta}}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, m^{-\frac{\nu}{2}+\beta+\frac12} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \quad (16)$$

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{1}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac12} m^{-\frac{\nu}{2}+\beta+\frac12} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \quad (17)$$

Доведення. Спочатку доведемо співвідношення (15). Маємо

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \sqrt{i^{2\mu}+j^{2\nu}}\ y_{i,j}\ \frac{\varphi_i(t)\cdot\varphi_j(\tau)}{\sqrt{i^{2\mu}+j^{2\nu}}} \right\|_C \le$$

$$\leq \left\| \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(i^{2\mu}+j^{2\nu}\right) \left|y_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left|\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau)\right|^2}{i^{2\mu}+j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \leq \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,2}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{i^{2\beta} j^{2\beta}}{2 i^{\mu} j^{\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \frac{1}{\sqrt{\mu-2\beta-1}}\, n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\nu-2\beta}{\nu-2\beta-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\nu-2\beta}{2(\mu-2\beta-1)(\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}}.$$

Аналогічним чином доводяться співвідношення (16) и (17) . Відповідно знаходимо

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{\mu-2\beta}{2(\mu-2\beta-1)(\nu-2\beta-1)}}\, m^{-\frac{\nu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}},$$

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} m^{-\frac{\nu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}}.$$

Лему доведено.

Тепер сформулюємо основний результат даного розділу.

Теорема 2. Нехай система функцій $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ класу належить класу K^{β} і дано послідовність збурених значень коефіцієнтів Фур'є вигляду (4) функції $y(t,\tau) \in W_2^{\mu,\nu}(Q^2)$, $\mu > 2\beta+1$ и $\nu > 2\beta+1$. Тоді для методу сумування (5) порядку $\theta > \max\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ при $l = \max(n,m) \succ\!\prec \delta^{-\frac{2}{\rho+2\beta+1}}$, $\rho = \min(\mu,\nu)$ має місце оцінка

$$\sup_{\|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \leq 1} \left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau) \right\|_C \leq \tilde{c} \cdot \delta^{\frac{\rho-2\beta-1}{\rho+2\beta+1}},$$

де стала $\tilde{c}$ не залежить від δ.

Доведення. Оцінимо четвертий доданок у правій частині (10) для функцій $y(t,\tau) \in W_2^{\mu,\nu}(Q^2)$, $\mu > 2\beta+1$, $\nu > 2\beta+1$. Враховуючи, що $\theta > \max\left(\mu/2, \nu/2\right)$ для четвертого доданку отримаємо

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(1-\lambda_{i,j}\right) y_{i,j}\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \leq \tag{18}$$

$$\leq \left\| \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left|1-\lambda_{i,j}\right|^2}{\left(i^{2\mu}+j^{2\nu}\right)} \left(i^{2\mu}+j^{2\nu}\right) \left|y_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau)\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \leq$$

$$\leq \frac{c_\theta}{\sqrt{2}} \max\left[\frac{1}{i^{\mu} j^{\nu}} \left(\frac{ij}{nm}\right)^{2\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=1}^{n} i^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{m} j^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c_\theta}{\sqrt{2}}\, n^{-\frac{\mu}{2}} m^{-\frac{\nu}{2}} n^{\beta+\frac{1}{2}} m^{\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}}.$$

Нехай $\mu \leq \nu$, відповідно $n \geq m$. Тоді, враховуючи умову (6), із співвідношень (10), (18) і леми 2 отримуємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau) \right\|_C \leq c_3 \cdot n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \cdot \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_2 \cdot \delta \cdot n^{2\beta+1},$$

де $c_3 = \dfrac{\sqrt{2\mu-2\beta}+\sqrt{2\nu-2\beta}+1}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} + \dfrac{c_\theta}{\sqrt{2}}$, $c_2 = c_\theta + 1$.

Аналогічним чином, для випадку $\mu \geq \nu$ (відповідно, $n \leq m$) маємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau) \right\|_C \leq c_3\, m^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_2\, \delta\, m^{2\beta+1}.$$

Виберемо тепер $l = \max(n,m)$ так, щоб $l^{-\frac{\rho}{2}-\beta-\frac{1}{2}} \succ\!\prec \delta$, тобто $l \succ\!\prec \delta^{-\frac{1}{\rho/2+\beta+1/2}}$, $\rho = \min(\mu,\nu)$. Тоді остаточно отримуємо

$$\sup_{\|y\|_{W^{\mu,\nu}_{2,2}}\le 1}\left\| y(t,\tau)-T^{\lambda}_{n,m}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau)\right\|_C \le \tilde{c}\cdot\delta^{\frac{\rho-2\beta-1}{\rho+2\beta+1}},$$

де стала $\tilde{c}$ не залежить від δ. Таким чином доведена теорема2.

