УДК 517.9

М. Яременко, канд. фіз.-мат. наук., мол. наук. співроб.
Міжнародний математичний центр імені Ю.О. Митропольського НАН України, Київ
Email: math.kiev@gmail.com

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО ТИПУ З НЕПЕРЕРВНОЮ ЕЛІПТИЧНОЮ МАТРИЦЕЮ В ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА

Розглянуто еліптичне рівняння спеціального вигляду в просторі Соболева, введено звуження відповідних операторів на просторах Лебега, описано деякі топологічні конструкції в $L_{L^p(R^l,d^lx)}([0,t])$, завдяки яким доведено аналоги теорем Хілле-Іосіди-Філіпса.

ВСТУП. Дана стаття присвячена дослідженню задачі Коші яка формулюється для узагальненого еволюційного рівняння

$$\frac{d}{dt}u(t)\in \mathrm{A}u(t),\ \ u(t)\in L^p(R^l,d^lx),\ \ t\in[0,t_0],\ \ u(0)=u_0. \tag{1}$$

для випадку, коли в правій частині (1) стоїть оператор, що певним чином пов'язаний з еліптичним рівнянням наступного вигляду [1]

$$\lambda u-d\circ a\circ du+f(x,u,\nabla u)=0\ ,\ \ 1<a(\cdot)\in C_0^\infty(R)\ , \tag{2}$$

а також побудові напівгруп нелінійних операторів в просторах Лебега $L^p\left(R^l,d^lx\right)$, тобто вивченню умов, при яких мають місце певні аналоги теорем типу Хілле – Іосіди– Філліпса.

Коротко теореми Хілле–Іосіди–Філліпса можна сформулювати наступним чином: за умови, що оператор $\left(I-\mathrm{A}\right)^{-1}$ визначено на $L^p\left(R^l,d^lx\right)$, де A – нелінійний дисипативний оператор в $L^p\left(R^l,d^lx\right)$, оператор A породжує єдину напівгрупу стиску T_t в $L^p\left(R^l,d^lx\right)$. І навпаки, якщо $\tilde{\mathrm{A}}$ – локальний генератор нелінійної напівгрупи стиску T_t в $L^p(R^l,d^lx)$, то оператор $\left(I-\mathrm{A}\right)^{-1}$ визначено на всьому $L^p\left(R^l,d^lx\right)$ і A породжує початкову напівгрупу стиску T_t , де A – дисипативне розширення оператора $\tilde{\mathrm{A}}$ в $L^p\left(R^l,d^lx\right)$.

Оператор A в (1) побудовано спеціальним чином за лівою частиною еліптичного рівняння, а саме: спочатку за еліптичним рівнянням для $u\in W_1^p\left(R^l,d^lx\right), v\in W_{1,0}^p(R^l,d^lx)$ визначено форму $h_\lambda^p(u,v)$ згідно формули: $h_\lambda^p(u,v)\equiv\lambda\left\langle u,v\right\rangle+\left\langle dv\circ a\circ du\right\rangle+\left\langle f(x,u,Du),v\right\rangle$. Оскільки для форми $h_\lambda^p(u,v)$ виконуються всі умови теореми Банаха [2], то ця форма $h_\lambda^p(u,v)$ породжує оператор [6–8] $\mathrm{A}_\lambda^p:W_1^p\left(R^l,d^lx\right)\to W_{-1}^p\left(R^l,d^lx\right)$, тобто $h_\lambda^p\left(u,v\right)=\left\langle \mathrm{A}_\lambda^p\left(u\right),v\right\rangle$. Дослідження властивостей оператора A_λ^p показує, що цей оператор задовольняє умови теореми Мінті-Браудера [6 – 8], а отже можна визначити звуження $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p$ оператора A_λ^p на простір $L^p\left(R^l,d^lx\right)$, тобто

$$\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p=\mathrm{A}_\lambda^p\uparrow L^p(R^l,d^lx)\ ,\ \ D\left(\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p\right)=\left\{u\in W_1^p(R^l,d^lx):\mathrm{A}_\lambda^p(u)\in L^p(R^l,d^lx)\right\}.$$

За визначенням покладається $\mathrm{A}\equiv-\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p$. Оператор $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p:D(\mathrm{A}_\lambda^p)\to L^p(R^l,d^lx)$ визначає сюр'єктивне відображення і, як наслідок, еліптичне рівняння (2) має розв'язок в $D(\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p)$. Вперше подібні форми почав розглядати М.М. Кухарчук [3–5].

