УДК 517.9

О. Чвартацький, асп.,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів
Email: alex.chvartatskyy@gmail.com

ФАКТОРИЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ТА НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРОВНІ МОДЕЛІ, II

Отримано факторизацію матричних інтегральних операторів бінарних перетворень Вольтерра скінченного порядку. Профакторизовано матричний оператор перетворень Фредгольма скінченного рангу за допомогою матричних фредгольмівських операторів перетворень рангу 1. Наведено застосування в теорії нелінійних інтегрованих моделей.

ВСТУП. В сучасній теорії нелінійних інтегровних систем математичної та теоретичної фізики значну роль відіграють алгебричні конструкції, які є результатом роботи великої групи дослідників, зокрема московської та ленінградської шкіл С. П. Новікова і Л. Д. Фаддєєва, а також В. Є. Захарова, А. Б. Шабата, І. М. Гельфанда, Л. А. Дікого, Ю. І. Маніна, В. Г. Дрінфельда, М. Адлера, Р. Хіроти, Дж. Вільсона та багатьох інших (детальний огляд див. в [19]). Так, при побудові точних розв'язків солітонних систем використовується метод одягання Захарова-Шабата [3, 4, 15], метод В. А. Марченка [5], а також метод перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва [17, 18, 22, 23]. Побудова широких класів точних розв'язків нелінійних інтегровних моделей теорії солітонів та їх (2+1)-вимірних узагальнень, які отримуються внаслідок накладання нелокальних редукцій в ієрархії рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі розглядалася в багатьох працях (див. наприклад, [6, 7, 16, 20, 21, 24, 25, 27–29]). При цьому в якості одягаючого оператора використовувався диференціальний оператор перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва. Факторизація диференціального оператора Дарбу-Матвєєва (матричного диференціального оператора першого порядку) за допомогою найпростіших диференціальних операторів типу Дарбу досліджувалась в [30]. Проте, найцікавіші з точки зору фізичних застосувань нелінійні інтегровні системи (нелінійні рівняння Шредінгера, модифіковані рівняння Кортевега-де Вріза, модель Яджими-Ойкави та інші), які отримуються після накладання додаткових редукцій типу ермітового спряження, не підпадають, безпосередньо, під метод одягання за допомогою диференціальних операторів. Для цього в якості одягаючого оператора використовується бінарне перетворення типу Дарбу [1, 8, 26]. Питання факторизації бінарного перетворення в алгебрі формальних символів псевдо-диференціальних операторів розглядалось в [30]. Скалярний інтегральний оператор перетворення Вольтерра скінченного порядку був профакторизований в [9] за допомогою операторів Вольтери першого порядку Також в [9] розглядалось питання факторизації скалярних операторів перетворень Фредгольма скінченого рангу. Метою цієї статті є поширення результатів, отриманих в [9] на матричний випадок.

Структура статті є наступна. В Розділі 2 наводяться необхідні поняття та означення для інтегральних операторів перетворень. В Розділах 3 та 4 досліджується питання факторизації матричних операторів перетворень Вольтери та Фредгольма скінченого порядку та рангу відповідно. У Розділі 5 розглядається застосування матричних інтегральних операторів перетворень для одягання еволюційних диференціальних виразів. В заключних зауваженнях підбивається підсумок отриманих результатів та цілі формулюються завдання для подальших досліджень.

ВИХІДНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ. Введемо деякі поняття та означення, які ми використовуватимемо в основній частині роботи. Зафіксуємо довільний інтервал (a,b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ і точку $x_0 \in [a,b]$. Розглянемо оператори Вольтерра і Фредгольма з $(N\times N)$-матричними ядрами $A(x,s)$ та $F(x,s)$:

$$A = \int_{x_0}^{x} A(x,s)\cdot ds,\ F = \int_{a}^{b} F(x,s)\cdot ds, \tag{1}$$

які діють на довільну $(N\times 1)$-вектор-функцію $f(x)$ таким чином:

$$A\{f\} = \int_{x_0}^{x} A(x,s)f(s)\cdot ds, \quad F\{f\} = \int_{a}^{b} F(x,s)f(s)\cdot ds. \tag{2}$$

За аналогією з означеннями, що використовувались в [9], введемо означення матричних операторів Вольтерра та Фредгольма скінченного порядку та рангу відповідно.

Означення. Матричний оператор Вольтери A називатимемо оператором порядку K, якщо його ядро можна зобразити наступним чином:

$$A(x,s) = A_1(x)A_2^{\mathrm{T}}(s), \tag{3}$$

де $A_1(x)$, $A_2(s)$ – $(N\times K)$-матричні функції, причому вектор-стовпці кожної з них є лінійно незалежними функціями. Оператор Вольтерра A (1) з ядром (3) надалі позначатимемо так:

$$A := A_1\int_{x_0}^{x} A_2^T\cdot ds. \tag{4}$$

Означення. Оператор Фредгольма F вигляду (1) називатимемо оператором Фредгольма рангу $K\in \mathrm{N}$, якщо його ядро можна подати у вигляді:

$$F(x,s) = F_1(x)F_2^{\mathrm{T}}(s), \tag{5}$$

де $F_1(x)$, $F_2(s)$ – $(N\times K)$-матричні функції, кожна з яких складається з лінійно незалежних вектор-стовпців.

