

**МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕМПЕРАТУРИ
ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ НА ПОКАЗНИКИ СЕНСОРА
ПРИ ГАРМОНІЧНИХ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ ПЛАСТИН**

Розглянуто задачу про вплив температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсорів при вимушених гармонічних коливаннях пасивних пластин. Представлено основні співвідношення для дослідження впливу розмірів сенсора та температури дисипативного розігріву на працездатність сенсорів. На основі варіаційних принципів запропоновано метод дослідження впливу дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсорів.

ВСТУП. Для активного демпфірування гармонічних коливань тонких пластин із пасивних матеріалів за допомогою сенсорів та актуаторів в її структуру вводяться п'єзоелектричні включення, що виконують роль сенсорів, які можуть бути розміщені як на її поверхні, так і у будь-якому місці по товщині. Вони можуть покривати всю область пластини, або наноситись у вигляді плям. Основна функція цих включень у наданні інформації про механічну поведінку пластини, зокрема про амплітуду резонансних коливань.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо постановку задачі про вплив температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора у декартовій системі координат. Прямокутна пластина товщиною h_0 , на поверхнях якої розміщені прямокутні сенсори товщиною $h_1 \ll h_0$ з протилежною поляризацією. На пластину діє рівномірний поверхневий тиск, що змінюється з часом по гармонічному закону. Матеріал пластини вважається в'язкопружним із залежними від температури комплексними характеристиками. Втрати у п'єзоактивному матеріалі та впливом сенсора на жорсткісні характеристики пластини нехтуємо із-за їх малої товщини порівняно з товщиною пасивної пластини. Нехтуємо також впливом на механічну поведінку тієї різниці потенціалів, яка виникає в сенсорі при деформуванні пластини. Вважається, що температура дисипативного розігріву постійна по товщині пластини. При цьому термомеханічна поведінка ізотропної в'язкопружної пластини описується нелінійною системою диференціальних рівнянь [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[2(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - (\gamma h) \omega^2 w - p_0(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2\alpha}{(\lambda h)} (T - T_C) + \frac{\omega E''(T) h^3}{24(1-\nu^2)(\lambda h)} \times \left\{ \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} = 0.$$

Тут w – поперечний прогин; $D = D' + iD''$ – комплексна згинна жорсткість; γ – густина матеріалу; ω – частота коливань; якщо нехтувати впливом п'єзосарів на згинну жорсткість, то $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E, ν – комплексний модуль та коефіцієнт Пуассона; T – температура дисипативного розігріву, α – коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою T_C , λ – коефіцієнт теплопровідності.

До системи рівнянь (1) необхідно приєднати традиційні механічні та теплові граничні умови.

Для розімкнутих електродів різницю потенціалів, яку показує сенсор при згинних коливаннях пластини, можна подати у вигляді:

$$V_S = \frac{h_1(h_0 + h_1) \int_{C_1}^{C_2} \int_{D_1}^{D_2} \frac{d_{31}}{s_{11}(1-\nu_S)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy}{2 \int_{C_1}^{C_2} \int_{D_1}^{D_2} \epsilon_{33} (1-k_p^2) dx dy}. \quad (2)$$

Тут використано позначення з монографії [2], $k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{S_{11}\epsilon_{33}(1-\nu_S)}$, C_1, C_2, D_1, D_2 – координати вершин прямокутного сенсора, центр якого співпадає з центром пластини. Якщо характеристики сенсора не залежать від температури, то вираз (2) приймає вигляд:

$$V_S = \frac{h_1(h_0 + h_1)}{2S} \frac{k_p^2}{d_{31}(1-k_p^2)} \int_{C_1}^{C_2} \int_{D_1}^{D_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (3)$$

Вираз (3) залишиться без зміни і у випадку, коли характеристики сенсора залежать від осередненої по його площі температури. Надалі будемо вважати, що коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу ν – дійсна величина і не залежить від температури.

МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕМПЕРАТУРИ ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ НА ПОКАЗНИКИ СЕНСОРА.

Для дослідження впливу температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора необхідно спочатку

знайти показники сенсора без врахування температури дисипативного розігріву, потім розв'язати нелінійні диференціальні рівняння (1) з відповідними граничними умовами при дії тільки поперечного тиску, і підставити знайдені температуру та прогин у формулу (2) для розрахунку показників сенсора у залежності від температури дисипативного розігріву. Для розв'язку системи (1) можна використати варіаційні методи, задавши відповідні вирази для прогину і для температури з деякими невідомими параметрами, для яких шляхом мінімізації функціоналів знаходяться нелінійні алгебраїчні рівняння.

Як приклад застосування вказаного підходу розглянемо круглу пластину товщиною h_0 з жорстко закріпленим торцем при дії на неї гармонічного в часі поверхневого тиску. На поверхні пластини розміщено круглі сенсори малої товщини $h_1 = h_2$ з протилежною поляризацією. Матеріал пасивної пластини вважається в'язкопружним з комплексними характеристиками, які залежать від температури. Дійсна та уявна складові модуля зсуву змінюються з температурою за лінійним законом:

$$G = G' + iG'', \quad G' = G'_0 - G'_1 T, \quad G'' = G''_0 - G''_1 T, \quad (4)$$

Тут G'_0, G'_1, G''_0, G''_1 визначаються експериментально. Так, наприклад, подані у [3] експериментальні дані для поліетилену у діапазоні температур $20^0 C \leq \theta \leq 80^0 C$ з великою точністю апроксимуються виразом (4), в якому $G' = 968 - 8,69\theta$ (МПа), $G'' = 87,1 - 0,7\theta$ (МПа). Коефіцієнт Пуассона поліетилену $\nu = 0,3227$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,47$ Вт/(м·град), густина $\gamma = 938$ кг/м³. При врахуванні залежності властивостей п'єзоматеріалу від температури використаємо експериментальні дані для п'єзокераміки ЦТСТБС-2. Температура на контурі пластини підтримується постійною і дорівнює T_C . При коливаннях круглої пластини на першій резонансній частоті вираз для прогину вибираємо у стандартному для такої пластини вигляді: $w = A(1 - \rho^2)^2$.

Тоді температурне поле дисипативного розігріву знаходиться з виразу, представленого в [4]:

$$T_1 = \frac{C_1 \tilde{x}}{C_0 + C_2 \tilde{x}}, \quad \tilde{x} = |A|^2, \quad (5)$$

$$\text{де } C_0 = 1 + \frac{1}{6} \psi_4, \quad C_1 = \left(1 + \frac{\nu}{12}\right) \psi_0, \quad C_2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{\nu}{10}\right) \psi_1, \quad \psi_0 = \frac{8 \omega}{\lambda h a^2} D_0'', \quad \psi_1 = \frac{8 \omega}{\lambda h a^2} D_1'', \quad \psi_4 = \frac{2 \alpha a^2}{\lambda h}.$$

За допомогою стандартної варіаційної техніки знайдемо вираз для комплексної амплітуди коливань:

$$A = \frac{P_0}{A_1 + i A_2}, \quad (6)$$

$$\text{де } A_1 = B_1 - b_1 T_1, \quad A_2 = B_2 - b_2 T_1, \quad B_1 = \frac{64 D_0'}{a^4} - \frac{3}{5} (\gamma h) \omega^2, \quad B_2 = \frac{64 D_0''}{a^4}, \quad b_1 = \frac{96 D_1'}{a^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12}\right), \quad b_2 = \frac{96 D_1''}{a^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12}\right).$$

З (6) знайдемо такий вираз для квадрата амплітуди коливань:

$$x = \frac{P_0^2}{(B_1^2 + B_2^2) - 2(b_1 B_1 + b_2 B_2) T_0 + (b_1^2 + b_2^2) T_0^2}. \quad (7)$$

Виключаючи x з (5), (7), одержимо кубічне рівняння для визначення T_1 :

$$T_1^3 - d_2 T_1^2 + d_1 T_1 - d_0 = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } d_0 = \frac{C_1 P_0 / C_0}{b_1^2 + b_2^2}, \quad d_1 = \frac{B_1^2 + B_2^2 + C_2 P_0^2 / C_0}{b_1^2 + b_2^2}, \quad d_2 = 2 \frac{b_1 B_1 + b_2 B_2}{b_1^2 + b_2^2}.$$

Введемо безрозмірну температуру $y = T_1 / T_C$. Тоді з (8) маємо кубічне рівняння для y :

$$y^3 - e_2 y^2 + e_1 y - e_0 = 0,$$

$$\text{де } e_0 = \frac{d_0}{T_C^3}, \quad e_1 = \frac{d_1}{T_C^2}, \quad e_2 = \frac{d_2}{T_C}.$$

