во-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 17. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. 18. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. 19. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К.Дж. Трантер. – М.: Гостехтеориздат., 1956. 20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 15.04.13

А. Громик, канд. техн. наук, препод.,
И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Методом интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений построены точные аналитические решения гиперболических краевых задач в кусочно-однородном полом цилиндре.

A. Gromyk, PhD (eng) I. Konet, Full Doctor

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM IN PIECEWISE HOMOGENEOUS POROŽNISTOMU CYLINDER

The method of integral transforms in combination with the method of principal solutions the exact analytical solutions of hyperbolic boundary value problems in piecewise homogeneous hollow cylinder.

УДК 519.21

В. Васькович, студ.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: v.v.vaskovych@gmail.com

ЦІНИ АЗІЙСЬКОГО ОПЦІОНУ ТА ЇХ ЗБІЖНІСТЬ ВІДНОСНО ПАРАМЕТРІВ

Розглянуто модель ринку цінних паперів і азійський опціон в ній. Вирахувано справедливу і об'єктивну ціни даного опціону і досліджено об'єктивної ціну на збіжність відносно параметрів та її порядок.

ВСТУП. Азійський опціон – це різновидність опціону, при якому ціна виконання залежить від середнього значення активу за період. Розглянемо модель ринку, в якій ціна активу в момент часу s дорівнює $xe^{\mu s+\beta W_s}$, де $x>0$, а W – вінерівський процес. Отже, прибуток від цього опціону в момент T визначається як $(Y-K)^+$, де Y – середнє дисконтоване значення ціни активу за період (це середнє ми будемо шукати як середнє арифметичне), а $K\geq 0$ – фіксована страйкова ціна, яка визначається в момент заключення контракту. Об'єктивною ціною в такому випадку буде математичне сподівання від нашого прибутку. Очевидно, що вона буде залежати від параметрів μ та β. З метою технічного спрощення далі всюди вважатимемо, що $x=1$.

ЦІНА ОПЦІОНУ. Як зазначено вище об'єктивною ціною азійського опціону буде математичне сподівання від $(Y-K)^+$, де Y – випадкова величина, що дорівнює $Y=\frac{1}{T}\int_0^T e^{\mu s+\beta W_s}ds$. Для того, щоб знайти справедливу ціну даного азійського опціону, в Y потрібно μ замінити на $-\frac{\beta^2}{2}$, тобто знайти $\mathrm{E}(X-K)^+$, де $X=\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{\beta^2}{2}s+\beta W_s}ds$.

З [2] відомо, що щільність розподілу випадкової величини $\int_0^T e^{2\delta\eta s+2\delta W_s}ds$ в точці $y>0$ дорівнює

$$\mathrm{Q}(y,\eta,\delta)=\frac{\sqrt{2}\,|\delta|\left(2\delta^2 y\right)^{\frac{\eta}{2\delta}}}{\sqrt{y}}e^{\frac{-\eta^2 t}{2}-\frac{1}{4\delta^2 y}}\,\mathrm{m}_{2\delta^2 t}\left(\frac{\eta}{2\delta}-\frac{1}{2},\frac{1}{4\delta^2 y}\right),\ \frac{\eta}{2\delta}>-1.$$

Тут $\mathrm{m}_y(x,z)=\dfrac{8z^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(x+\frac{3}{2}\right)e^{\frac{\pi^2}{4y}}}{\pi\sqrt{2\pi y}}\displaystyle\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{ch}(2u)-\frac{u^2}{y}}\,\mathrm{M}\left(-x,\frac{3}{2},2z\,\mathrm{sh}^2(u)\right)\mathrm{sh}(2u)\sin\left(\frac{\pi u}{y}\right)du,$

а функція $\mathrm{M}(a,b,x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a+1}{b+1}\right)\cdots\left(\frac{a+k-1}{b+k-1}\right)\frac{x^k}{k!}.$

Таким чином, щільність розподілу випадкової величини $\frac{1}{T}\int_0^T e^{\mu s+\beta W_s}ds$ в точці $y>0$ дорівнює

$$\mathrm{P}(y,\mu,\beta)=\mathrm{Q}\left(y,\frac{\mu}{\beta},\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{2}|\beta|\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}e^{\frac{-\mu^2 T}{2\beta^2}-\frac{1}{\beta^2 Ty}}\frac{\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi\sqrt{\pi T}}\times\left(\int_0^\infty e^{\frac{-ch(2u)}{\beta^2 Ty}-\frac{2u^2}{\beta^2 T}}\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2 Ty}\right)\mathrm{sh}(2u)\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right)du\right),\ \frac{\mu}{\beta^2}>-1.$$