ВИСНОВКИ. У (10) автором даної статті були вивчені апроксимуючі властивості методу сумування $T^{\lambda}_{n,m}\left(y^{\delta}\right)$ в випадку $n=m$ на класах функції $L^{\mu,\nu}_2\left(Q^2\right)$ и $W^{\mu,\nu}_2\left(Q^2\right)$ при $\mu=\nu$. Оцінки, що доведені у теоремах 1 і 2 при $n=m$ і $\mu=\nu$ співпадають з відповідними оцінками з (10).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алиев Б. Оценка метода регуляризации для задачи суммирования рядов Фурье // Докл. АН Тадж.ССР, –1978. – Т.21, №4. – с.3–6. 2. Жидков Е.П., Семерджиев Х. О регуляризации задачи суммирования кратного тригонометрического ряда Фурье. – Объедин. Ин-т. ядер. исслед. – Р. 88–91. – Дубна, 1975.– 14 с. 3. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, Ч 2 . – М.,: Наука, 1973. – 448 с. 4. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.// Докл. АН СССР – 1963.– Т 151, № 3.– с. 501–504. 5. Тихонов А.Н. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР.– 1964.– т. 156, № 2 .– с. 268–271. 6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М., Наука, 1979. – 224 с. 7. Фурлетов Г.И. О суммировании рядов Фурье по фундаментальной системе оператора Лапласа в произвольной $N-$ мерной области ($N>4$) методом $T_s\left(\alpha\lambda_s\right)$ // Дифференциальные уравнения, – 1970.– Т.6, №1.– с. 173–189. 8. Mathe P., Pereverzev S.V. Stable summation of orthogonal series with noisy coefficients.// J. of Approximation Theory. – 2002. – Vol. 11.– P. 2060–2076. 9. Sharipov K. On the recovery of continuous functions from noisy fourier coefficients. // Comput. Methods in Appl. Math.– 2011.– Vol. 11.– P. 75–82. 10. Sharipov K . On the recovery of continuous functions from two variables noisy fourier coefficients. // J. of Numerical & Appl. Math.– 2012. – Vol. 109, № 3 .– P.116–124.

Надійшла до редколегії 05.12.12

К. Шарипов, канд. физ.-мат. наук

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрена некорректная задача восстановления непрерывной функции двух переменных по приближенно заданным коэффициентам Фурье. Эта задача рассмотрена для двух модельных классов конечной гладкости: функций с доминирующей смешанной частной производной и функцией Соболевского типа гладкости.

K. Sharipov, PhD

SUMMATION OF FOURIER SERIES OF CONTINUOUS FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

We consider the ill–posed problem of the recovery of continuous functions of two variables from noisy Fourier coefficients. This problem is considered for two model classes of functions of finite smoothness: functions with dominating mixed partial derivative and functions of Sobolev type.

УДК 517.9 + 51(092)

М. Гордієнко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРОБЛЕМА МАЛИХ ЗНАМЕНИКІВ І УМОВИ ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДУ КРИЛОВА-БОГОЛЮБОВА-МИТРОПОЛЬСЬКОГО

Проаналізовано питання про зв'язок між класичною проблемою малих знаменників і умовами для правих частин слабко нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливні процеси, і до яких можна застосувати метод Крилова-Боголюбова-Митропольського для побудови асимптотичних розв'язків.

ВСТУП. Одним із актуальних напрямів сучасної математики є теорія слабко нелінійних диференціальних рівнянь, які використовуються для математичного моделювання різноманітніших явищ та процесів в природознавстві і техніці. Відомо, що слабко нелінійні диференціальні рівняння є складним об'єктом для дослідження. Одним з ефективних методів побудови наближених розв'язків слабко нелінійних диференціальних рівнянь є асимптотичні методи, за допомогою яких можна знайти розв'язок відповідної задачі, який задовольняє вихідне рівняння з певною точністю. При записі асимптотичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь використовуються ряди Фур'є, знаменники доданків яких можуть бути як завгодно малими, тому такі ряди можуть бути розбіжними. Саме у цьому полягає суть класичної проблеми малих знаменників. З іншого боку, за допомогою накладання певних умов на праві частини слабко нелінійних диференціальних рівнянь можна домогтися того, що згадані ряди Фур'є будуть збіжними. Розгляду питання про проблему малих знаменників і умови застосування асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського і присвячено дану статтю.

Основна частина. Асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського [1] знайшов широке застосування при дослідженні слабко нелінійних диференціальних рівнянь, які використовуються для математичного опису коливних процесів в техніці. Такі рівняння, як правило, задовольняють умови теореми про існування і єдиність розв'язку, а малий параметр входить в це рівняння регулярним чином. Отже, згідно з класичною теоремою про існування розв'язку, таке рівняння має розв'язок, цей розв'язок є єдиним і відповідно до теореми про неперервну залежність розв'язку від параметра, такий розв'язок неперервно залежить від малого параметра.

Наближений (асимптотичний) розв'язок, що будується для згаданого вище диференціального рівняння, зображується у вигляді степеневого ряду за малим параметром, причому такий ряд при використанні методу Крилова-Боголюбова-Митропольського не містить секулярних доданків, що є однією з переваг даного методу побудови асимптотичних розв'язків розглядуваних слабко нелінійних диференціальних рівнянь.

При дослідженні поведінки коливних систем з власною частотою ω, що зазнають дії зовнішньої періодичної сили з частотою ν (у нерезонансному випадку), тобто систем вигляду [1, с. 185]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{1}$$