В. Васькович, студ.

ЦЕНЫ АЗИАТСКОГО ОПЦИОНА И ИХ СХОДИМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрена модель рынка ценных бумаг и азиатский опцион в ней. Вычислена справедливая и объективна цена данного опциона и исследована объективная цена на сходимость относительно параметров и ее порядок.

V.Vaskovych, BA

PRICES OF ASIAN OPTION AND ITS CONVERGENCE RELATIVE PARAMETERS

Model of the securities market and the Asian option in it are discussed. There are calculated fair and objective price for this option, and are researched objective price convergence relative parameters and its rank.

УДК 519.21

З. Вижва, докт. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка
Email: vsa@univ.kiev.ua

ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ У ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглянуто задачу про статистичне моделювання реалізацій однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному евклідовому просторі на основі їх спектрального розкладу. Наведено спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій таких випадкових полів. Отримано середньоквадратичну оцінку апроксимації цих випадкових полів частковими сумами ряду. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій гауссівських однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі з використанням спектральних коефіцієнтів.

ВСТУП. Методи чисельного моделювання (методи Монте-Карло) випадкових процесів та полів у зв'язку із стрімким розвитком комп'ютерної техніки мають широкий діапазон застосування, зокрема це стосується таких напрямків природничих наук, як геологія, геофізика, сейсмологія, метеорологія, океанографія, радіотехніка, статистична радіофізика, ядерна фізика, та інші. За допомогою методів статистичного моделювання можна згенерувати на комп'ютері реалізації випадкових процесів та полів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію.

У статті вивчаються дійснозначні випадкові поля у просторіR^3, які однорідні ізотропні та неперервні в середньому квадратичному. Наведено теорему про спектральний розклад таких полів. Отримано оцінку середньоквадратичної апроксимації випадкових полів у тривимірному просторі моделлю, побудованою на основі спектрального розкладу. Наведено обчислені спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій випадкових полів у просторіR^3**.** Розроблено алгоритм статистичного моделювання реалізацій однорідних ізотропних гауссівських випадкових полів із заданими статистичними характеристиками з використанням спектральних коефіцієнтів .

Запропонований у цій статті метод чисельного моделювання однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі є узагальненням такого методу для однорідних випадкових полів на сфері в 3-вимірному евклідовому просторі [5, 14], однорідних ізотропних випадкових полів на площині [4] та стаціонарних періодичних випадкових процесів [3]. Метод статистичного моделювання однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі з використанням спектральних коефіцієнтів доповнює перелік інших розроблених методів чисельного моделювання таких полів, зокрема методу рандомізації [13] та з використанням деякого вигляду розкладу випадкового поля [9].

Методи статистичного моделювання випадкових полів у тривимірному просторі на основі розкладів в ряди розглядалися також в [6, 7, 10–12] та ін.

ОДНОРІДНЕ ТА ІЗОТРОПНЕ ВИПАДКОВЕ ПОЛЕ В ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ R^3 ТА ЙОГО ЗВУЖЕННЯ НА СФЕРУ. Розглядається дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле $\xi(r,\theta,\varphi)$ в тривимірному евклідовому просторі R^3 (r,θ,φ – полярні координати). Відомо [5], що неперервне в середньому квадратичному дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле $\xi(r,\theta,\varphi)$ в просторі R^3 можна подати у вигляді розкладу в ряд за сферичними гармоніками, який називається спектральним розкладом такого випадкового поля:

$$\xi(r,\theta,\varphi) = c_3 \sum_{m=o}^{\infty} \sum_{l=-m}^{m} \varsigma_m^l(r) \ S_m^l(\theta,\varphi),$$

де $c_3=\sqrt{2}\pi$, $\varsigma_m^l(r) = \int\limits_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} Z_m^l(d\lambda)$, причому, $\{Z_m^l(.)\}$ – послідовність ортогональних випадкових мір на борелівських множинах із інтервалу $[0,+\infty)$, таких, що $\mathrm{M}\, Z_m^l(S_1)\, Z_{m'}^{l''}(S_2) = \delta_l^{l'}\, \delta_m^{m'}\, \Phi(S_1 \cap S_2)$,