Тоді знаходимо

$$\mathrm{E}(Y-K)^+=\int_K^\infty(y-K)\sqrt{2}|\beta|\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}e^{\frac{-\mu^2 T}{2\beta^2}-\frac{1}{\beta^2 Ty}}\frac{\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi\sqrt{\pi T}}\times$$
$$\times\left(\int_0^\infty e^{\frac{-ch(2u)}{\beta^2 Ty}-\frac{2u^2}{\beta^2 T}}M\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2sh^2(u)}{\beta^2 Ty}\right)\mathrm{sh}(2u)\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right)du\right)dy.$$

Це і є об'єктивною ціною азійського опціону в нашій моделі. Справедлива ціна цього ж опціону дорівнює $\mathrm{E}(X-K)^{+}=\int_K^{\infty}(y-K)\mathrm{P}\left(y,-\frac{\beta^2}{2},\beta\right)dy$.

ЗБІЖНІСТЬ ОБ'ЄКТИВНОЇ ЦІНИ ВІДНОСНО μ . Об'єктивна ціна опціону – це величина, яка залежить від двох параметрів: μ і β. Позначимо $\mathrm{E}(Y-K)^{+}=\mathrm{F}(\mu,\beta)$. Так як β –коефіцієнт при вінерівському процесі, то можемо вважати, що $\beta>0$. Також приустимо, що $\mu<0$. Нехай в нас β фіксоване. Дослідимо $\mathrm{F}(\mu,\beta)$ на збіжність відносно μ .

Оскільки $|abcd-a_nb_nc_nd_n|\le|a-a_n||bcd|+|a_n||b-b_n||cd|+|a_n||b_n||c-c_n||d|+|a_n||b_n||c_n||d-d_n|$, то

$$|\mathrm{F}(\mu,\beta)-\mathrm{F}(\mu_n,\beta)|=\left|\int_K^{\infty}(y-K)\mathrm{P}\left(y,\mu,\beta\right)dy-\int_K^{\infty}(y-K)\mathrm{P}\left(y,\mu_n,\beta\right)dy\right|\le$$

$$\le\int_K^{\infty}\int_0^{\infty}\left|(y-K)\sqrt{2}\,|\beta|\,e^{-\frac{1}{\beta^2Ty}}\frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2T}}}{\pi\sqrt{\pi T}}e^{\frac{-ch(2u)}{\beta^2Ty}-\frac{2u^2}{\beta^2T}}\mathrm{sh}(2u)\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2T}\right)\right|\times$$

$$\times\left(\left|\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}-\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2}-2}\right|\left|e^{\frac{-\mu^2T}{2\beta^2}}\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)\right|+\right.$$

$$+\left|\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2}-2}\right|\left|e^{\frac{-\mu^2T}{2\beta^2}}-e^{\frac{-\mu_n^2T}{2\beta^2}}\right|\left|\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)\right|+$$

$$+\left|\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2}-2}\right|e^{\frac{-\mu_n^2T}{2\beta^2}}\left|\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]-\Gamma\left[\frac{\mu_n}{\beta^2}+1\right]\right|\left|\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)\right|+$$

$$\left.+e^{\frac{-\mu_n^2T}{2\beta^2}}\left|\left(2\beta^2Ty\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2}-2}\right|\left|\Gamma\left[\frac{\mu_n}{\beta^2}+1\right]\right|\left|\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)-M\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)\right|\right).$$

Оцінимо $\left|\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}-\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2}-2}\right|$, $\left|e^{\frac{-\mu^2T}{2\beta^2}}-e^{\frac{-\mu_n^2T}{2\beta^2}}\right|$, $\left|\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]-\Gamma\left[\frac{\mu_n}{\beta^2}+1\right]\right|$ і $\left|\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)-\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)\right|$.