Основний результат цієї статті складає теорема про існування і єдиність розв'язку узагальненої задачі Коші для рівняння (1) в просторі $L^p\left(R^l,d^lx\right)$, тобто нелінійний аналог теореми Хілле-Іосіди-Філліпса [3–5, 8].

ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо наступну конструкцію. Позначимо через $C_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t]$ простір усіх $L^p\left(R^l,d^lx\right)$-значних сильно неперервних функцій на інтервалі $[0,t]$, тобто, якщо $u(\cdot)\in C_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t]$, то $u:[0,t]\to L^p(R^l,d^lx)$ і $\lim\limits_{s\to s_0}\|u(s)-u(s_0)\|_{L^p(R^l,d^lx)}=0$, $s_0\in[0,t]$; а через $L=L_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t]$ – простір усіх $L^p\left(R^l,d^lx\right)$-значних, сильно інтегровних функцій на інтервалі $[0,t]$, тобто якщо $u(\cdot)\in L_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t]$, то $u:[0,t]\to L^p(R^l,d^lx)$ і $\|u\|_L=\int_0^t\|u(s)\|\,ds<\infty$. Оператор A визначає відображення $\mathrm{A}:L^p(R^l,d^lx)\to L^p(R^l,d^lx)$, яке можна розглядати як (багатозначне) відображення з $C_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t]$ в $L_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t]$, тобто $C_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t]\ni u\to\{v\in L_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t]:v(s)\in\mathrm{A}u(s)$ майже скрізь $\{s\}\}$.

Означення 1. *Елемент* $u\in C_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t_0]$ *називається слабким розв'язком узагальненого рівняння* $\frac{d}{dt}u(t)\in\mathrm{A}u(t),\ \ u(t)\in L^p(R^l,d^lx),\ t\in[0,t_0],$ *якщо існує послідовність абсолютно неперервних розв'язків* $u_n, n\in N,$ $\frac{d}{dt}u_n(t)\in\tilde{\mathrm{A}}u_n(t), n\in N,$ *майже при всіх* $t\in[0,t_0]$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$ *в* $C_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t_0]$.

Означення 2. *Нехай функція* $u_n(t) \in D(\mathrm{A}) \subset C_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t], n \in N$, *задовольняє (в класичному сенсі) рівняння* $\frac{d}{dt}u_n(t) = \mathrm{A}_n u_n(t), n \in N$, *де* $\mathrm{A}_n, n \in N$, *– відображення* $u - vn^{-1} \to v$ *при* $u \in D(\mathrm{A})$, $v \in \mathrm{A}u$. *Якщо послідовність* $\{u_n(t), n \in N\}$ *збігається рівномірно до* $u(t) \in D(\mathrm{A})$, $t \in [0,t_0]$, *в сильній топології і існує підпослідовність* $\left\{ \frac{d}{dt}u_{n_k}(t), n_k \in N \right\}$, *яка збігається в* σ*-слабкій топології до елемента* $\frac{d}{dt}u(t) \in L_{L^p(R^l,d^lx)}[0,t]$, *то елемент* $u(t) \in D(\mathrm{A})$ *називається розв'язком узагальненого параболічного рівняння в (1).*

Відомо, що якщо $u(t)$ абсолютно неперервна функція, то $u(t)$ є диференційованою для майже всіх t і може бути записана через інтеграл від своєї похідної, яка існує для майже всіх t.

Означення 3. *Власним розв'язком задачі Коші для рівняння в (1) називається функція* $u(t)$, *якщо* $u(t) \in D(A)$ *і ця функція є абсолютно неперервною для майже всіх* t *і задовольняє для майже всіх* t *узагальнене параболічне рівняння в (1).*

Означення 4. *Відображення* $\mathrm{A} : L^p(R^l,d^lx) \to L^p(R^l,d^lx)$, *взагалі кажучи, багатозначне, називається дисипативним, якщо*

$$\left\langle f_1 - g_1, (f-g)\left|f-g\right|^{p-2} \right\rangle \le 0 \ \ \forall f_1 \in \mathrm{A}f, q_1 \in \mathrm{A}g, \tag{3}$$