де $\Phi(\lambda)$– неспадна обмежена функція, яку називають спектральною функцією, а сферичні гармоніки $S_m^l(x)$ мають вигляд $S_m^l(\theta,\varphi) = \tilde{c}_{m,l}\, P_m^{|l|}(\cos\theta)\, e^{i\,l\,\varphi}$, де $P_m^l(x)$– приєднані функції Лежандра,

$$\tilde{c}_{m,l} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu_l}{\pi}\frac{(m-l)!}{(m+l)!}(2m+1)}\,, \tag{1}$$

$$\nu_l = \begin{cases} 1, & l \neq 0, \\ 2, & l = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Нагадаємо, що ортонормовані послідовності дійснозначних сферичних гармонік $S_m^l(\theta,\varphi)$ для тривимірного простору зі зміною індексації мають вигляд:

$S_0^0(\theta,\varphi)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $\theta\in(0,\pi)$, $\varphi\in(0,2\pi)$, $S_m^0(\theta,\varphi)=c_m^0P_m(\cos\theta)$, $m=1,2,...$, ($P_m(x)$ − поліноми Лежандра степеня m)

$$S_m^l(\theta,\varphi)=c_m^lP_m^l(\cos\theta)\cos(l\varphi),\ m=1,2,...,\ l=1,...,m,\quad S_m^{-l}(\theta,\varphi)=c_m^lP_m^l(\cos\theta)\sin(l\varphi),\ m=1,2,...,\ l=1,...,m.$$

Кореляційну функцію B(ρ) однорідного ізотропного випадкового поля $\xi(r,\theta,\varphi)$ у тривимірному просторі R[3] можна подати [8, c. 6]у вигляді:

$$B(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty\frac{J_{\frac{1}{2}}(\lambda\rho)}{\sqrt{\lambda\rho}}\,d\Phi(\lambda),\tag{3}$$

або (оскільки $J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ \sin t/\sqrt{t}$), то можна записати: $B(\rho)=\int_0^\infty\dfrac{\sin\lambda\rho}{\lambda\rho}\,d\Phi(\lambda)$,

де ρ – відстань між векторами $x,y\in R^3$ ($x=(r_1,\theta_1,\varphi_1)$, $y=(r_2,\theta_2,\varphi_2)$): $\rho=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\psi}$,

а $\cos\psi$ – кутова відстань між векторами $x,y\in R^3$: $\cos\psi=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$.

Спектральні коефіцієнти $b_m(r)$ обчислюємо за виразом: $b_m(r)=D\,\varsigma_m^l(r)=\mathrm{M}\left|\varsigma_m^l(r)\right|^2$, $l=1,2,...,h(m,3)$.

Тоді:

$$b_m(r)=\int_0^\infty\frac{J^2_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\lambda r}\Phi(d\lambda),\ m=0,1,\dots .\tag{4}$$

Можна навести формулу для обчислення спектральних коефіцієнтів у вигляді виразу, що містить кореляційну функцію випадкового поля. Для цього скористаємось інтегралом 7.7.3(14) із [1, стор. 58]. В нашому випадку маємо:

$$J^2_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)=\frac{2\pi\,m!\,\lambda r}{\Gamma(m+1)}\int_0^\pi\rho^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(\rho)\ P_m(\cos\psi)\ \sin\psi\,d\psi.\tag{5}$$

Підставимо (12) в (11) і отримаємо:

$$b_m(r)=2\pi\int_0^\infty\int_0^\pi\rho^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(\rho)\ P_m(\cos\psi)\ \sin\psi\,d\psi\ \ d\Phi(\lambda).$$