Функції $\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}$, $e^{\frac{-\mu^2T}{2\beta^2}}$ і $\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]$ неперервні та диференційовані за μ на півінтервалі $\left(-\beta^2,0\right)$. Згідно з умовою $0>\frac{\mu}{\beta^2}>-1$, μ належить саме цьому півінтервалу. Отже, можна застосувати теорему Лагранжа про середнє значення. Також без втрати загальності вважатимемо, що $\frac{\beta^2TK}{2}\ge1$, отже для довільного $y\ge K$ маємо $\frac{\beta^2Ty}{2}\ge1$.

Отже існують такі a,b,c які лежать між μ_n та μ такі, що

$$\left|\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}-\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2}-2}\right|=\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{a}{\beta^2}-2}\ln\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)|\mu-\mu_n|\le\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}\ln\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)|\mu-\mu_n|,$$

$$\left|e^{\frac{-\mu^2T}{2\beta^2}}-e^{\frac{-\mu_n^2T}{2\beta^2}}\right|=e^{\frac{-b^2T}{2}}\left|\frac{bT}{\beta^2}\right||\mu-\mu_n|\le\frac{T}{\beta^2}\left(|\,\mu\,|+|\mu-\mu_n|\right)|\mu-\mu_n|,$$

$$\left|\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]-\Gamma\left[\frac{\mu_n}{\beta^2}+1\right]\right|=\frac{1}{\beta^2}\,|\,\mu-\mu_n\,|\int_0^{\infty}x^ce^{-x}\ln(x)dx\le\frac{1}{\beta^2}\Gamma'\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right]|\mu-\mu_n|,$$

$$\left|\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)-\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\right)\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1}\right)\cdots\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+k}\right)\frac{\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)^k}{k!}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\right)\right|.$$

Оскільки

$$\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\right|\le$$

$$\le \left|\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\right|\left|\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right|\left|\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\right|\le$$

$$\le\left|\frac{\mu-\mu_n}{\beta^2}\right|\left|\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\right|+\left(\frac{1}{2}+1\right)\left|\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\right|\left|\left(\frac{5}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\right|+$$

$$+\left(\frac{1}{2}+1\right)\left|\frac{3}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right|\left|\left(\frac{5}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu_n}{\beta^2}\right)\right|\le\cdots\le\left|\frac{\mu-\mu_n}{\beta^2}\right|\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{2}{3}\right)+$$

$$+\left|\frac{\mu-\mu_n}{\beta^2}\right|\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{2}{5}\right)+\cdots+\left|\frac{\mu-\mu_n}{\beta^2}\right|\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{2}{2k+1}\right),$$

і $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)^{k-1}}{(k-1)!}=e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}}$ та $\sum_{n=1}^{k}\frac{2}{2n+1}\le k$,

то $$\left|\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)-\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_n}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)^{k}}{k!}\left|\frac{\mu-\mu_n}{\beta^2}\right|\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{2}{2n+1}\right)\right)\le\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}}.$$

Таким чином, підставивши всі різниці і замінивши $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)$ на $e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}}$, отримуємо:

$$\left|\mathrm{F}(\mu,\beta)-\mathrm{F}(\mu_n,\beta)\right|\le\int_K^{\infty}\int_0^{\infty}\left|(y-K)\sqrt{2}\,|\beta|\,e^{-\frac{1}{\beta^2Ty}}\frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2T}}}{\pi\sqrt{\pi T}}e^{\frac{-\mathrm{ch}(2u)}{\beta^2Ty}-\frac{2u^2}{\beta^2T}}\mathrm{sh}(2u)\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2T}\right)\right|\times$$

$$\times\left(|\mu-\mu_n|\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}\ln\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}}+|\mu-\mu_n|\frac{T}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}\left(|\,\mu\,|+|\mu-\mu_n|\right)\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}}+\right.$$

$$\left.+|\mu-\mu_n|\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}}\Gamma'\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right]+|\mu-\mu_n|\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\Gamma\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right]e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}}\right)dudy.$$