де $\mathrm{A}f, \mathrm{A}g$ *– множина значень відображення* A *елементів* f *і* g *відповідно.*

Якщо A *– однозначний оператор, то умова (3) набуває вигляду*

$$\left\langle \mathrm{A}f - \mathrm{A}q, (f-g)\left|f-g\right|^{p-2} \right\rangle \le 0 \ \ \forall f,q \in L^p\left(R^l,d^lx\right).$$

Оскільки ми розглядаємо нелінійні напівгрупи, то, взагалі кажучи, включення $\mathrm{A}_0\mathrm{T}_t \supset \mathrm{T}_t\mathrm{A}_0$ не виконується. Тут під відображенням $\mathrm{A}_0 : L^p\left(R^l,d^lx\right) \to L^p\left(R^l,d^lx\right)$ ми розуміємо наступне відображення:

$$\mathrm{A}_0 f \equiv \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathrm{T}_h f - f}{h}, \ f \in L^p\left(R^l,d^lx\right), \tag{4}$$

яке називається строго інфінітезимальним генератором.

Теорема 1 *(про існування розв'язку еліптичного рівняння). Нехай коефіцієнти рівняння (2)*

$$\lambda u - d \circ a \circ du + f(x,u,\nabla u) = 0, \ 1 < a \in C_0^\infty,$$

задовольняють умови :

1. $f(x,y,z)$ *– функція, що задовольняє умови:*

$|f(x,y,z) - f(x,y_1,z_1)| \le \tilde{\mu}_1(x)|z - z_1| + \tilde{\mu}_2(x)|y - y_1|$,

$|f(x,y,z)| \le \mu_1(x)|z| + \mu_2(x)|y| + \mu_3(x)$,

2. *функції* $\mu_i(x)$, $\tilde{\mu}_i(x) \in \prod_{k\beta}(-\Delta)$, $\mu_3(x) \in L^p(R^l,d^lx)$.

Тоді рівняння (2) має розв'язок у просторі $W_1^p(R^l,d^lx)$, $l \ge 3, p \ge 2$.

Доведення даної теореми базується на наступних лемах [3–5,8].

Лема 1. *Оператор* $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p\left(R^l,d^lx\right) \to W_{-1}^p\left(R^l,d^lx\right)$ *визначає хемінеперервне відображення.*

Лема 2. *Оператор* $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p\left(R^l,d^lx\right) \to W_{-1}^p\left(R^l,d^lx\right)$, $\lambda > \lambda_0$, *визначає в просторі* $L^p\left(R^l,d^lx\right)$ *акретивне відображення.*

Доведення. Згідно означення оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p\left(R^l,d^lx\right) \to W_{-1}^p\left(R^l,d^lx\right)$ є акретивним в просторі $L^p\left(R^l,d^lx\right)$, якщо виконується нерівність [4] $\left\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2} \right\rangle \ge 0, \forall u,v \in W_1^p$.

Враховуючи умови, маємо

$$\left\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2} \right\rangle \ge \lambda \left\langle (u-v), (u-v)|u-v|^{p-2} \right\rangle +$$

$$+\left\langle d(u-v) \circ a \circ d\left((u-v)|u-v|^{p-2}\right)\right\rangle + \left\langle f(x,u,\nabla u), (u-v)|u-v|^{p-2} \right\rangle - \left\langle f(x,v,\nabla v), (u-v)|u-v|^{p-2} \right\rangle \ge$$

$$\ge \lambda \|u-v\|_p^p + (p-1)\left\langle d(u-v) \circ a \circ d(u-v), |u-v|^{p-2} \right\rangle - \left\langle \tilde{\mu}_1|u-v| + \tilde{\mu}_2|\nabla(u-v)|, (u-v)|u-v|^{p-2} \right\rangle \ge$$

$$\ge \lambda \|W\|_2^2 + 4\frac{(p-1)}{p^2}\left\langle dW \circ a \circ dW \right\rangle - \left\langle \mu_4 W, W \right\rangle - \frac{2}{p}\left\langle \mu_5 \nabla W, W \right\rangle \ge$$

$$\ge \left(\lambda - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta} + \frac{c(\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta}} + \frac{2}{p\sqrt{\beta}}c(\beta)\right)\right)\|W\|_2^2 + \left(4\frac{(p-1)}{p^2} - \frac{\sqrt{\beta}}{2} - \frac{2}{p}\sqrt{\beta}\right)\left\langle dW \circ a \circ dW \right\rangle \ge 0. \ \forall u,v \in W_1^p.$$

де використано позначення $W = (u-v)|u-v|^{\frac{p-2}{2}}$. Лему 2 доведено.