Враховуючи вираз (6) для кореляційної функції, можна отримати формулу для обчислення спектральних коефіцієнтів $b_m(r)$ випадкового поля, якщо відома його кореляційна функція B(ρ), а саме:

$$b_m(r)=2\pi\int_0^\pi B(\rho)\,P_m(\cos\psi)\ \sin\psi\,d\psi$$

або, при $\rho=2r\sin(\psi/2)$,− відстань між точками сфери радіуса *r*:

$$b_m(r)=2\pi\int_0^\pi B(2r\sin\frac{\psi}{2})\,P_m(\cos\psi)\ \sin\psi\,d\psi\,.$$

Зауважимо, що якщо розглянути "звуження" випадкового поля $\xi(r,\theta,\varphi)$ на сферу радіуса *r*, то кореляційну функцію такого випадкового поля можна розкласти в ряд:

$$B(\rho)=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^\infty\sum_{l=1}^{2m+1}S_m^l(\theta_1,\varphi_2)\ S_m^l(\theta_2,\varphi_2)\int_0^\infty\frac{J^2_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\lambda r}\,d\Phi(\lambda).$$

або, по теоремі додавання для сферичних гармонік, маємо:

$$B(\rho)=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^\infty(2m+1)P_m(\cos\psi)\,b_m(r)\,.$$

Наведемо деякі приклади кореляційних та відповідних спектральних функцій для випадкових полів в просторіR[3].

Приклад 1. Кореляційна функція випадкового поля в тривимірному просторі експоненціального типу (**Гауссівська крива**) має вигляд:

$$B(\rho)=\exp\left\{-c\,\rho^2\right\},$$

де **c** (c >0) – деяка стала.

Похідна від спектральної функції в цьому прикладі така:

$$\Phi'(\lambda)=\frac{\lambda^2}{2\sqrt{\pi c^3}}\ \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4c}\right\}.$$

Приклад 2. Кореляційна функція випадкового поля бесселевого типу має вигляд:

$$B(\rho)=3\sqrt{\pi/2}\ \frac{J_{\frac{3}{2}}(c\rho)}{(c\rho)^{\frac{3}{2}}},\quad c\in R\ ,,\tag{6}$$

де $J_p(x)$ – функція Бесселя першого роду p-го порядку.

Така функція належить **сімейству Бесселя** [11] при значенні параметра $\nu = 3/2$. Загальний вигляд функцій цього сімейства такий:

$$B_\nu(\rho) \ = \ 2^\nu \ \Gamma(\nu+1) \ \frac{J_\nu(\rho)}{\rho^\nu}, \quad \nu \geq 0. \tag{7}$$

Кореляційній функції (17) випадкового поля в тривимірному просторі відповідає спектральна функція вигляду:

$$\Phi(\lambda) \ = \ \begin{cases} \dfrac{\lambda^3}{c^3}, & 0 < \lambda < c, \\ 1, & \lambda \geq c. \end{cases}$$

Приклад 3. Кореляційну функцію випадкового поля із сімейства Бесселя (7) при значенні параметра ν= 1/2 в деякій літературі називають "синусом кардинальним":

$$B(\rho) \ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin c \ (a\rho), \ \text{де} \ \sin c(a\,\rho) = \frac{\sin a\,\rho}{a\,\rho}, \, a > 0.$$

Враховуючи (7), маємо іншу форму запису цієї кореляційної функції $B(\rho) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \ \dfrac{J_{\frac{1}{2}}(c\,\rho)}{\sqrt{c\,\rho}}$.

Приклад 4. Кореляційна функція випадкового поля **типу Коші** має вигляд:

$$B(\rho) \ = \ \frac{c^2}{\rho^2 + c^2}, \quad c > 0.$$

Більш загальний вираз для функцій такого типу має вигляд:

$$B(\rho) \ = \frac{c^{n-1}}{(\rho^2 + c^2)^{\frac{n-1}{2}}}, \quad c > 0, \quad n > 1.$$

У цьому прикладі параметр n = 3 – це розмірність простору. Відповідна такій кореляційній функції випадкового поля у тривимірному просторі спектральна функція має похідну:

$$\Phi'(\lambda) \ = \ c^2 \lambda \ e^{-c\,\lambda}.$$

Приклад 5. Можна також розглянути кореляційну функцію типу **Коші** іншого вигляду, ніж в попередньому прикладі, тобто:

$$B(\rho) \ = \ \frac{c^{n+1}}{(\rho^2 + c^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad c > 0, \quad n > 1.$$

Потрібно зауважити, що загальний вигляд функцій сімейства Коші [11] такий:

$$B(\rho) \ = \ \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{-\nu}, \quad \nu > 0, \ a > 0.$$

У цьому прикладі параметр ν = (n + 1) / 2.