Так як $\frac{-\mathrm{ch}(2u)}{\beta^2Ty}+\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}=\frac{-e^{2u}-e^{-2u}}{2\beta^2Ty}+\frac{e^{2u}-2+e^{-2u}}{2\beta^2Ty}=\frac{-1}{\beta^2Ty}$, то $e^{\frac{-\mathrm{ch}(2u)}{\beta^2Ty}-\frac{2u^2}{\beta^2T}+\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}-\frac{1}{\beta^2Ty}}\le e^{-\frac{2u^2}{\beta^2T}-\frac{2}{\beta^2Ty}}\le e^{-\frac{2u^2}{\beta^2T}}$. Отримуємо:

$$\left|\mathrm{F}(\mu,\beta)-\mathrm{F}(\mu_n,\beta)\right|\le\sqrt{2}\,|\beta|\,|\mu-\mu_n|\frac{1}{\beta^2}\frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2T}}}{\pi\sqrt{\pi T}}\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]\left(\int_K^{\infty}(y-K)\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}\ln\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)dy\right)\left(\int_0^{\infty}\left|e^{-\frac{2u^2}{\beta^2T}}\mathrm{sh}(2u)\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2T}\right)\right|du\right)+$$

$$+\sqrt{2}\,|\beta|\,|\mu-\mu_n|\frac{T}{\beta^2}\frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2T}}}{\pi\sqrt{\pi T}}\left(|\,\mu\,|+|\mu-\mu_n|\right)\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]\int_K^{\infty}(y-K)\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}dy\int_0^{\infty}\left|e^{-\frac{2u^2}{\beta^2T}}\mathrm{sh}(2u)\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2T}\right)\right|du+$$

$$+\sqrt{2}\,|\beta|\,|\mu-\mu_n|\frac{1}{\beta^2}\frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2T}}}{\pi\sqrt{\pi T}}\Gamma'\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right]\int_K^{\infty}(y-K)\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}dy\int_0^{\infty}\left|e^{-\frac{2u^2}{\beta^2T}}\mathrm{sh}(2u)\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2T}\right)\right|du+$$

$$+\sqrt{2}\,|\beta|\,|\mu-\mu_n|\frac{1}{\beta^2}\frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2T}}}{\pi\sqrt{\pi T}}\Gamma\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right]\int_K^{\infty}(y-K)\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-3}\int_0^{\infty}\left|e^{-\frac{2u^2}{\beta^2T}}\mathrm{sh}(2u)\,\mathrm{sh}^2(u)\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2T}\right)\right|dudy=|\mu-\mu_n|\,\mathrm{G}(\mu_n,\beta).$$

Оскільки $$\int_K^{\infty}(y-K)y^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}dy=\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-\beta^2}K^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}}-\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|}K^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}}\to\frac{\beta^2}{\mu-\beta^2}K^{\frac{\mu}{\beta^2}}-\frac{\beta^2}{\mu}K^{\frac{\mu}{\beta^2}},$$

$$\int_K^{\infty}(y-K)y^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-3}dy=\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-2\beta^2}K^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-1}-\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-\beta^2}K^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-1}\to\frac{\beta^2}{\mu-2\beta^2}K^{\frac{\mu}{\beta^2}-1}-\frac{\beta^2}{\mu-\beta^2}K^{\frac{\mu}{\beta^2}-1},$$

$$\int_K^{\infty}(y-K)y^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}\ln\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)dy=\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-\beta^2}K^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}}\ln\left(\frac{\beta^2TK}{2}\right)-\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|}K^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}}\ln\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-\beta^2}\right)^2K^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}}-\left(\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|}\right)^2K^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}}\to\frac{\beta^2}{\mu-\beta^2}K^{\frac{\mu}{\beta^2}}\ln\left(\frac{\beta^2TK}{2}\right)-\frac{\beta^2}{\mu}K^{\frac{\mu}{\beta^2}}\ln\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{\beta^2}{\mu-\beta^2}\right)^2 K^{\frac{\mu}{\beta^2}}-\left(\frac{\beta^2}{\mu}\right)^2 K^{\frac{\mu}{\beta^2}},\ \left(\frac{\beta^2 T}{2}\right)^{\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2}\to\left(\frac{\beta^2 T}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2},\quad \Gamma'\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right]\to\Gamma'\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right],$$

$$\Gamma\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right]\to\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]\quad \text{при}\quad \mu_n\to\mu,$$

то $G(\mu_n,\beta)\to G(\mu,\beta)=const\neq 0$, $\mu_n\to\mu$. Отже $F(\mu_n,\beta)\to F(\mu,\beta)$ з порядком збіжності $|\mu-\mu_n|$ в області $\left\{\mu:-1<\frac{\mu}{\beta^2}<0\right\}$.