Розглянемо тепер питання про існування розв'язку задачі Коші (1) та побудувати для неї відповідну напівгрупу стиску.

ТЕОРЕМИ ПРО ВЛАСТИВОСТІ ЛОКАЛЬНИХ ГЕНЕРАТОРІВ НЕЛІНІЙНИХ НАПІВГРУП СТИСКУ.

Теорема 2 *(про незалежність області* $D(A_\phi)$ *від фільтра* ϕ***).*** *Область визначення* $D(A_\phi)$ ϕ*- локального генератора* A_ϕ *нелінійної напівгрупи стиску* T_t *не залежить від вибору фільтра* ϕ. *При цьому для будь-якого* $f \in L^p\left(R^l,d^lx\right)$ *виконуються такі властивості:* $f \in D(\mathrm{A}_\phi)$, $\mathrm{T}_t f \in D(\mathrm{A}_\phi)$ $\forall t \ge 0$.

Остання властивість означає, що $\mathrm{T}_t f \in D(\mathrm{A}_0)$ майже для всіх $t \geq 0$ і $\mathrm{T}_t f = f + \int_0^t \mathrm{A}_0 \mathrm{T}_s f ds$.

Теорема 3 *(про властивості оператора A_0). Якщо A_0 – строго локальний генератор напівгрупи T_t, то A_0 – дисипативний оператор, який має таке дисипативне розширення A, що відображення $(\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}$ однозначне і неперервне на $L^p\left(R^l, d^l x\right)$.*

Теорема 4 *(про щільність множини $D(A_0)$ в множині $D(\mathrm{T}_t)$). Нехай $D(\mathrm{T}_t)$ – область визначення напівгрупи стиску T_t, при цьому $D(\mathrm{T}_t)$ є випуклою і замкнутою множиною в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$. Тоді область визначення $D(A_0)$ локального генератора A_0 напівгрупи T_t всюди щільна в $D(\mathrm{T}_t)$.*

Позначимо: $\mathrm{A}_0 f \equiv \lim\limits_{h\downarrow 0} \dfrac{\mathrm{T}_h f - f}{h}$, $\mathrm{A}_h \equiv \dfrac{\mathrm{T}_h - \mathrm{I}}{h}$, або $\mathrm{A}_0 f \equiv \lim\limits_{h\downarrow 0} \mathrm{A}_h f$, $\mathrm{A}_\phi f \equiv w - \lim\limits_{h\in\varphi\in\phi} \mathrm{A}_h f$,

де ϕ – максимальний фільтр підмножини $\varphi \subset (0,\infty)$, що збігається до 0.

Тут $\sup\limits_{h>0} \| \mathrm{A}_h f \| < \infty$, $\mathrm{A}_\lambda f = \{f - q : q \in L^p\left(R^l, d^l x\right),\ f = w - \lim\limits_{h\in\varphi\in\phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} q, \lambda > 0\}$.

ПОБУДОВА НЕЛІНІЙНОЇ НАПІВГРУПИ СТИСКУ В $L^p\left(R^l, d^l x\right)$. Оператор A, який побудовано вказаним вище способом за оператором, що породжений еліптичним виразом $\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, \nabla u)$, за заданих умов задовольняє умови наступної теореми.

Теорема 5 *(про узагальнену задачу Коші в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$). Узагальнена задача Коші*

$$\frac{d}{dt} u(t) \in \mathrm{A} u(t), \quad u(t) \in L^p(R^l, d^l x), \quad t \in [0, t_0],\ u(0) = u_0,$$

де $\mathrm{A} \equiv -\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p : L^p(R^l, d^l x) \to L^p(R^l, d^l x)$, має при кожному $u_0 \in D(A)$ єдиний слабкий розв'язок.