Спектральна щільність випадкового поля у тривимірному просторі, що відповідає такій кореляційній функції (при n = 3) , має вигляд:

$$\Phi'(\lambda) \ = \ \frac{1}{2} \ c^3 \ e^{-c\,\lambda} \lambda^2.$$

Спектральні коефіцієнти для прикладів 1–6 обчислено в [5]. Результати обчислень спектральних коефіцієнтів для практично важливих кореляційних функцій однорідних та ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі наведено в наступній таблиці.

За цією таблицею, використовуючи спектральні коефіцієнти, можна проводити статистичне моделювання реалізацій випадкових полів у тривимірному просторі за допомогою моделі, побудованої на основі спектрального розкладу таких полів.

Наведемо теорему [5]про спектральний розклад однорідного та ізотропного випадкового поля в просторіR^3. В такому розкладі мають місце стохастичні інтеграли по дійснозначним випадковим мірам з ортогональними значеннями.

Теорема 1. Однорідне та ізотропне неперервне в середньому квадратичному дійснозначне випадкове поле $\xi(r, \theta, \varphi)$ в просторі R^3 можна подати у вигляді спектрального розкладу:

$$\xi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m} c_{m,l} P_m^l(\cos\theta) \left[\cos l\varphi \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} Z_{m,1}^l \ (d\lambda) + \sin l\varphi \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} Z_{m,2}^l \ (d\lambda) \right] \tag{8}$$

де $c_{m,l} = \sqrt{\frac{\pi \nu_l}{2} \frac{(m-l)!}{(m+l)!} \ (2m+1)}$, ν_l –константа (5) , а $P_m^l(x)$ – приєднані функції Лежандра, $\{ Z_{m,k}^l(.) \}, \ k = 1,2$, – набори випадкових мір з ортогональними значеннями, що задані на σ–алгебрі борелевських множин $[0,+\infty)$ і такі, що:

$$\mathrm{M} \ Z_{m,k}^l(S_1) \ Z_{m,k'}^{l'}(S_2) = \delta_l^{l'} \ \delta_m^{m'} \ \delta_k^{k'} \ \Phi(S_1 \cap S_2) \tag{9}$$

Доведення теореми наведено у роботі [5].

Таблиця 1

Кореляційні та спектральні функції
та відповідні спектральні коефіцієнти однорідних ізотропних випадкових полів в R³