ЗБІЖНІСТЬ ВІДНОСНО β. Зафіксуємо μ і дослідимо $F(\mu,\beta)$ на збіжність за β. Випадок, коли μ фіксоване, досліджується аналогічно. Припустимо, що $\beta>0$ і $\mu<0$. Відомо, що

$$|abcde-a_nb_nc_nd_ne_n|\le|a-a_n||bcde|+|a_n|\Big(|b-b_n||cde|+|b_n|\big(|c-c_n||d_ne_n|+|c|\big(|d-d_n||e|+|d_n||e-e_n|\big)\big)\Big).$$

Також врахуємо, що $e^x\le 1$ при $x\le 0$ і $M\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2 Ty}\right)\le e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2 Ty}}$.

Отже,

$$|F(\mu,\beta)-F(\mu,\beta_n)|\le\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi T}}\int_K^\infty\int_0^\infty(y-K)\,\mathrm{sh}(2u)\left(\beta\left|\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right)-\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta_n^2 T}\right)\right|\left|\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]e^{\frac{\pi^2-4u^2}{2\beta^2 T}}\right|+\right.$$

$$+\left|\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta_n^2 T}\right)\right|\left(|\beta-\beta_n|\left|\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}e^{\frac{\pi^2-4u^2}{2\beta^2 T}}\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]\right|+\beta_n\left(\left|\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]-\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}+1\right]\right|\left|\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}e^{\frac{\pi^2-4u^2}{2\beta^2 T}}\right.\right.\right.+\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}+1\right]\times$$

$$\left(e^{-\frac{4u^2}{2\beta_n^{\,2}T}}\left|e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}-e^{\frac{\pi^2}{2\beta_n^{\,2}T}}\left(\frac{\beta_n^{\,2}Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}-2}\right|+e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}\left(e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2 Ty}}\left|e^{\frac{-\mu^2 T}{2\beta^2}-\frac{\mathrm{ch}(2u)+1}{\beta^2 Ty}-\frac{4u^2}{2\beta^2 T}}-e^{\frac{-\mu^2 T}{2\beta_n^{\,2}}-\frac{\mathrm{ch}(2u)+1}{\beta_n^{\,2}Ty}-\frac{4u^2}{2\beta_n^{\,2}T}}\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+e^{-\frac{\mathrm{ch}(2u)+1}{\beta_n^{\,2}Ty}-\frac{4u^2}{2\beta_n^{\,2}T}}\left|M\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2 Ty}\right)-M\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)\right|\right)\right)\right)\right)dudy.$$

Функції $\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right)$, $\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]$, $\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}$, $e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}$, $e^{\frac{-\mu^2 T}{2\beta^2}-\frac{\mathrm{ch}(2u)+1}{\beta^2 Ty}-\frac{4u^2}{2\beta^2 T}}$ і $\forall k\in\mathbb{Z}$ $\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2 Ty}\right)^k$ неперервні і диференційовані за β на пів-інтервалі $\left(\sqrt{-\mu},\infty\right)$. З накладених спочатку умов на β випливає, що $0<\frac{1}{\beta^2}<\frac{-1}{\mu}$. Отже, можна застосувати теорему Лагранжа про середнє значення. Отже існують такі величини λ,α,ν які лежать між β_n та β, що:

$$\left|\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right)-\sin\left(\frac{2\pi u}{\beta_n^2 T}\right)\right|=\frac{4\pi u}{\lambda^3 T}\left|\cos\left(\frac{2\pi u}{\lambda^2 T}\right)\right|\le\frac{2\pi u}{|\mu|^{\frac{3}{2}}T}|\beta-\beta_n|,$$

$$\left|\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2 Ty}\right)^k-\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k\right|=\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{Ty}\right)^k\left|\left(\frac{1}{\beta^2}\right)^k-\left(\frac{1}{\beta_n^{\,2}}\right)^k\right|\le 2k\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{Ty}\right)^k\frac{1}{|\mu|^{\frac{2k+1}{2}}}|\beta-\beta_n|.$$