Доведення. Покажемо, що: $D((\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A})^{-1}) = L^p(R^l, d^l x)$, $\lambda \in (0,1]$. Оскільки $(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A})^{-1}$ – оператор стиску, то операція $(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A})^{-1}$ визначає однозначне відображення. Нехай $u \in L^p(R^l, d^l x)$ – довільний (фіксований) елемент, число $\mu \in (1/2, 1]$. Покладемо $v = (\mathrm{I} - \mu \mathrm{A})^{-1} u$. Тоді $v - \mu \mathrm{A} v = u$. Справджується рівність $v = (\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \left(\dfrac{1}{\mu} u - \dfrac{1-\mu}{\mu} v \right)$.

Розглянемо відображення $\mathrm{E}_u : v \to (\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \left(\dfrac{1}{\mu} u - \dfrac{1-\mu}{\mu} v \right)$. Неважко переконатися, що має місце нерівність $\| \mathrm{E}_u v_1 - \mathrm{E}_u v_2 \| \leq \dfrac{1-\mu}{\mu} \| v_1 - v_2 \|$, звідки випливає, що рівняння $\mathrm{E}_u v = v$ згідно принципу стиску має в просторі $L^p\left(R^l, d^l x\right)$ розв'язок, а отже оператори $(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A})^{-1}$, E_u визначені на $L^p\left(R^l, d^l x\right)$. Аналогічно маємо, що оператор $(\mathrm{I} - \mu^k \mathrm{A})^{-1}$ при кожному $k = 1,2,...$ визначено на $L^p\left(R^l, d^l x\right)$, а отже можна записати $\lambda = \mu^k$ для певних μ і k.

Якщо A – однозначний оператор, то покладемо $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}\left(\mathrm{I} - \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1}$, $n \in N$. У загальному випадку маємо $\mathrm{A}_n : u - \dfrac{1}{n} v \to v$, де $u \in D(\mathrm{A})$, $v \in \mathrm{A} u$.

Дослідимо відображення A_n на однозначність. Нехай $u_1 - \dfrac{v_1}{n} = u_2 - \dfrac{v_2}{n}$, де $v_1 \in \mathrm{A} u_1$, $v_2 \in \mathrm{A} u_2$. Тоді маємо $u_1 = \left(\mathrm{I} - \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1} \left(u_1 - \dfrac{v_1}{n}\right) = \left(\mathrm{I} - \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1} \left(u_2 - \dfrac{v_2}{n}\right) = u_2$. Отже $\left(\mathrm{I} - \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1}$ – однозначне відображення, тобто $v_1 = v_2$. Звідси робимо висновок про те, що оператори A_n – однозначні.

Покажемо, що кожне відображення A_n є дисипативним і генерує нелінійну напівгрупу T_t^n, для якої виконується нерівність $\| \mathrm{A}_n \mathrm{T}_t^n u \| \leq \| \mathrm{A}_n u \|$. Доведемо спочатку дисипативність оператора A_n. Нехай u_1, u_2 – два довільні елементи з $L^p\left(R^l, d^l x\right)$ і $v_1 = \left(\mathrm{I} - \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1} u_1$, $v_2 = \left(\mathrm{I} - \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^{-1} u_2$. Виберемо елементи $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ так, щоб виконувалися умови: $\tilde{v}_1 \in \mathrm{A} v_1$, $\mathrm{A}_n u_1 = \tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2 \in \mathrm{A} v_2$, $\mathrm{A}_n u_2 = \tilde{v}_2$. Тоді виконуються рівності $u_1 = v_1 - \dfrac{\tilde{v}_1}{n}$, $u_2 = v_2 - \dfrac{\tilde{v}_2}{n}$. Перевіримо дисипативність оператора A_n.

Маємо: $\left\langle \mathrm{A}_n u_1 - \mathrm{A}_n u_2, (u_1 - u_2)|u_1 - u_2|^{p-2} \right\rangle = n\|u_1 - u_2\|_p^p - n\left\langle v_1 - v_2, (u_1 - u_2)|u_1 - u_2|^{p-2} \right\rangle \leq 0$, оскільки

$$\left\langle (\mathrm{I} - \mathrm{A})(u_1) - (\mathrm{I} - \mathrm{A})(u_2), (u_1 - u_2)|u_1 - u_2|^{p-2} \right\rangle = \|u_1 - u_2\|_p^p - \left\langle \mathrm{A}(u_1) - \mathrm{A}(u_2), (u_1 - u_2)|u_1 - u_2|^{p-2} \right\rangle \geq \|u_1 - u_2\|_p^p,$$

внаслідок дисипативності оператора A, тобто A_n – дисипативний оператор при кожному $n \in \mathrm{N}$.