Оператор Фредгольма F вигляду (1) з ядром (5) надалі позначатимемо так:

$$F := F_1\int_{a}^{b} F_2^T\cdot ds.$$

Означення. Оператори $W = I + A$ і $S = I + F$, де A, F є вольтерівським та фредгольмівським матричними операторами з ядрами вигляду (3), (5), ми називатимемо операторами перетворень порядку K і рангу K відповідно.

В Означенні 3 символом I позначено одиничний оператор.

ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВОЛЬТЕРРА. Позначимо через $\hat{\varphi}_K=\hat{\varphi}_K[1]:=\hat{\varphi}_K(x)=(\varphi_1[1],\ldots,\varphi_K[1])$ та $\hat{\psi}_K=\hat{\psi}_K[1]:=\hat{\psi}_K(x)=(\psi_1[1],\ldots,\psi_K[1])$ $(N\times K)$-матричні функції, складені з лінійно незалежних $(N\times 1)$ вектор-стовпців $\varphi_j[1]$ та $\psi_j[1]$, $j=\overline{1,K}$. Вважатимемо, що елементи матриць $\hat{\varphi}_K[1]$ та $\hat{\psi}_K[1]$ – неперервні та інтегровні з квадратом модуля на інтервалі (a,b) $(-\infty\le a<b\le+\infty)$, тобто, належать простору $\Im:=C(a,b)\cap L_2(a,b)$. Розглянемо пару інтегральних операторів Вольтерра порядку K:

$$W_K=W_K[C_K,\hat{\varphi}_K[1],\hat{\psi}_K[1]]:=I-\hat{\varphi}_K[1]\Delta_K^{-1}\int_{x_0}^{x}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds,$$
$$\tilde{W}_K=\tilde{W}_K[C_K,\hat{\varphi}_K[1],\hat{\psi}_K[1]]:=I-\hat{\psi}_K[1]\tilde{\Delta}_K^{-1}\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}_K^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds,\ \ \Delta_K:=C_K+\int_{x_0}^{x}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)ds,x_0\in[a,b],\ \ \tilde{\Delta}_K^{\mathrm{T}}=\Delta_K^{\blacklozenge},\tag{6}$$

де $C_K=diag(c_1,\ldots,c_K)$ – невироджена діагональна матриця розмірності $(K\times K)$. Нас цікавитиме питання факторизації операторів (6) за допомогою вольтерівських операторів перетворень порядку 1. Позначимо через W_{11}, $\tilde{W}_{11}$ такі оператори:

$$W_{11}=W[c_1,\varphi_1[1],\psi_1[1]]:=I-\varphi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_1^T[1](s)\cdot ds,\ \ \ \tilde{W}_{11}=\tilde{W}[c_1,\varphi_1[1],\psi_1[1]]:=I-\psi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_1^T[1](s)\cdot ds,$$
$$\Delta_{11}:=c_1+\int_{x_0}^{x}\psi_1^T[1]\varphi_1[1]ds.\tag{7}$$

Подіємо операторами перетворень (7) на $(N\times K)$-матричні функції $\hat{\varphi}_K[1]$ та $\hat{\psi}_K[1]$ відповідно:

$$\hat{\varphi}_K[2]:=W_{11}\{\hat{\varphi}_K[1]\}=\hat{\varphi}_K[1]-\varphi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)ds,$$
$$\hat{\psi}_K[2]:=\tilde{W}_{11}\{\hat{\psi}_K[1]\}=\hat{\psi}_K[1]-\psi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\psi}_K[1](s)ds.\tag{8}$$

Використовуючи другі вектор-стовпці $\varphi_2[2]$ та $\psi_2[2]$ матриць $\hat{\varphi}_K[2]$ та $\hat{\psi}_K[2]$ (8) відповідно, визначимо наступну пару операторів перетворень:

$$W_{22}=W[c_2,\varphi_2[2],\psi_2[2]]:=I-\varphi_2[2]\Delta_{22}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_2^{\mathrm{T}}[2](s)\cdot ds,$$
$$\tilde{W}_{22}=\tilde{W}[c_2,\varphi_2[2],\psi_2[2]]:=I-\psi_2[2]\Delta_{22}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_2^{\mathrm{T}}[2](s)\cdot ds,\ \Delta_{22}:=c_2+\int_{x_0}^{x}\psi_2^{\mathrm{T}}[2]\varphi_2[2]ds.\tag{9}$$