На інтервалі $(0,1)$ функція $\left|\Gamma'[x]\right|$ обмежена деякою сталою $C=const$, отже

$$\left|\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]-\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}+1\right]\right|\le 2\left|\Gamma'\left[\frac{\mu}{\alpha^2}+1\right]\right|\left|\frac{\mu}{\alpha^3}\right||\beta-\beta_n|\le C|\beta-\beta_n|\left|\frac{1}{\sqrt{-\mu}}\right|.$$

$$\left|e^{\frac{-\mu^2 T}{2\beta^2}-\frac{\mathrm{ch}(2u)+1}{\beta^2 Ty}-\frac{4u^2}{2\beta^2 T}}-e^{\frac{-\mu^2 T}{2\beta_n^{\,2}}-\frac{\mathrm{ch}(2u)+1}{\beta_n^{\,2}Ty}-\frac{4u^2}{2\beta_n^{\,2}T}}\right|\le|\beta-\beta_n|\frac{1}{|\mu|^{\frac{3}{2}}}\left|\frac{\mu^2 T}{2}+\frac{1+\mathrm{ch}(2u)}{Ty}+\frac{2u^2}{T}\right|e^{\frac{\mathrm{ch}(2u)}{\mu Ty}+\frac{4u^2}{2\mu T}}.$$

$$\left|e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}-e^{\frac{\pi^2}{2\beta_n^{\,2}T}}\left(\frac{\beta_n^{\,2}Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}-2}\right|\le\left|e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}-e^{\frac{\pi^2}{2\beta_n^{\,2}T}}\right|\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}+e^{\frac{\pi^2}{2\beta_n^{\,2}T}}\left|\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}-\left(\frac{\beta_n^{\,2}Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}-2}\right|\le$$

$$e^{\frac{-\pi^2}{2\mu T}}\frac{\pi^2}{2|\mu|^{\frac{3}{2}}T}\left(\frac{\beta^2 Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}|\beta-\beta_n|+e^{\frac{-\pi^2}{2\mu T}}\left(\frac{\nu^2 T}{2}\right)^{\frac{\mu}{\nu^2}-2}y^{\frac{\mu}{\nu^2}-2}\frac{2T}{\nu^3}\left|\left(-2\nu^2+\mu-\mu\ln\left(\frac{\nu^2 T}{2}\right)-\mu\ln(y)\right)\right||\beta-\beta_n|.$$

Крім того,

$$\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2 Ty}\right)^k-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k\right|\le$$

$$\le\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\right|\left|\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right|\left|\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}^2(u)}{2\beta^2Ty}\right)^k-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}^2(u)}{2\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k\right|\le\left|\frac{\mu}{\beta^2}\right|\left|\frac{\beta^2-\beta_n^{\,2}}{\beta_n^{\,2}}\right|\left|\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k\right|+\left(\frac{1}{2}+1\right)\left|\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\right|\left|\left(\frac{5}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k\right|+\left(\frac{1}{2}+1\right)\left|\frac{3}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right|\left|\left(\frac{5}{2}-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta^2}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)^k-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{5}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k\right|\le\cdots\le|\beta-\beta_n|\left|\frac{\beta+\beta_n}{\beta^2}\right|\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k+|\beta-\beta_n|\left|\frac{\beta+\beta_n}{\beta^2}\right|\times$$

$$\times\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k+\cdots+|\beta-\beta_n|\left|\frac{\beta+\beta_n}{\beta^2}\right|\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{2}{2k+1}\right)\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k+$$

$$+\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k\right)\left|\left(\frac{\mathrm{sh}^2(u)}{2\beta^2Ty}\right)^k-\left(\frac{\mathrm{sh}^2(u)}{2\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k\right|.$$

Звідси випливає, що

$$\left|\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta^2},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)-\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}},\frac{3}{2},\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(|\beta-\beta_n|\left|\frac{\beta+\beta_n}{\beta^2}\right|\frac{\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k}{k!}\sum_{n=1}^{k}\frac{2}{2n+1}+\frac{\left|\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta^2Ty}\right)^k-\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}\right)^k\right|}{k!}\right)\le$$

$$\le|\beta-\beta_n|\left|\frac{\beta+\beta_n}{\beta^2}\right|\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{\beta_n^{\,2}Ty}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k-1)!}\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{Ty}\right)^k\frac{1}{|\mu|^{\frac{2k+1}{2}}}|\beta-\beta_n|\le$$

$$\le|\beta-\beta_n|\left|\frac{\beta+\beta_n}{\beta^2}\right|\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{|\mu|Ty}e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{|\mu|Ty}}+2\left|\frac{\beta-\beta_n}{\sqrt{-\mu}}\right|\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{|\mu|Ty}e^{\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{|\mu|Ty}}.$$