Наступні міркування показують, що A_n визначає неперервне і обмежене відображення. Дійсно, маємо:

$$\| \mathrm{A}_n u_1 - \mathrm{A}_n u_2 \|^p \le n^p \| u_1 - u_2 \|^p .$$

Таким чином, задача $\frac{d}{dt}u(t) = \mathrm{A}_n u(t)$, $u(0) = u_0$, $u_0 \in L^p(R^l, d^l x)$ має єдиний розв'язок, який можна записати у вигляді $u_n(t) = \mathrm{T}_t^n u_0$, де T_t^n – напівгрупа стиску. Оскільки $\| \mathrm{T}_h^n u_0 - u_0 \| \ge \| \mathrm{T}_{t+h}^n u_0 - \mathrm{T}_t^n u_0 \|$, то

$$\| \mathrm{A}_n u_0 \| = \| \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(\mathrm{T}_h^n u_0 - u_0) \| \ge \| \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(\mathrm{T}_{t+h}^n u_0 - \mathrm{T}_t^n u_0) \| = \| \mathrm{A}_n \mathrm{T}_t^n u_0 \| .$$

Зафіксуємо довільний елемент $u \in D(\mathrm{A})$ і доведено рівномірну збіжність стосовно t на кожному скінченному інтервалі. Нехай $v \in \mathrm{A}u, u_n = u - \frac{v}{n}, n \in N$. Маємо:

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \| \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n \|^p \, ds = p\int_0^t \left\langle \frac{d}{ds}\mathrm{T}_s^m u_m - \frac{d}{ds}\mathrm{T}_s^n u_n, \left(\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right)\left|\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right|^{p-2} \right\rangle ds =$$

$$= p\int_0^t \left\langle \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n, \left(\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right)\left|\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right|^{p-2} \right\rangle ds =$$

$$= p\int_0^t \left\langle \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n, \left(\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right)^{p-1} \right\rangle \Big|_{\mathrm{T}_s^m u_m \ge \mathrm{T}_s^n u_n} ds + p\int_0^t \left\langle \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n, \left(\mathrm{T}_s^n u_n - \mathrm{T}_s^m u_m\right)^{p-1} \right\rangle \Big|_{\mathrm{T}_s^m u_m < \mathrm{T}_s^n u_n} ds .$$

Оцінимо перший доданок (другий оцінюється аналогічно). Для цього використовуючи нерівності Гельдера і Юнга. Маємо $\left|\left\langle \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n, \left(\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right)^{p-1} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^n u_n + \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^n u_n + \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n, \left(\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right)^{p-1} \right\rangle\right| \le$

$$\le \frac{c(p)}{m}\left\|\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right\| \left(\left\|\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right\|^{p-1} + \left\| \frac{\mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n}{n} - \frac{\mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m}{m} \right\|^{p-1} \right) +$$

$$+ \left\langle \left| \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^n u_n - \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n \right|, \left\| \left(\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n + \frac{\mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n}{n} - \frac{\mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m}{m} \right)^{p-1} \right\| \right\rangle \le$$

$$\le \frac{c(p)}{m}\left\|\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right\|^p + \frac{c(p)}{m}\left\|\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right\|^p \left\|\mathrm{A}\left(u_0\right)\right\|^{p-1}\left(n^{1-p} + m^{1-p}\right) +$$

$$+ c_1(p)\left\|\mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n\right\|^{p-1}\left\|\mathrm{A}\left(u_0\right)\right\| + c_2(p)\left\|\mathrm{A}\left(u_0\right)\right\|^p\left(n^{1-p} + m^{1-p}\right)$$

Зробимо деякі перетворення та оцінки. Оскільки

$$\| \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m \| \le \| \mathrm{A}_m u_m \| = \| v \| , \| \mathrm{A}_n \mathrm{T}_s^n u_n \| \le \| \mathrm{A}_n u_n \| = y , \ \| \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m \| \le \| \mathrm{A} u_0 \| ,$$

$$\left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^m u_m = \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m} \right)\left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m} \right)^{-1} \mathrm{T}_s^m u_m - \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m} \right)^{-1} \mathrm{T}_s^m u_m = -\frac{1}{m}\mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m ,$$

$$\left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{n} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^n u_n = -\frac{\mathrm{A}_n}{n}\mathrm{T}_s^n u_n ,$$