$B(\rho)$	$\Phi\,(\lambda)$	$b_k(r)$
$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\;\dfrac{J_{\frac{1}{2}}(c\rho)}{(c\rho)^{\frac{1}{2}}}\,,\qquad c\geq 0.$	$\begin{cases} 0, & 0<\lambda<c,\\ 1, & \lambda\geq c.\end{cases}$	$2\,\pi^2\;\dfrac{J^2_{\frac{1}{2}+k}(c\,r)}{c\,r}$
$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\;\sum\limits_{m=1}^{s} p_m\;\dfrac{J_{\frac{1}{2}}(c_m\rho)}{(c_m\rho)^{\frac{1}{2}}},$ $\sum\limits_{m=1}^{s} p_m=1,\, p_m>0,\, c_m\geq 0.$	$\begin{cases} 0, & \lambda\leq c_1,\\ \sum\limits_{m=1}^{i} p_m, & c_i<\lambda\leq c_{i+1},\, i=\overline{1,s-1}\\ 1, & \lambda>c_s\end{cases}$	$2\,\pi^2\sum\limits_{m=1}^{s} p_m\;\dfrac{J_{k+\frac{1}{2}}(c_m\,r)}{c_m\,r}$
$3\,\sqrt{\pi/2}\;\dfrac{J_{\frac{3}{2}}(c\rho)}{(c\rho)^{\frac{3}{2}}}$	$\begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{c}\right)^3, & 0<\lambda<c,\\ 1, & \lambda\geq c.\end{cases}$	$\dfrac{3\pi^2}{\sqrt{c\,r}}\left[\,J^2_{m+\frac{1}{2}}(c\,r)-J_{m+\frac{3}{2}}(c\,r)\,J_{m-\frac{1}{2}}(c\,r)\right.$
$\exp\left\{-c\,\rho^2\right\},\quad c>0$	$\Phi'(\lambda)\;=\;\dfrac{\lambda^2}{2\sqrt{\pi\,c^3}}\;\exp\left\{-\;\dfrac{\lambda^2}{4\,c}\right\}$	$\left(\dfrac{\pi}{c}\right)^{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{2\,r}\;\exp\left\{-2\;c^2r\right\}\;I_{m+\frac{1}{2}}\,(2c\,r^2),$ де $I_m(x)$ – модифікована функція Бесселя першого роду m - го порядку
$\dfrac{c^2}{\rho^2+c^2},\quad c>0$	$\Phi'(\lambda)\;=\;c^2\lambda\,e^{-c\,\lambda}.$	$\dfrac{1}{2\,\pi}\left(\dfrac{c}{r}\right)^2 Q_{k+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{c^2+2\,r^2}{2\,r^2}\right),$ де $Q_p(x)$ – функція Лежандра другого роду p-го порядку
$\dfrac{c^4}{(\rho^2+c^2)^2},\quad c>0$	$\Phi'(\lambda)\;=\;\dfrac{c^3}{2}\,\lambda^2\,e^{-c\,\lambda}$	$c^{-2}\,\Gamma\left(k+\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\left(\dfrac{r}{2\,c}\right)^{2\,k+1}\times$ $\times\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(2\,k+m+2)\;(2m+2k+1)!}{m!\;\Gamma\left(m+k+\dfrac{3}{2}\right)^2}(-1)^m\left(\dfrac{r}{2\,c}\right)^m.$

Розглянемо розклад випадкового поля $\xi(r,\theta,\varphi)$ в іншому, порівняно із (8), вигляді, ввівши позначення для інтегралів. Такий розклад запишемо виразом:

$$\xi(r,\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\;\sum_{l=0}^{m}c_{m,l}P_m^l(\cos\theta)\left[\varsigma_{m,1}^l\;(r)\cos l\varphi+\varsigma_{m,2}^l\;(r)\sin l\varphi\right], \tag{10}$$

де випадкові процеси $\varsigma_{m,k}^l\;(r), k=1,2; m=0,1,...; l=0,1,...,m.$ мають вигляд

$$\varsigma_{m,k}^l\;(r)=\int_0^{\infty}\frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda\,r)}{(\lambda\,r)^{\frac{1}{2}}}Z_{m,k}^l\;(d\lambda),\;\;k=1,2; m=0,1,...;\;\; l=0,1,...,m.$$

Із припущення, що $M\xi(r,\theta,\varphi)=0$, випливає наступне:

$$M\varsigma_{m,k}^l\;(r)=0, k=1,2; m=0,1,...; l=0,1,...,m. \tag{11}$$

Теорема 2. Якщо $\xi(r,\theta,\varphi)$ − однорідне ізотропне випадкове поле на R^3 **,** то

$$M\varsigma_{m,k}^l\;(r)\varsigma_{m',k'}^{l'}\;(r)=\delta_m^{m'}\delta_k^{k'}\delta_l^{l'}b_m(r), k,k'=1,2; m,m'=0,1,...; l,l'=0,1,...,m, \tag{12}$$

де $\delta_m^{m'}$ − символ Кронеккера, $\{b_m(r)\}$, m=0,1,… – послідовність додатньо визначених ядер на R₊, які задовольняють умові $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\;(2m+1)b_m(r)<+\infty$ та мають вигляд (4).