Таким чином,

$$|\mathrm{F}(\mu,\beta)-\mathrm{F}(\mu,\beta_n)|\le\frac{2\sqrt{2}}{T\sqrt{|\mu|^3\pi T}}|\beta-\beta_n|\,|\beta|\,\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]\left(\int_K^{\infty}(y-K)\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}dy\right)\left(\int_0^{\infty}ue^{\frac{\pi^2-4u^2}{2\beta^2T}}\,\mathrm{sh}(2u)du\right)+$$

$$+|\beta-\beta_n|\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi T}}\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right]\left(\int_K^{\infty}(y-K)\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}dy\right)\left(\int_0^{\infty}e^{\frac{\pi^2-4u^2}{2\beta^2T}}\,\mathrm{sh}(2u)du\right)+|\beta-\beta_n|\left|\frac{C}{\sqrt{-\mu}}\right|\frac{\beta_n\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi T}}\left(\int_K^{\infty}(y-K)\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}dy\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^{\infty}e^{\frac{\pi^2-4u^2}{2\beta^2T}}\,\mathrm{sh}(2u)du\right)+|\beta-\beta_n|\frac{\beta_n\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi T}}\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}+1\right]\left(\int_0^{\infty}\mathrm{sh}(2u)e^{\frac{4u^2-\pi}{2\mu T}}du\right)\times$$

$$\times\int_K^{\infty}(y-K)\left(e^{\frac{-\pi^2}{2\mu T}}\frac{\pi^2}{2|\mu|^{\frac{3}{2}}T}\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}+e^{\frac{-\pi^2}{2\mu T}}\left(\frac{\nu^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\nu^2}-2}\frac{2T}{\nu^3}\left|\left(-2\nu^2+\mu-\mu\ln\left(\frac{\nu^2T}{2}\right)-\mu\ln(y)\right)\right|\right)dy+$$

$$+|\beta-\beta_n|\frac{\beta_n\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi T}}\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta_n^{\,2}}+1\right]e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2T}}\left(\left|\frac{\beta+\beta_n}{\beta^2}\right|+2\left|\frac{1}{\sqrt{-\mu}}\right|\right)\left(\int_K^{\infty}\frac{(y-K)}{y}\left(\frac{\beta^2Ty}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2}-2}dy\right)\left(\int_0^{\infty}\frac{2\,\mathrm{sh}^2(u)}{|\mu|T}\mathrm{sh}(2u)e^{-\frac{4u^2}{2|\mu|T}}du\right)=|\beta-\beta_n|\mathrm{R}(\mu,\beta_n)$$

Аналогічно випадку з фіксованим β легко показати, що $\mathrm{R}(\mu,\beta_n)\to\mathrm{R}(\mu,\beta)=const\ne 0$ при $\beta_n\to\beta$. Отже, $\mathrm{F}(\mu,\beta_n)\to\mathrm{F}(\mu,\beta)$ з порядком збіжності $|\beta-\beta_n|$.

ВИСНОВКИ. Знайдено оптимальну і справедливу ціни азійського опціону і показано, що об'єктивна ціна азійського опціону в даній моделі збігається за параметрами μ та β на проміжку $\left\{-1<\frac{\mu}{\beta^2}<0\right\}$ з порядком збіжності $|\mu-\mu_n|$ та $|\beta-\beta_n|$ відповідно.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1.Фельмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время – МЦНМ – 2008 2.Borodin A., Salminen P. Handbook of Brownian motion:Facts and Formulate-Birkhäuser Verlag – 2002.

Надійшла до редколегії 05.11.12

В. Васькович, студ.

ЦЕНЫ АЗИАТСКОГО ОПЦИОНА И ИХ СХОДИМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрена модель рынка ценных бумаг и азиатский опцион в ней. Вычислена справедливая и объективна цена данного опциона и исследована объективная цена на сходимость относительно параметров и ее порядок.

V.Vaskovych, BA

PRICES OF ASIAN OPTION AND ITS CONVERGENCE RELATIVE PARAMETERS

Model of the securities market and the Asian option in it are discussed. There are calculated fair and objective price for this option, and are researched objective price convergence relative parameters and its rank.