то

$$\left\| \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{m} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^m u_m \right\| = \frac{1}{m} \| \mathrm{A}_m \mathrm{T}_s^m u_m \| \le \frac{1}{m} \| \mathrm{A}_m u_m \| = \frac{\|v\|}{m}, \quad \left\| \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{1}{n}\mathrm{A} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_s^n u_n \right\| \le \frac{\| v \|}{n} .$$

Таким чином отримали оцінку $\frac{d}{ds} \| \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n \|^p \le const\left(p, \left\|\mathrm{A}\left(u_0\right)\right\|\right)\varepsilon(m,n)$, де $\varepsilon(m,n) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$,

а отже $\int_0^t \frac{d}{ds} \| \mathrm{T}_s^m u_m - \mathrm{T}_s^n u_n \|^p \, ds \le const\left(p, \left\|\mathrm{A}\left(u_0\right)\right\|\right)\varepsilon(m,n)t$.

Таким чином при кожному фіксованому $t_0 > 0$ справедлива оцінка:

$$\sup_{t\in[0,t_0]} \| \mathrm{T}_t^m u - \mathrm{T}_t^n u \| \le \sup_{t\in[0,t_0]} (\| \mathrm{T}_t^n u - \mathrm{T}_t^m u_m \| + \| \mathrm{T}_t^n u_n - \mathrm{T}_t^n u \| + \| \mathrm{T}_t^m u_m - \mathrm{T}_t^n u_n \|) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 .$$

Внаслідок повноти простору $L^p\left(R^l, d^l x\right)$ послідовність $\mathrm{T}_t^n u$ збігається рівномірно стосовно t на будь-якому скінченному інтервалі. Згідно нерівності $\| \mathrm{T}_t^n u_1 - \mathrm{T}_t^n u_2 \| \le \| u_1 - u_2 \|$, враховуючи, що послідовність $\mathrm{T}_t^n u_2$ збігається рівномірно (стосовно t) на будь-якому скінченному інтервалі при всіх $u_2 \in D(\mathrm{A})$, маємо, що послідовність $\mathrm{T}_t^n u_1$ збігається рівномірно (стосовно t) на будь-якому скінченному інтервалі при всіх $u_1 \in L^p(R^l, d^l x)$.

Нехай $\mathrm{T}_t u = \lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_t^n u$, де $u \in D(\mathrm{A})$. Покладемо $u_n = u - \frac{1}{n}v$, $v \in \mathrm{A}u$. Покажемо, що T_t – нелінійна напівгрупа, яка задовольняє умову: $\frac{d}{dt}\mathrm{T}_t^n u \in \tilde{\mathrm{A}}\,\mathrm{T}_t^n u$ майже для всіх $t \in [0, t_0]$, де через $\tilde{\mathrm{A}}$ позначено розширення відображення A

згідно описаної вище конструкції. З нерівності $\left\| \left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{n} \right)^{-1} \right) \mathrm{T}_t^n u_n \right\| \le \| v \| \frac{1}{n}$, одержуємо $\left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{n} \right)^{-1} \mathrm{T}_t^n u_n \to \mathrm{T}_t u$, де послідовність збігається рівномірно стосовно t на будь-якому обмеженому інтервалі.

Оскільки множина $\left\{ \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{n} \right)^{-1} \mathrm{T}_t^n u_n : t \in [0, t_0], n = 1, 2, ... \right\}$ обмежена в $L^p(R^l, d^l x)$, то існує підпослідовність $\left\{ \mathrm{A} \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{A}}{n_k} \right)^{-1} \mathrm{T}_t^{n_k} u_{n_k} \right\}$, яка збігається в слабкій σ-топології. Отже $\tilde{\mathrm{A}} \mathrm{T}_t u \in \sigma - \lim \mathrm{A}_{n_k} \mathrm{T}_t^{n_k} u_{n_k}$.