На k-тому кроці, де $1\le k<K$, отримаємо матричні функції $\hat{\varphi}_K[k]$ та $\hat{\psi}_K[k]$. За допомогою k-тих стовпців $\varphi_k[k]$ та $\psi_k[k]$ будуємо перетворення:

$$W_{kk}=W[c_k,\varphi_k[k],\psi_k[k]]:=I-\varphi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_K^{\mathrm{T}}[k](s)\cdot ds,$$
$$\tilde{W}_{kk}=\tilde{W}[c_k,\varphi_k[k],\psi_k[k]]=I-\psi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_K^{\mathrm{T}}[k](s)\cdot ds,\ \Delta_{kk}:=c_k+\int_{x_0}^{x}\psi_K^{\mathrm{T}}[k](s)\varphi_k[k](s)ds,k=\overline{1,K},\tag{10}$$

і визначаємо нові $(N\times K)$-матричні функції $\hat{\varphi}_K[k+1]$ та $\hat{\psi}_K[k+1]$:

$$\hat{\varphi}_K[k+1]=W_{kk}\{\hat{\varphi}_K[k]\}=\hat{\varphi}_K[k]-\varphi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_k^{\mathrm{T}}[k](s)\hat{\varphi}_K[k](s)ds,$$
$$\hat{\psi}_K[k+1]=\tilde{W}_{kk}\{\hat{\psi}_K[k]\}:=\hat{\psi}_K[k]-\psi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_k^{\mathrm{T}}[k](s)\hat{\psi}_K[k](s)ds,\ j=\overline{1,K},\tag{11}$$

Справедливе таке твердження:

Твердження 1. Оператори Вольтерра K-ого порядку W_K та $\tilde{W}_K$ (6) факторизуються таким чином:

$$W_K=W_{KK}\circ W_{K-1K-1}\circ\ldots\circ W_{22}\circ W_{11},\ \ \tilde{W}_K=\tilde{W}_{KK}\circ\tilde{W}_{K-1K-1}\circ\ldots\circ\tilde{W}_{22}\circ\tilde{W}_{11},\tag{12}$$

де оператори W_{kk} та $\tilde{W}_{kk}$ визначаються формулами (7)–(11).

Доведення. Проведемо доведення індукцією за K. Припустимо, що твердження виконується для деякого K. А саме, нехай для операторів W_K та $\tilde{W}_K$, які визначені формулою (6), справджується рівність (12). Доведемо, що тоді вона буде справедливою для операторів W_{K+1}, $\tilde{W}_{K+1}$. Тобто, потрібно перевірити, що:

$$W_{K+1}=W_{K+1K+1}\circ W_{KK}\ldots W_{22}\circ W_{11}=W_{K+1K+1}W_K,\ \ \ \tilde{W}_{K+1}=\tilde{W}_{K+1K+1}\circ\tilde{W}_{KK}\ldots\tilde{W}_{22}\circ\tilde{W}_{11}=\tilde{W}_{K+1K+1}\tilde{W}_K.$$

Перевіримо припущення індукції для оператора $\tilde{W}_{K+1}$. Для W_{K+1} перевірка проводиться аналогічно. Введемо позначення:

$$f[K+1]:=\tilde{W}_K\{f\}=f-\hat{\psi}_K\tilde{\Delta}_K^{-1}\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}_K^{\mathrm{T}}(s)f(s)ds,\tag{13}$$

де $f-(N\times 1)$-вектор-функція, кожна компонента якої належить до класу $\Im$. Тоді,

$$\tilde{W}_{K+1K+1}\circ\tilde{W}_K\{f\}=\tilde{W}_{K+1K+1}\{f[K+1]\}=f[K+1]-\psi_{K+1}[K+1]\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1K+1}\int_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}[K+1](s)f[K+1](s)ds. \quad (14)$$

Використавши те, що $\varphi_{K+1}[K+1]=W_K\{\varphi_{K+1}\}$, а також формулу (13), отримаємо рівність:

$$\int_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}[K+1](s)f[K+1](s)ds=\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)f(s)ds-\left(\int_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_K\left(\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)f(s)ds\right). \quad (15)$$

Відповідно, з рівностей (13), (14), (15) та того, що $\psi_{K+1}[K+1]=\tilde{W}_K\{\psi_{K+1}\}$, отримуємо:

$$\tilde{W}_{K+1\,K+1}\{f[K+1]\}=f-\hat{\psi}_K\tilde{\Delta}^{-1}_K\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)f(s)ds-\left(\psi_{K+1}-\hat{\psi}_K\tilde{\Delta}^{-1}_K\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\psi_{K+1}(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1}\times$$

$$\times\left(\int_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)f(s)ds-\left(\int_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_K\left(\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)f(s)ds\right)\right)=f-\left(\hat{\psi}_K,\psi_{K+1}\right)A_{K+1}(x)\int_{x_0}^{x}\begin{pmatrix}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\\ \varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\end{pmatrix}f(s)ds,$$

де $A_{K+1}(x)$ – $(K+1)\times(K+1)$-матрична функція, яка виглядає таким чином:

$$A_{K+1}(x)=\begin{pmatrix}A_{11}(x) & A_{12}(x)\\ A_{21}(x) & A_{22}(x)\end{pmatrix},$$

де $A_{11}(x)$, $A_{12}(x)$, $A_{21}(x)$, $A_{22}(x)$ – $(K\times K)$, $(K\times 1)$, $(1\times K)$, (1×1)-блоки вигляду:

$$A_{11}(x)=\tilde{\Delta}^{-1}_K+\tilde{\Delta}^{-1}_K\left(\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\psi_{K+1}(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1}\left(\int_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)\right)\tilde{\Delta}^{-1}_K,$$

$$A_{12}(x)=-\tilde{\Delta}^{-1}_K\left(\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\psi_{K+1}(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1},\quad A_{21}(x)=-\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1}\left(\int_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_K,\ A_{22}(x)=\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1}.$$

Шляхом безпосередніх обчислень отримуємо, що

$$A_{K+1}(x)=\begin{pmatrix}\tilde{\Delta}_K & \int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\psi_{K+1}(s)ds\\ \int_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)ds & c_{K+1}+\int_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\psi_{K+1}(s)ds\end{pmatrix}^{-1}=\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1}.$$

Таким чином, $\tilde{W}_{K+1K+1}\circ\tilde{W}_K=I-\hat{\psi}_{K+1}(x)\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1}\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\cdot ds=\tilde{W}_{K+1}$. Аналогічно перевіряється факторизація для оператора W_{K+1}.

Тепер, використовуючи Твердження 1, ми профакторизуємо вольтеррівські оператори перетворень W_K та $\tilde{W}_K$ (6) у випадку довільної невиродженої матриці C_K. Як відомо з теорії матриць (див., наприклад, [2]), довільну невироджену матрицю розмірності ($K\times K$) можна подати у вигляді добутку таким чином: $C_K=F_KU_KL_K$, де F_K та L_K – нижня та верхня трикутні матриці відповідно. $U_K=diag(u_1,\ldots,u_K)$ – діагональна матриця з елементами вигляду $u_1=D_1$, $u_k=\dfrac{D_k}{D_{k-1}}$, $k>1$, де D_k – головний мінор k-го порядку матриці C_K. Таким чином, оператор W_K (6) з довільною невиродженою матрицею C_K можна записати так:

$$W_K=I-\hat{\varphi}_K[1]\left(F_KU_KL_K+\int_{x_0}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)ds\right)^{-1}\int_{x_0}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1](s)\cdot ds=$$

$$=I-\hat{\varphi}_K[1]L_K^{-1}\left(U_K+\int_{x_0}^{x}F_K^{-1}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)L_K^{-1}ds\right)^{-1}\int_{x_0}^{x}F_K^{-1}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1](s)\cdot ds= \quad (16)$$

$$=I-\hat{\varphi}'_K[1]\left(U_K+\int_{x_0}^{x}\hat{\psi}'^{\mathrm{T}}_K[1](s)\hat{\varphi}'_K[1](s)ds\right)^{-1}\int_{x_0}^{x}\hat{\psi}'^{\mathrm{T}}_K[1](s)\cdot ds,$$

де $\hat{\varphi}'_K[1]=\hat{\varphi}_K[1]L_K^{-1}$, $\hat{\psi}'^{\mathrm{T}}_K[1]=F_K^{-1}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1]$. Тепер, використавши формулу (16) та Твердження 1, ми отримуємо алгоритм для факторизації оператора W_K (6) з довільною (не обов'язково діагональною) невиродженою матрицею C_K.

ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФРЕДГОЛЬМА. У цьому розділі ми досліджуватимемо факторизації матричних операторів перетворень Фредгольма скінченного рангу. Розглянемо матричні оператори перетворень Вольтерра (6) при $x_0=\pm\infty$:

$$W^+=I-\hat{\varphi}_K(x)(\Delta^-_K(x))^{-1}\int_{-\infty}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K(s)\cdot ds,W^-=I-\hat{\varphi}_K(x)(\Delta^+_K(x))^{-1}\int_{+\infty}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K(s)\cdot ds, \quad (17)$$

де $\hat{\varphi}_K=\hat{\varphi}_K(x)$, $\hat{\psi}_K=\hat{\psi}_K(x)$ – $(N\times K)$-матричні функції, елементи яких є неперервними та інтегровними з квадратом модуля на всій осі;

$$\Delta^+_K(x)=C^+_K+\int_{+\infty}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K(s)\hat{\varphi}_K(s)ds,\ \Delta^-_K(x)=C^-_K+\int_{-\infty}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K(s)\hat{\varphi}_K(s)ds,$$

де C_K^+, C_K^- – $(K \times K)$-сталі матриці. Обернені оператори до W^+, W^- (17) мають вигляд:

$$(W^+)^{-1} = I + \hat{\varphi}_K(x)\int_{-\infty}^{x}(\Delta_K^-(s))^{-1}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds,\ (W^-)^{-1} = I + \hat{\varphi}_K(x)\int_{+\infty}^{x}(\Delta_K^+(s))^{-1}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds. \quad (18)$$

Надалі вважатимемо, що матриці C_K^+ та C_K^- є невиродженими та задовольняють співвідношення

$$C_K := C_K^+ = C_K^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\hat{\varphi}_K(s)ds, \quad (19)$$

наслідком якого є рівність: $\Delta_K := \Delta_K^+ = \Delta_K^-$.

Твердження 2. Нехай матриці C_K^- та $C_K^+ = C_K^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\hat{\varphi}_K(s)ds$ –невироджені. Тоді композиції операторів (17) та (18) мають такий вигляд:

$$S_1 := W^+ \circ (W^-)^{-1} = I - H_1 = I - \hat{\varphi}_K(x)(\Delta_K^-)^{-1}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}C_K^-(\Delta_K^-)^{-1}(s)\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds, \quad (20)$$

$$S_2 := (W^-)^{-1} \circ W^+ = I - H_2 = I - \hat{\varphi}_K(x)(C_K^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds, \quad (21)$$

$$S_3 := (W^+)^{-1} \circ W^- = I + H_3 = I + \hat{\varphi}_K(x)(C_K^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds, \quad (22)$$

$$S_4 := W^- \circ (W^+)^{-1} = I + H_4 = I + \hat{\varphi}_K(x)(\Delta_K^+)^{-1}(x)C_K^+\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta_K^+)^{-1}(s)\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds. \quad (23)$$

Доведення. Доведення цього факту проводиться аналогічно доведенню відповідного твердження з [9] для скалярних фредгольмівських операторів перетворень.

Дослідимо тепер питання факторизації матричного оператора перетворення Фредгольма S_2 рангу K (21) з матрицею $C_K^+ = diag(c_1^-,\ldots,c_K^-) + \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\hat{\varphi}_K(s)ds$ за допомогою фредгольмівських операторів перетворень рангу 1. Використовуватимемо для матриць $\hat{\varphi}_K$ та $\hat{\psi}_K$, а також їх стовпців ті ж позначення, що й у першому розділі; тобто $\hat{\varphi}_K := \hat{\varphi}_K[1] = (\varphi_1,\ldots,\varphi_K) = (\varphi_1[1],\ldots,\varphi_K[1])$, $\hat{\psi}_K := \hat{\psi}_K[1] = (\psi_1,\ldots,\psi_K) = (\psi_1[1],\ldots,\psi_K[1])$. Далі, розглянемо такий оператор перетворень Фредгольма:

$$S_{11} := I - \varphi_1[1](c_1^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds,\ c_1^+ := c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_1[1](s)ds. \quad (24)$$

Введемо матричну функцію $\hat{\varphi}_K[2]$ таким чином:

$$\hat{\varphi}_K[2] := S_{11}\{\hat{\varphi}_K[1]\} = \hat{\varphi}_K[1] - \varphi_1[1](c_1^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)ds. \quad (25)$$

Побудуємо новий оператор S_{22} за допомогою другого стовпця матричної функції $\hat{\varphi}_K[2]$:

$$S_{22} := I - \varphi_2[2](c_2^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds,\ c_2^+ = c_2^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_2[2](s)ds. \quad (26)$$

На k-тому кроці $(1 \le k < K)$ маємо матричну функцію $\hat{\varphi}_K[k]$. Будуємо перетворення S_{kk}:

$$S_{kk} := I - \varphi_k[k](c_k^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds,\ c_k^+ = c_k^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_k[k](s)ds. \quad (27)$$

Далі будуємо нову матричну функцію:

$$\hat{\varphi}_K[k+1] := S_{kk}\{\hat{\varphi}_K[k]\} = S_{kk}\circ S_{k-1k-1}\ldots\circ S_{22}\circ S_{11}\{\hat{\varphi}_K[1]\} = \hat{\varphi}_K[k](x) - \varphi_k[k](x)(c_k^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\varphi}_K[k](s)ds. \quad (28)$$

Через K кроків отримаємо оператори $S_{11},\ldots,S_{KK}$. Справедливе таке твердження:

Твердження 3. Оператор S_2 (21) можна зобразити наступним чином $S_2 = S_{KK} \circ S_{K-1K-1} \circ \ldots \circ S_{22} \circ S_{11}$, де оператори S_{kk}, $k = \overline{1,K}$ визначаються формулами (24)-(28).

Доведення. Доведення цього твердження проводиться індукцією за K, як і у випадку матричних вольтерівських операторів перетворень (Твердження 1).

Тепер, використовуючи факторизацію оператора S_2 (21), отримаємо факторизацію оператора S_3 (22) з невиродженою діагональною матрицею $C_K^- = diag(c_1^-,\ldots,c_K^-)$ та $(N \times K)$-матричними функціями $\hat{\varphi}_K = (\varphi_1,\ldots,\varphi_K) = (\varphi_1[1],\ldots,\varphi_K[1])$, $\hat{\psi}_K = (\psi_1,\ldots,\psi_K) = (\psi_1[1],\ldots,\psi_K[1])$. Розглянемо такі два оператори перетворень Фредгольма:

$$S_{11} := I + \varphi_1[1](c_1^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds,\ \tilde{S}_{11} := I - \psi_1[1]\left(c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_1[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds$$

та визначимо матричну функцію $\hat{\psi}_K[2]$ таким чином:

$$\hat{\psi}_K[2] := \tilde{S}_{11}\{\hat{\psi}_K[1]\} = \hat{\psi}_K[1] - \psi_1[1]\left(c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_1[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\psi}_K[1](s)ds.$$

Далі, за допомогою вектор-функцій $\varphi_2[1]$, $\psi_2[2]$ та сталої c_2^- побудуємо оператори перетворень Фредгольма S_{22}, $\tilde{S}_{22}$:

$$S_{22} := I + \varphi_2[1](c_2^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\mathrm{T}}[2](s)\cdot ds,\ \tilde{S}_{22} := I - \psi_2[2]\left(c_2^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\mathrm{T}}[2](s)\varphi_2[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds.$$

На k-ому кроці $(1 \le k < K)$ отримаємо матричні функції $\hat{\psi}_K[k]$. Визначаємо оператори:

$$S_{kk} = I + \varphi_k[1](c_k^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[k](s)\cdot ds,\ \tilde{S}_{kk} := I - \psi_k[k]\left(c_k^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[k](s)\varphi_k[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_k^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds.$$

Далі, будуємо функції $\hat{\psi}_K[k+1] : \hat{\psi}_K[k+1] := \tilde{S}_{kk}\{\hat{\psi}_K[k]\}$, та оператори:

$$S_{k+1\,k+1} = I + \varphi_{k+1}(c_{k+1}^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{k+1}^{\mathrm{T}}[k+1](s)\cdot ds,\ \tilde{S}_{k+1\,k+1} := I - \psi_{k+1}[k+1]\left(c_{k+1}^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{k+1}^{\mathrm{T}}[k+1](s)\varphi_{k+1}[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{k+1}^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds.$$

Через K кроків отримаємо оператори S_{kk}, $k = \overline{1,K}$. Справедливе твердження:

Твердження 4. Оператор S_3 (22) допускає наступну факторизацію: $S_3 = S_{KK} \circ S_{K-1\,K-1} \circ \ldots \circ S_{22} \circ S_{11}$.

Доведення. Доведення проводиться як і у випадку Твердження 3 за допомогою індукції за K.

Скориставшись попереднім твердженням, а також фактом з теорії матриць про розклад довільної невиродженої матриці C_K^- в добуток $C_K^- = F_K U_K L_K$, де F_K, L_K – нижня та верхня трикутні матриці, U_K – діагональна матриця, ми можемо профакторизувати оператор S_3 (22) у випадку невиродженої матриці C_K^-. А саме, запишемо оператор S_3 наступним чином:

$$S_3 = I + \hat{\varphi}_K(x)(C_K^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds = I + \hat{\varphi}_K(x)L_K^{-1}U_K^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}F_K^{-1}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds = I + \tilde{\hat{\varphi}}_K(x)U_K^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\hat{\psi}}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds,$$

де $\tilde{\hat{\varphi}}_K(x) = \hat{\varphi}_K(x)L_K^{-1}$, $\tilde{\hat{\psi}}_K(x) = \hat{\psi}_K(x)F_K^{\blacklozenge\mathrm{T},-1}$. Далі, залишилось скористатись Твердженням 4 про факторизацію оператора S_3 у випадку діагональної матриці C_K^-.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВИРАЗІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ВОЛЬТЕРРІВСЬКИХ ОПЕРАТОРІВ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ. Розглянемо еволюційний диференціальний вираз наступного вигляду:

$$L = \alpha\partial_t - \sum_{i=0}^{n} u_i D^i,\ \alpha \in \mathrm{C}, D := \frac{\partial}{\partial x},$$

коефіцієнти $u_i = u_i(x,t)$ якого є ($N \times N$)-матричними функціями. Під формально транспонованим ми розумітимемо вираз такого вигляду:

$$L^\tau = -\alpha\partial_t - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i D^i u_i.$$

Нехай $(N \times K)$-матричні функції $\hat{\varphi}_K = \hat{\varphi}_K(x,t) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)$, $\hat{\psi}_K = \hat{\psi}_K(x,t) = (\psi_1, \ldots, \psi_K)$ є розв'язками рівнянь: $L\{\hat{\varphi}_K\} = \hat{\varphi}_K\Lambda,\ L^\tau\{\hat{\psi}_K\} = \hat{\psi}_K\tilde{\Lambda},\quad \Lambda, \tilde{\Lambda} \in Mat_{K\times K}(\mathrm{C})$. В наступній теоремі описано структуру операторів $L^\pm$, отриманих після одягання L за допомогою вольтеррівських операторів W^+, W^- (17). Вважатимемо, що матриці $C_K^\pm$ в операторах (17) задовольняють співвідношення (19), наслідком якого є рівність $\Delta_K^+ = \Delta_K^-$.