УДК 519.21

З. Вижва, докт. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка
Email: vsa@univ.kiev.ua

ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ У ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглянуто задачу про статистичне моделювання реалізацій однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному евклідовому просторі на основі їх спектрального розкладу. Наведено спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій таких випадкових полів. Отримано середньоквадратичну оцінку апроксимації цих випадкових полів частковими сумами ряду. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій гауссівських однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі з використанням спектральних коефіцієнтів.

ВСТУП. Методи чисельного моделювання (методи Монте-Карло) випадкових процесів та полів у зв'язку із стрімким розвитком комп'ютерної техніки мають широкий діапазон застосування, зокрема це стосується таких напрямків природничих наук, як геологія, геофізика, сейсмологія, метеорологія, океанографія, радіотехніка, статистична радіофізика, ядерна фізика, та інші. За допомогою методів статистичного моделювання можна згенерувати на комп'ютері реалізації випадкових процесів та полів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію.

У статті вивчаються дійснозначні випадкові поля у просторіR^3, які однорідні ізотропні та неперервні в середньому квадратичному. Наведено теорему про спектральний розклад таких полів. Отримано оцінку середньоквадратичної апроксимації випадкових полів у тривимірному просторі моделлю, побудованою на основі спектрального розкладу. Наведено обчислені спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій випадкових полів у просторіR^3. Розроблено алгоритм статистичного моделювання реалізацій однорідних ізотропних гауссівських випадкових полів із заданими статистичними характеристиками з використанням спектральних коефіцієнтів .

Запропонований у цій статті метод чисельного моделювання однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі є узагальненням такого методу для однорідних випадкових полів на сфері в 3-вимірному евклідовому просторі [5, 14], однорідних ізотропних випадкових полів на площині [4] та стаціонарних періодичних випадкових процесів [3]. Метод статистичного моделювання однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі з використанням спектральних коефіцієнтів доповнює перелік інших розроблених методів чисельного моделювання таких полів, зокрема методу рандомізації [13] та з використанням деякого вигляду розкладу випадкового поля [9].

Методи статистичного моделювання випадкових полів у тривимірному просторі на основі розкладів в ряди розглядалися також в [6, 7, 10–12] та ін.

ОДНОРІДНЕ ТА ІЗОТРОПНЕ ВИПАДКОВЕ ПОЛЕ В ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ R^3 ТА ЙОГО ЗВУЖЕННЯ НА СФЕРУ. Розглядається дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле $\xi(r,\theta,\varphi)$ в тривимірному евклідовому просторі R^3 (r,θ,φ – полярні координати). Відомо [5], що неперервне в середньому квадратичному дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле $\xi(r,\theta,\varphi)$ в просторі R^3 можна подати у вигляді розкладу в ряд за сферичними гармоніками, який називається спектральним розкладом такого випадкового поля:

$$\xi(r,\theta,\varphi) = c_3 \sum_{m=o}^{\infty} \sum_{l=-m}^{m} \varsigma_m^l(r)\; S_m^l(\theta,\varphi),$$

де $c_3=\sqrt{2}\pi$, $\varsigma_m^l(r) = \int\limits_0^\infty \frac{J_{m+\frac12}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac12}}\, Z_m^l(d\lambda)$, причому, $\{Z_m^l(.)\}$ – послідовність ортогональних випадкових мір на борелівських множинах із інтервалу $[0,+\infty)$, таких, що $\mathrm{M}\, Z_m^l(S_1)\, Z_{m'}^{l''}(S_2) = \delta_l^{l'}\, \delta_m^{m'}\, \Phi(S_1\cap S_2)$,

де $\Phi(\lambda)$– неспадна обмежена функція, яку називають спектральною функцією, а сферичні гармоніки $S_m^l(x)$ мають вигляд $S_m^l(\theta,\varphi) = \tilde{c}_{m,l}\, P_m^{|l|}(\cos\theta)\; e^{i\,l\,\varphi}$, де $P_m^l(x)$ – приєднані функції Лежандра,

$$\tilde{c}_{m,l} = \frac12 \sqrt{\frac{\nu_l}{\pi}\,\frac{(m-l)!}{(m+l)!}\,(2m+1)}\,, \tag{1}$$

$$\nu_l = \begin{cases} 1, & l\neq 0,\\ 2, & l=0. \end{cases} \tag{2}$$

Нагадаємо, що ортонормовані послідовності дійснозначних сферичних гармонік $S_m^l(\theta,\varphi)$ для тривимірного простору зі зміною індексації мають вигляд: