

**ВИСНОВКИ.** Проведено аналіз руху абсолютно твердого стержня з послідовними співударями з нерухою поверхнею. У випадку відсутності дисипації енергії в системі ( $K = 1$ ) показано, що інтеграл енергії системи не змінюється під час удару, тобто система є консервативною. Встановлено потенційну неінтегровність системи. Використавши формалізм Гамільтона, вихідний гамільтоніан системи за допомогою канонічного перетворення зведено до гамільтоніана, залежного лише від змінних дії. Отримано умову, за якої гіперповерхня, що обмежує фазові траєкторії розглядуваної динамічної системи, не руйнується. Для дослідження наявності хаотичних рухів побудовано перерізи Пуанкаре.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гаральд Іро. Класична механіка: переклад з німецької – Львів: ЛНУ, 1999.
2. Гринченко В.Т., Мацыгура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Издательство ЛКИ, 2010.
3. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. – Т.2, М.: Наука, 1972.
4. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Перевод с англ. – М.: УРСС, 2001.

Надійшла до редколегії 31.10.12

Т. Климчук, студ.

### ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ С МГНОВЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

*Проведено исследование движения стержня в однородном поле сил притяжения при наложении мгновенных связей. Доказано существование и разрушение интегралов движения динамической системы в случае абсолютно упругого удара. Построены сечения Пуанкаре для исследования хаотического поведения системы.*

T. Klimchuk, BA

### INTEGRABILITY OF SYSTEMS WITH INSTANTANEOUS CONSTRAINTS

*Investigations of motion of the rod in the uniform field of gravity forces under the influence of instantaneous constraints were performed. The existence and destruction of motion integrals of the dynamic system in case of absolutely elastic impact were proved. Poincare sections were constructed for the study of chaotic behavior of the system.*

УДК 539.3

Л. Мольченко, д-р. фіз.-мат. наук, проф.,  
І. Лоос, канд. фіз.-мат. наук, П. Голуб, студ.,  
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ  
Email: Mol\_LV@univ.kiev.ua, Loiri@univ.kiev.ua

### ВПЛИВ НЕЛІНІЙНОСТІ НА ЗГІННІ КОЛИВАННЯ СТЕРЖНЯ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

*У статті проводиться оцінка впливу геометричної нелінійності при визначенні згинних коливань стержня під дією магнітного поля. Отримані оцінки для стержня характеризують якісну сторону поведінки гнучких пластин та оболонок під дією електромагнітного поля.*

**ВСТУП.** На даний момент у механіці деформівного твердого тіла отримали значний розвиток дослідження з вивчення ефектів взаємодії механічних полів деформування з електромагнітними полями. Фізичні основи цих ефектів детально висвітлені у ряді курсів з класичної електродинаміки та фізики твердого тіла [3–5]. З класичної фізики відомо, що ефекти зв'язаності динамічних переміщень електропровідних тіл з електромагнітним полем зумовлені пондеромоторними силами Лоренца. Останні залежать від швидкості руху елементів провідного суцільного середовища і зовнішнього магнітного поля, а для струмонесучих елементів – від величини та орієнтації струму провідності відносно зовнішнього магнітного поля. Інша важлива обставина, яку необхідно врахувати при постановці і розв'язанні конкретних задач магнітопружності, залежить від того, що істотні ефекти пондеромоторної взаємодії мають місце для височастотних коливань електромагнітного поля, що вимагає застосування нелінійної теорії.

У даній статті вивчається вплив сталого магнітного поля та змінного електричного струму на нелінійні коливання ізотропного тонкого стержня сталого перетину, що знаходиться під дією електромагнітної сили Лоренца [1,2].

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГІННИХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ.** Розглянемо прямолінійний стержень в прямокутній системі координат  $(x, y, z)$  із алюмінію довжини  $l$  при шарнірному закріпленні його торців. Вважаємо, що гнучкий стержень знаходиться в постійному зовнішньому магнітному полі і є провідником електричного струму (рис. 1). В результаті взаємодії струму з магнітним полем у стержні виникають об'ємні сили Лоренца

$$\rho \vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}.$$

Густину струму задаємо виразом  $\vec{J} = -J_0 \sin \omega t \vec{i}$ , де  $\omega$  – кругова частота, а вектор магнітної індукції приймається сталим,  $\vec{B} = B_0 \vec{j}$ . У цьому випадку сила Лоренца рівна  $\rho \vec{F} = J_0 B_0 \sin \omega t \vec{k}$ , тобто стержень навантажений симетрично до вертикальної площини симетрії  $xz$ .

Рівняння поперечного згину стержня у відповідності до рівноваги сил, які діють на елемент вздовж осі  $z$ , приймає вигляд

$$\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = J_0 B_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

де  $\sigma_x$  – мембрана частина нормального напруження;  $w$  – прогин стержня;  $h$  – товщина стержня;  $E$  – модуль Юнга;  $\rho$  – густина матеріалу стержня.

Граничні умови при шарнірному закріпленні мають вигляд

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l. \quad (2)$$

Початкові умови

$$w = 0, \quad \dot{w} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3)$$

Для випадку дії тільки поперечного навантаження ( $\sigma_x = 0$ , лінійний випадок) рівняння (1) приймає вигляд

$$\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = J_0 B_0 \sin \omega t. \quad (4)$$

Рівняння (1) є диференціальним рівнянням вимушених згинних коливань стержня сталого перетину.

Розглянемо фізичний зміст членів рівняння (1). Їх знаки залежать від вибраного правила знака і не мають особливого фізичного змісту.

Перший член рівняння являє собою опір прогину, підрахований як варіація поперечної сили, момент якої урівноважує варіацію моменту згину, який виникає через зміну кривизни, тобто має згинний опір прогину, пропорційний згинній жорсткості стержня.

Другий член являє собою поперечну, обумовлену кривизною, компоненту деякої осьової сили  $N_x$ . Якщо сила  $N_x$  не залежить від прогину, обумовленого осьовим навантаженням, прикладеним на кінцях так, що вона залишається сталою при згині, то другий член лінійний відносно  $w$ . Осьова сила  $N_x$  може також викликатись прогином. Так буває, якщо опори стержня заважають руху кінців стержня назустріч один одному. Тоді, якщо стержень згинається поперечними силами, то осьова лінія буде розтягуватись, так як вона при цьому викривляється і стає довшою від початкової, а опори будуть створювати розтягуючу силу  $N_x$ , яка буде зростати пропорційно квадрату прогину. Другий член у цьому випадку буде зростати пропорційно третій степені прогину і рівняння стане нелінійним відносно  $w$ .

Третій член являє собою дію інерційного об'ємного навантаження. Четвертий член рівняння являє собою поперечне навантаження, яке викликає прогин. Вибираючи електромагнітне навантаження рівним

$$J_0 B_0 \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (5)$$

розв'язок крайової задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді

$$w(x, t) = w_1 \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (6)$$

де  $w_1$  – прогин середини прогону стержня.

Перед тим як перейти до розв'язання поставленої задачі, визначимо нормальне напруження  $\sigma_x$ . Нехай  $\Delta l$  – різниця між довжинами вигнутої і не вигнутої осей стержня. Тоді

$$\sigma_x = E \frac{\Delta l}{l} = \frac{E}{l} \int_0^l \left( \sqrt{1 + (\partial w / \partial x)^2} - 1 \right) dx \approx \frac{E}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 E}{4l^2} w_1^2 \sin^2 \omega t. \quad (7)$$

Підставляючи в рівняння (1) вирази (6) і (7), після ділення на  $\sin(\pi x / l)$  маємо

$$\frac{Eh^3}{12} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 w_1 \sin \omega t + Eh \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 w_1^3 \sin^3 \omega t - \rho h \omega^3 w_1 \sin \omega t = J_0 B_0 \sin \omega t. \quad (8)$$

Враховуючи, що  $\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t$  і збираючи коефіцієнти при  $\sin \omega t$ , отримуємо наближене співвідношення відносно  $w_1 / h$  вигляду

$$\frac{w_1}{h} + 9 \left( \frac{w_1}{h} \right)^3 = \frac{12l^4}{Eh^4 \pi^4} \left( J_0 B_0 + \rho h^2 \omega^2 \frac{w_1}{h} \right). \quad (9)$$

Перший доданок співвідношення (9) характеризує опір навантаженню, обумовлений згином; другий доданок характеризує опір, обумовлений дією сили  $\sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ .

На рис. 2 пунктиром показано опір обумовлений тільки згином, суцільною лінією показано сумарний опір, де  $P$  – права частина виразу (9), що поділена на  $\frac{\pi^4 Eh^4}{12l^4}$ .

З рис. 2 видно, що лінійна теорія дає хорошу апроксимацію до тих пір, поки прогин малий, тобто  $w \leq 0,3h$  у порівнянні з висотою поперечного перерізу. Для більших прогинів частина навантаження, яке відповідає другій складовій  $\sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , швидко зростає і тому повинна бути врахована.

Визначивши з (9) квадрат кругової частоти, маємо

$$\omega^2 = \frac{Eh^2 \pi^4}{12\rho l^4} \left[ 1 + 9 \left( \frac{w_1}{h} \right)^2 \right] - \frac{J_0 B_0}{\rho h^2} \left( \frac{h}{w_1} \right). \quad (10)$$

Для утворення процесу коливання, необхідно вимагати, щоб права частина співвідношення (10) була додатна. Виконання цієї вимоги дозволяє визначити границі зміни величини густини струму в залежності від  $w_1 / h$  при відомому  $B_0$ . Невиконання цієї вимоги веде до того, що частина частот буде дорівнювати нулю або уявній величині. Амплітуди відповідних коливань зростатимуть необмежено. Це пов'язано з досягненням або перевищенням критичного значення по Ейлеру, коли стержень втрачає стійкість.

На рис. 3 наведені залежності  $J_0$  від  $w_1/h$  у лінійному і нелінійному випадках. Пунктирною лінією позначено лінійний випадок  $J_{0\text{ліній}}/(10^3 \text{ A/m}^2)$ , суцільною лінією – нелінійний випадок  $J_{0\text{неліній}}/(10^4 \text{ A/m}^2)$ . Тут вибрано  $B_0 = 0,5 \text{ T}$ ;  $l = 0,5 \text{ м}$ ;  $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $\rho = 2670 \text{ кг/м}^3$ .

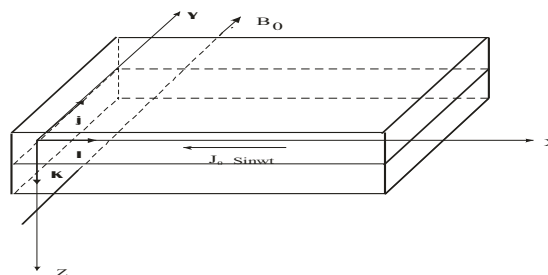


Рис.1 Струмopровідний алюмінієвий стержень

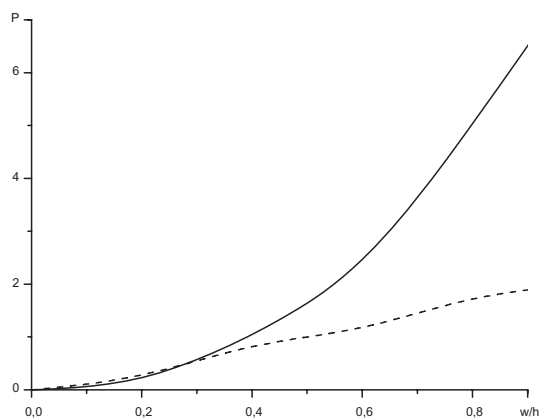


Рис. 2. Залежність прогину від механічного навантаження

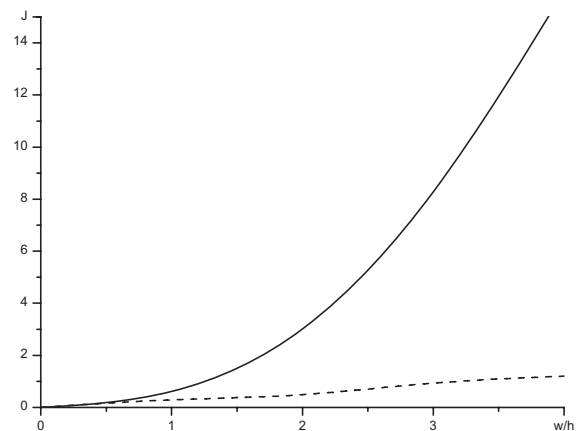


Рис. 3. Залежність густини струму від прогину

З графіків випливає, що для відповідних значень  $w_1/h$  процесу коливання складова вектора густини струму  $J_0$  повинна приймати значення, які знаходяться під наведеними лініями. З цих же графіків випливає, що задаючись відповідними значеннями  $J_0$ , можна визначити величини для відповідних відношень  $w_1/h$ .

**ВИСНОВКИ.** Відмітимо, що отримані результати дозволяють визначити максимальну густину струму при використанні лінійної і нелінійної теорій в залежності від відношень  $w_1/h$ . Отримані результати про якісну поведінку стержня можна узагальнити на випадок гнучких пластин і оболонок, що знаходяться у магнітному полі.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977.
2. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин та оболонок з елементами магнітопружності. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2010.
3. Страттон Д.А. Теория электромагнетизма. – М.: ГТТИ, 1948.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976.
5. Moon F.C. Magnetosolid mechanics. – N. – Y.: Wiley, 1984.

Надійшла до редколегії 05.11.12

Л. Мольченко, д-р. физ.-мат. наук, проф.,  
И. Лоос, канд. физ.-мат. наук, П. Голуб, студ.

#### ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*В статье приводится оценка влияния геометрической нелинейности при определении изгибных колебаний стержня под действием магнитного поля. Полученные оценки для стержня характеризуют качественную сторону поведения гибких пластин и оболочек под действием магнитного поля.*

L. Molchenko, Full Doctor, I. Loos, PhD, P. Golub, BA

#### EFFECT OF NONLINEARITY ON THE BENDING VIBRATIONS OF THE ROD IN A MAGNETIC FIELD

*The paper assesses the impact of geometric nonlinearity in determining the bending vibrations under the action of magnetic field. The estimates for the rod characterize qualitative aspects of behavior of flexible plates and shells under the action of the electromagnetic field.*