Після визначення температури дисипативного розігріву амплітуда коливань визначається згідно формули (7). Для коротко-замкнутих електродів заряд, що знімаємо з круглого сенсора, обчислюємо за формулою:

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1) \int_0^{\rho_1} \gamma_{31} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (9)$$

Тут використано позначення монографії [2]. Якщо характеристики сенсора не залежать від температури, то вираз (9) приймає вигляд:

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1) \gamma_{31} \int_0^{\rho_1} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (10)$$

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ. Як видно з (9), (10), на відміну від поведінки п'єзоактуатора [4], заряд, що знімається з сенсора, пропорційний амплітуді коливань, яка істотно залежить від температури дисипативного розігріву. Тому температура дисипативного розігріву суттєво впливає на показники сенсора при врахуванні залежності властивостей як пасивних, так і п'єзоактивних матеріалів. Це принципово відрізняє поведінку сенсора від поведінки актуатора [4]. Так як сенсор є основним елементом при активному демпфіруванні коливань пластин при сумісному використанні

сенсорів та актуаторів, можна припустити, що у цьому випадку дисипативний розігрів суттєво вплине на ефективність активного демпфірування вимушених резонансних коливань. Підставляючи $w = A(1 - \rho^2)^2$ в (10), одержимо

$$Q = -8\pi A(h_0 + h_1)\gamma_{31}\rho_1^2(1 - \rho_1^2). \tag{11}$$

Ефективність роботи сенсора оцінюється по величині Q при одній і тій же амплітуді коливань: той сенсор більш ефективний, у якого ця величина більше. Із виразу (11) слідує, що максимальне значення показник сенсора приймає при $\rho_1 = \sqrt{2}/2$. З іншого боку, при $\rho_1 \rightarrow 0$ та при $\rho_1 \rightarrow 1$ цей показник прямує до нуля. Таким чином, при повному покритті поверхні жорстко закріпленої пластини сенсором та при дуже малих його радіусах сенсор перестав виконувати своє функціональне призначення. Найбільш ефективне використання сенсора має місце при радіусі сенсора $\rho_1 = \sqrt{2}/2$. Залежність показника сенсора $Y = -\frac{1}{8\pi A h_1 (h_0 + h_1) \gamma_{31}}$ від його радіуса представлена на Рис. 1.

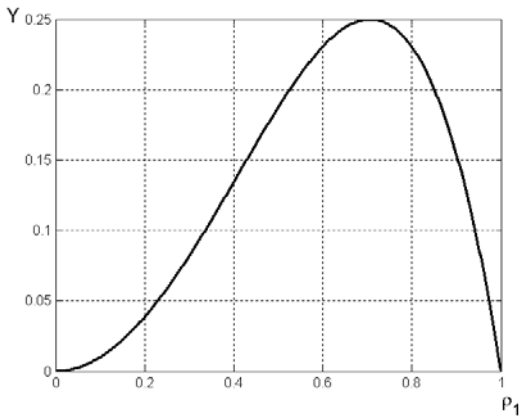


Рис. 1. Залежність показника сенсора від його радіуса

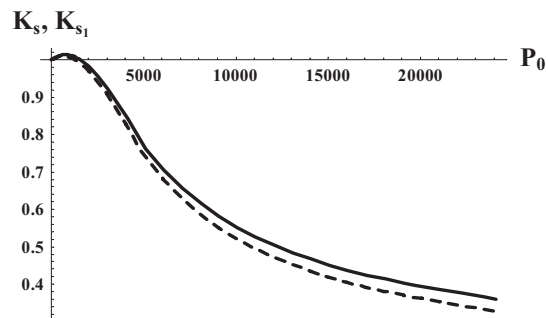


Рис. 2. Залежність K_{S1} від параметра навантаження

Як видно з цього рисунка, різниця потенціалів прямує до нуля як при наближенні радіуса сенсора до нульового, так і при його наближенні до радіуса пластини. З формули (11) видно, що при досягненні температурою точки Кюрі, коли $\gamma_{31}(T_K) = 0$, показник сенсора також стає рівним нулеві, тобто сенсор перестав виконувати своє функціональне призначення через втрату матеріалом п'єзоефекту. Нехай пластинка коливається на частоті лінійного резонансу. Якщо враховується тільки залежність від температури властивостей пасивного матеріалу, а властивості п'єзоматеріалу залежать від осередненої по площі температури, то із представлених вище формул одержуємо, що для коротко-замкнених електродів:

$$K_{S1} = \frac{|Q(\theta^0 C)|}{|Q(20^0 C)|} = \frac{\gamma_{31}(\theta^0 C)}{\gamma_{31}(20^0 C)} \cdot \frac{|A(\theta^0 C)|}{|A(20^0 C)|}.$$

Якщо ж від температури залежать тільки властивості пасивного матеріалу, то $K_S = \frac{|A(\theta^0 C)|}{|A(20^0 C)|}$. На Рис. 2 показано

залежність K_{S1} від параметра навантаження для круглї пластини з жорстким закріпленням торця. Тут штрихова лінія відповідає випадку, коли властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, а суцільна – випадку, коли вони залежать від осередненої по площі температури. Як видно з цих графіків, при врахуванні залежності властивостей пасивного матеріалу від температури у широкому діапазоні значень параметра навантаження показники сенсора погіршуються.

ВИСНОВКИ. На основі варіаційних принципів запропоновано метод дослідження впливу дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсорів при вимушених гармонічних коливаннях пасивних пластин. Представлено основні співвідношення, які дозволяють досліджувати вплив розмірів сенсора та температури дисипативного розігріву на працездатність сенсорів. Як приклад розглянуто задачу про ефективність роботи сенсора, розміщеного на суцільній круглї пластині, що здійснює осесиметричні згинні резонансні коливання. З отриманих формул слідує, що при коливаннях на резонансній частоті розміри сенсора і температура дисипативного розігріву можуть суттєво впливати на ефективність роботи сенсорів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Карнаухова Т.В., Пятецькая Е.В. Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами // Прикладная механика – 2009. – 45, № 6. – С. 100 – 112. 2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. – Т.4. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с. 3. Свойства полимеров и нелинейная акустика. Физическая акустика/ Под ред. У.Мезона. Т.2. Ч.Б. – М.: Мир, 1969. – 420с. 4. Карнаухова Т.В., Пятецькая Е.В. Основные соотношения термомеханики неупругих тонких пассивных пластин с распределенными актуаторами при моногармоническом нагружении// Прикладная механика – 2009. – 45, №. 2 – С. 107–123.

О. Пятецкая, канд. физ.-мат. наук

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА НА ПОКАЗАТЕЛИ СЕНСОРА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН

Рассмотрена задача о влиянии температуры диссипативного разогрева на эффективность работы сенсоров при вынужденных гармонических колебаниях пассивных пластин. Представлены основные соотношения для исследования влияния размеров сенсоров и температуры диссипативного разогрева на работоспособность сенсоров. На основе вариационных принципов предложен метод исследования диссипативного разогрева на эффективность работы сенсоров.

O. Pyatetska, PhD

INVESTIGATION OF INFLUENCE A TEMPERATURE OF DISSIPATIVE HEATING ON SENSOR'S FACTORS BY HARMONIC THERMO-MECHANICAL VIBRATIONS OF PLATES

The problem of influence a temperature of dissipative heating on efficiency sensors work by forced harmonic vibrations of passive plates is considered. The basic relations for investigation influence of the sensor dimensions and temperature of dissipative heating on sensors operability are presented. Based on the variation principles, the method to investigate the influence of dissipative heating on efficiency sensors work is proposed.

УДК 532.529: 532.517.4

Б. Рохман, д-р. техн. наук., В. Каліон, канд. фіз.-мат. наук., А. Худащов, студ.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: kalion@univ.kiev.ua, Lena56@mail.ru

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНОСУ МАСИ, ІМПУЛЬСУ Й ЕНЕРГІЇ У ВИСХІДНОМУ ПОЛІДИСПЕРСНОМУ ПОТОЦІ З ВРАХУВАННЯМ ОБЕРТАННЯ ДИСПЕРСНОЇ ФАЗИ Й ВЗАЄМОДІЇ ЧАСТИНОК МІЖ СОБОЮ

Побудовано замкнену систему рівнянь, що описує рух й фізико-хімічні процеси у висхідному полідисперсному потоці, з урахуванням обертання дисперсної фази, сил аеродинамічного опору, ваги та Магнуса, взаємодії частинок між собою та зі стінкою реактора. Замикання рівнянь руху й теплопереносу твердої фази здійснюється на рівні рівнянь для других моментів пульсацій. Пульсаційні характеристики несучого середовища обчислюються із рівняння для турбулентної енергії газу. Отримані результати порівнюються із результатами інших авторів.

ВСТУП. Математичному моделюванню аеродинаміки, тепло-масообміну й горінню полідисперсного ансамблю коксозольних частинок з метою одержання детальної інформації про розподіл швидкісних, концентраційних і температурних полів фаз, що необхідна для конструювання енергетичних установок, приділяється значна увага. Найбільше поширення одержали моделі, що включають рівняння переносу других моментів пульсацій швидкості і температури частинок. Однак у цих рівняннях не повною мірою враховані ефекти, що пов'язані з взаємодією частинок між собою (псевдотурбулентні ефекти), полідисперсністю, обертанням дисперсної фази і дією сили Магнуса [1, 4, 5].

У даній роботі для розрахунку аеродинаміки, теплових й фізико-хімічних процесів у рамках "дворідинної моделі" (ейлереве наближення) побудовано математичну модель, що враховує перенос других моментів пульсацій швидкості (лінійної та кутової), температуру частинок, променистий й конвективний теплообмін, гетерогенність реакцій, сили взаємодії фаз (аеродинамічний опір та силу Магнуса), а також сили взаємодії частинок між собою, турбулентні та псевдотурбулентні ефекти, полідисперсність та обертання частинок.

При побудові методики розрахунку приймаються наступні припущення: 1) процес стаціонарний; 2) стехіометрична схема реакцій містить у собі гетерогенну реакцію $C + O_2 = CO_2$, що протікає на зовнішній поверхні непроникних кулястих частинок; 3) зміна тиску газу в поперечному перерізі потоку не враховується; 4) розглядається двофазове гетерогенне середовище, що складається з несучого середовища (азоту, кисню, вуглекислого газу) й твердої фази, що представлена у вигляді двох ансамблів (кокс + зола), кожний з яких складається із кінцевого числа монодисперсних фракцій M_C та M_{ash} (тут M – кількість фракцій; індекси нижні: C – вуглець, ash – зола); 5) вектор кутової швидкості частинок спрямовано уздовж трансверсальної осі; 6) використовується наближення примежевого шару: $v \ll u, u' \ll u, v' \sim v, \partial/\partial z \ll \partial/\partial r$.

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ. Система рівнянь, що описує рух, тепломасообмін й хімічне реагування висхідного полідисперсного потоку коксозольних частинок в осесиметричному каналі, має вигляд

$$\frac{\partial(C_{O_2} u_g)}{\partial z} + \frac{\partial[r(C_{O_2} v_g + < C'_{O_2} v'_g >)]}{r \partial r} = -6 \sum_{j=1}^{M_C} \frac{L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(C_{CO_2} u_g)}{\partial z} + \frac{\partial[r(C_{CO_2} v_g + < C'_{CO_2} v'_g >)]}{r \partial r} = 6 \sum_{j=1}^{M_C} \frac{L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(C_{N_2} u_g)}{\partial z} + \frac{\partial[r(C_{N_2} v_g + < C'_{N_2} v'_g >)]}{r \partial r} = 0, \quad \frac{\partial(\rho_g u_g)}{\partial z} + \frac{\partial[r(\rho_g v_g + < \rho'_g v'_g >)]}{r \partial r} = 6 \sum_{j=1}^{M_C} \frac{(\mu_{CO_2} - \mu_{O_2}) L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\beta_j u_{pj})}{\partial z} + \frac{\partial[r(\beta_j v_{pj} + < \beta'_j v'_{pj} >)]}{r \partial r} = -\frac{6 \mu_C L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j \rho_C}, \quad \frac{\partial(n_j u_{pj})}{\partial z} + \frac{\partial[r(n_j v_{pj} + < n'_j v'_{pj} >)]}{r \partial r} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\beta_l u_{pl})}{\partial z} + \frac{\partial[r(\beta_l v_{pl} + < \beta'_l v'_{pl} >)]}{r \partial r} = 0, \quad \rho_g u_g \frac{\partial u_g}{\partial z} + (\rho_g v_g + < \rho'_g v'_g >) \frac{\partial u_g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[r \rho_g (\eta_g \frac{\partial u_g}{\partial r} - < u'_g v'_g >) \right] -$$