Теорема 1. Нехай $(N \times K)$ матричні функції $\hat{\psi}_K$, $\hat{\varphi}_K$ спадають на обох нескінченостях та задовольняють рівність: $\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}\hat{\varphi}_K\Lambda - \tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}\hat{\varphi}_K)ds$. Тоді:

1. Оператори $L^+ = W^+L(W^+)^{-1}$ та $L^- = W^-L(W^-)^{-1}$ мають вигляд:

$$L^\pm = (L^\pm)_{\ge 0} + \hat{\Phi}_K \mathrm{M}_K \int_{\mp\infty}^{x}\hat{\Psi}_K^{\mathrm{T}}\cdot ds,$$

де $\hat{\Phi}_K = W^\pm\{\hat{\varphi}_K\}(C_K^\mp)^{-1}, \hat{\Psi}_K = (W^\pm)^{-1,\tau}\{\hat{\psi}_K\}(C_K^\mp)^{\blacklozenge\mathrm{T},-1},\quad \mathrm{M}_K = C_K^+\Lambda - \tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}C_K^+ = C_K^-\Lambda - \tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}C_K^-$, а символом $(L^\pm)_{\ge 0}$ ми позначили диференціальну частину відповідного оператора $L^\pm$.

2. Диференціальні частини операторів L^+ та L^- співпадають: $(L^+)_{\ge 0} = (L^-)_{\ge 0}$.

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню відповідної теореми з [9] для випадку скалярних інтегральних операторів.

Зауважимо, що Теорема 1 містить два характерні випадки: 1. $\mathrm{M}_K = 0$, 2. $\mathrm{M}_K \ne 0$. Перший випадок реалізовується, наприклад, при $\Lambda = \tilde{\Lambda} = 0$ і ми отримуємо інваріантне перетворення еволюційоного диференціального виразу. Інтегральні оператори перетворень типу (17) для нестаціонарного оператора Дірака, а також їх зв'язок з операторами перетворень оберненої задачі та оператором розсіяння розглянуто в [10]. В [11], [12] розглянуто подібні зв'язки для гіперболічної системи двох рівнянь та нестаціонарного оператора Дірака в конусних змінних. Особливий інтерес становить також другий випадок. Зокрема, наявність в перетвореному операторі інтегральної частини дає змогу будувати розв'язки рівнянь, що містяться в k-редукованій ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (k-cKP) [16, 20, 28], а також її векторних [29] та матричних узагальнень. Побудова розв'язків для деяких представників з k-cKP та їх багатокомпонентних узагальнень за допомогою інтегральних операторів перетворень розглядалася в 13].

ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ. Ми отримали факторизацію матричних інтегральних операторів перетворень Вольтерра та Фредгольма, які тісно пов'язані з основними об'єктами оберненої задачі розсіяння [10–12] та методом одягання Захарова-Шабата [4]. Твердження 1 та 2, а також Теорема 1 для матричних інтегральних операторів перетворень є узагальненнями відповідних тверджень з [9]. Окремим питанням стоїть застосування отриманих результатів (зокрема, Теореми 1) для інтегрування матричних нелінійних рівнянь математичної фізики з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса [14]. Цьому питанню будуть присвячені наші подальші дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Беркела Ю.Ю., Сидоренко Ю.М. Теореми типу Дарбу і оператори перетворень для нелокально редукованої ермітової ієрархії Кадомцева--Петвіашвілі (Hk-cKP) // Матем. Студії. – 2006. – Т.25, №1. – С. 38–64. 2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц – М.: Наука, 1967. – 576 С. 3. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи – М.:Наука, 1980. – 320 с. 4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – Т.8, №3. – с. 43–53. 5. Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры – Киев: Наук. думка, 1986. – 156 с. 6. Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Доповіді НАН України. – 1999. – №8. – С.19–23. 7. Самойленко А.М., В.Г. Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр.мат.журн. – 1999. – Т.51, №1. – С.78–97. 8. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса // Вісн. Київ. націон. ун-ту ім.Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – Вип. 22. – С.32–35. 9. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Факторизація інтегральних операторів та нелінійні інтегровні моделі, І. // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2012. – Вип. 77. – С. 20–48. 10. Сидоренко Ю. Конструктивний метод побудови оператора розсіяння для нестаціонарної гіперболічної системи рівнянь // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2010. – Вип. 72. – С. 263–274. 11. Сидоренко Ю.М., Починайко М.Д., Чвартацький О.І. Обернена задача розсіяння для просторово-двовимірної системи Дірака і метод бінарних перетворень // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2010. – №287: Серія фізико-математичні науки. – С. 28–59. 12. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Оператори перетворень для гіперболічної системи двох рівнянь. // Математичний вісник НТШ – 2010. – Том 7 – С. 289–317. 13. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. Інтегрування скалярної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі методом інтегральних перетворень типу Дарбу// Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2011. – Вип.75 – С.181–225. 14. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. Матричні узагальнення інтегровних систем з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса // Карпатські математичні публікації – 2012. – Том 3, №2 – С. 125–144. 15. Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с. 16. Cheng Yi. Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy // J. Math. Phys. – 1992. – Vol.33. – P. 3774–3787. 17. Crum M.M. Associated Sturm - Liouville systems // Quart. J. Math. Oxford – 1955. – V.2, №6 – P.121–127. 18. Darboux G. Lecons sur la Theorie Generale de Surface et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal II. – Gauthiers-Villars, Paris, 1889 – 210 p. 19. Dickey L.A. Soliton equations and Hamiltonian systems. Adv. Math. Phys., 1991. – V.12. – 310 p. 20. Konopelchenko B., Sidorenko J., Strampp W. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems // Phys. Lett. A. – 1991. – V.157. – P.17–21. 21. Liu X., Lin R., Jin B., Zeng Yu. A generalized dressing approach for solving the extended KP and the extended mKP hierarchy // J. Math. Phys. – 2009. – V.50 – 053506-1 – 053506-14. 22. Matveev V.B. Darboux transformations and explicit solutions of the Kadomtsev-Petviashvily equation depending on the functional parameters. // Lett. Math. Phys. – V.3. – 1979. – P.213–216. 23. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons – Berlin Heidelberg,Springer-Verlag, 1991. – 120 P. 24. Melnikov V.K. On equations for wave interactions // Lett. Math. Phys. – 1983. – Vol.7, No 2. – P. 129–136. 25. Melnikov V.K. A direct method for deriving a multi-soliton solution for the problem of interaction of waves on the x,y plane. // Commun. Math. Phys. – 1987. – Vol. 112, No. 4 – P. 639–652. 26. Oevel W., Schief W. Darboux Theorems and the KP Hierarchy // Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations. (ed. P.A. Clarkson) – 1993. – P. 193–205. 27. Oevel W., Strampp W. Wronskian solutions of the constrained KP hierarchy // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37 – P.6213–6219. 28. Sidorenko J., Strampp W. Symmetry constraints of the KP-hierarchy // Inverse Problems. – 1991. – V.7. – P. L37–43. 29. Sidorenko J., Strampp W. Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvilli hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – V. 34, №4. – P.1429–1446. 30. Sydorenko Yu.M. Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations // Матем. студії. – 2003. – Т.19, №2. – С.181–192.

Надійшла до редколегії 25.10.12

А. Чвартацкий, асп

ФАКТОРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ.

Получена факторизация матричних интегральных операторов бинарных преобразований Вольтера конечного порядка. Профакторизировано матричный оператор преобразования Фредгольма конечного ранга с помощью матричных фредгольмовских операторов преобразований ранга 1. Приведено использование в теории нелинейных интегрируемых моделей.

O.Chvartatskyi, PhD graduate

FACTORIZATION OF INTEGRAL OPERATORS AND NONLINEAR INTEGRABLE EQUATIONS, II

A factorization of the matrix integral Volterra operator of binary transformations is obtained. Matrix finite rank Fredholm integral transformation operators are decomposed into the first rank Fredholm transformation operators. Applications to the theory of nonlinear integrable systems are demonstrated.

УДК 517.977

А. Сукретна, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: sukretna@gmail.com

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОБМЕЖЕНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Для задачі оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для хвильового процесу отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування виходить на обмеження, та побудовано оптимальний синтез у цьому випадку. Запропоновано закон наближеного усередненого синтезу, що забезпечує близьку до оптимальної поведінку керованої системи.

ВСТУП. Робота є продовженням циклу праць [3, 7, 8], в яких досліджуються задачі оптимального керування з напіввизначеними критеріями якості для процесів, що описуються крайовими задачами для гіперболічних рівнянь зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. На відміну від праць [3, 8] у даній статті аналізується задача з обмеженнями на керування. А саме, розглянуто випадок, коли оптимальне керування виходить на обмеження та має єдину точку переключення (випадок, коли керування сходить з обмеження, розглянуто у [7]). За цих умов побудовано оптимальне програмне керування та оптимальне керування у формі зворотного зв'язку. Крім того, оскільки отриманий оптимальний синтез не є зручним з точки зору практичного використання (задається за допомогою нескінченних рядів та нерегулярно залежить від малого параметру), у даній статті запропоновано та обґрунтовано закон наближеного усередненого синтезу, що має необхідні екстремальні властивості.