Послідовність $\mathrm{A}_n \mathrm{T}_t^n u_n = \frac{d}{dt} \mathrm{T}_t^n u_n$ прямує до елемента $\frac{d}{dt} \mathrm{T}_t^n u$ в топології $L^p(R^l, d^l x)$ -значних нескінченно диференційовних функцій, що визначені на проміжку $(0, t_0)$. Позначимо цей простір через $D_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$, а через σ_1-топологію $\sigma_1 \equiv \sigma(L_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t], D_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t])$. Ця топологія є слабкою топологією в $L_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$ відносно $D_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$. Очевидно, що $\sigma_1 < \sigma$ в топологічному сенсі, а отже $\frac{d}{dt} \mathrm{T}_t u \in \sigma_1 - \lim_{n \to \infty} \mathrm{A}_{n_k} \mathrm{T}_t^{n_k} u_{n_k} \in \tilde{\mathrm{A}} \mathrm{T}_t u$. Теорему 5 доведено.

Теорема 6 *(аналог теореми Хілле-Іосіди-Філліпса). Нехай* T_t *– нелінійна напівгрупа стиску,* A_0 *– щільно визначений локальний генератор. Тоді* A_0 *має розширення* A *, яке генерує нелінійну напівгрупу стиску* T_t^* *, причому напівгрупи* T_t *і* T_t^* *співпадають.*

Ця теорема є наслідком теорем 4, 5.

ВИСНОВКИ. Розглянуто еліптичне рівняння спеціального вигляду в просторі $W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$, введено звуження відповідних операторів на $L^p\left(R^l, d^l x\right)$, описано деякі топологічні конструкції в $L_{L^p(R^l, d^l x)}([0, t])$, завдяки яким доведено аналоги теорем Хілле-Іосіди-Філіпса, тобто показано, що оператори, які визначаються еліптичним рівнянням спеціального вигляду, насправді є локальними генераторами напівтруп. Розглянуто узагальнену задачу Коші для нелінійного еволюційного рівняння і доведено її однозначну розв'язність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дубинский Ю.А. Нелинейные параболические и эллиптические уравнения / Ю.А. Дубинский // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1976. – Т. 9. – С. 5–130. 2. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с. 3. Кухарчук М.М., Яременко М.І. Про розв'язність квазілінійного рівняння з матрицею Гільберга-Серріна в R^l і побудову нелінійних напівгруп стиску в $L^2(R^l, d^l x)$ / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Вісник національного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць. Рівне. – 2008. – Вип. 1(41). – С. 435–443. 4. Кухарчук М.М., Яременко М.І. Розв'язність квазілінійного еліптичного рівняння з матрицею Гільберга – Серріна в просторах Соболева / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – №4. – С. 142–154. 5. Кухарчук М.М., Яременко М.І. Про гладкість розв'язків деяких квазілінійних еліптичних рівняннянь / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико–математичні науки. – 2008. – №4. – С. 67–71. 6. Komura Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 493–507. 7. Kato T. Nonlinear semi-groups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375–402. 8. Minty G. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space / G. Minty // Duke Math. J. – 1962. – V. 29. – P. 341–346.

Надійшла до редколегії 04.12.12

М. Яременко, канд. физ.-мат. наук., мл. научн. сотр.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА С НЕПРЕРЫВНОЙ МАТРИЦЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Рассмотрено эллиптическое уравнение специального типа в пространстве Соболева, введено сужение соответствующих операторов на пространствах Лебега, описаны некоторые топологические конструкции в $L_{L^p(R^l, d^l x)}([0, t])$***, благодаря которым доказаны аналоги теорем Хилле-Иосиды-Филлипса.***

N.Yaremenko, PhD

CAUCHY PROBLEM FOR THE EVOLUTION EQUATION WITH CONTINUOUS MATRIX IN LEBESQUE SPACES

There is considered elliptic equation of special type in space of Sobolev, restriction on spaces of Lebesque the relevant operators, described some possible topological structures in $L_{L^p(R^l, d^l x)}([0, t])$ ***, by means of which analogues of Hille-Iosidy-Phillips theorems are proved.***

УДК 519.21

Г. Верьовкіна, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, м.Київ
Email: ganna.verov@gmail.com

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ЗОБРАЖЕННЯ ПЕВНИХ КЛАСІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Досліджуються інтерполяційні зображення певних класів випадкових процесів за нерівновіддаленими вузлами інтерполяції.

ВСТУП. Досліджуються інтерполяційні зображення деяких класів випадкових процесів на площині з нерівновіддаленими вузлами інтерполяції. Отримано інтерполяційну формулу, в якій використовується значення процесу та його похідних в вузлах інтерполяції. Доведено збіжність відповідного інтерполяційного ряду до випадкового процесу