Дисперсію випадкового поля $\xi(r,\theta,\varphi)$ можна визначити за виразом:

$$M\xi^2\,(r,\theta,\varphi)=D\xi(r,\theta,\varphi)=\pi/2\sum_{m=0}^{\infty}\;(2m+1)b_m(r). \tag{13}$$

Доведення: Розглянемо наступний вираз:

$$M\varsigma_{m,k}^{l}(r)\varsigma_{m',k'}^{l'}(r)=M\int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}}Z_{m,k}^{l}(d\lambda)\int_0^\infty \frac{J_{m'+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}}Z_{m',k'}^{l'}(d\lambda)=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{J^2_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\lambda r}\,MZ_{m,k}^{l}(d\lambda)Z_{m',k'}^{l'}(d\lambda).$$

Скориставшись умовою (9) теореми 1 та виразом (4) для спектральних коефіцієнтів, отримаємо (12).
Доведемо рівність (13).

Із теореми додавання для сферичних гармонік випливає, що для будь-яких двох точок x_1 та x_2 із S_3(S_3 − одинична сфера в 3-вимірному евклідовому просторі) має місце рівність:

$$\sum_{l=1}^{2m+1} S_m^l(x\ )S_m^l(x\ )=\frac{m+1/2}{2\pi}. \tag{14}$$

Тоді дисперсію випадкового поля $\xi(r,\theta,\varphi)$ можна обчислити, враховуючи (10) та (14), за виразом:

$$D\xi(r,\theta,\varphi)=M\xi(r,\theta,\varphi)\xi(r,\theta,\varphi)=$$

$$=2\pi^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2m+1} S_m^l(\theta,\varphi)\,S_m^l(\theta,\varphi)\int_0^\infty \frac{J^2_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\lambda r}d\,\Phi\,(\lambda)=\pi/2\sum_{m=0}^{\infty}\ (2m+1)b_m(r)\,.$$

Теорему доведено.

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОРІДНИХ ІЗОТРОПНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ НА R^3. Наведений вище спектральний розклад (10) можна використати для статистичного моделювання реалізацій гауссівських однорідних ізотропних випадкових полів наR^3 із заданими статистичними характеристиками. Для побудови наближеної моделі гауссівських полів, що розглядаються, використаємо часткову суму розкладу(10) випадкового поля $\xi(r,\theta,\varphi)$. Побудована **модель** має такий вигляд:

$$\xi_M\,(r,\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{M}\ \sum_{l=0}^{m} c_{m,l}P_m^l(\cos\theta)\left[\,\varsigma_{m,1}^l\ (r)\cos l\varphi+\varsigma_{m,2}^l\ (r)\sin l\varphi\right] \tag{15}$$

Лема . Мають місце нерівності[9]:

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} J^2_{m+\theta}(z)\le\frac{z^2}{M},\quad \theta\in[\,0,1\,), \tag{16}$$

та

$$\sum_{m=M+1}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)J^2_{m+1/2}(z)\le\frac{5z^4}{4M^2}. \tag{17}$$

Теорема 3. Якщо $\mu_3=\int_0^\infty \lambda^3 d\Phi(\lambda)<+\infty$, то для всіх $M=1,2,...$,... має місце оцінка середньоквадратичного наближення:

$$M\left|\xi(r,\theta,\varphi)-\xi_M(r,\theta,\varphi)\right|^2\le\frac{5\pi r^3\mu_3}{4M^2}. \tag{18}$$

Доведення. Розглянемо:

$$M\left|\xi(r,\theta,\varphi)-\xi_M(r,\theta,\varphi)\right|^2=$$

$$=\ \mathrm{M}\left\{\sum_{m=N+1}^{\infty}\ \sum_{l=0}^{m}C_{m,l}\ P_m^l(\cos\theta)\ \left[\ \cos l\varphi\int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda\ r)}{\sqrt{\lambda\ r}}\ z_{m,1}^l\ (d\lambda)+\sin l\varphi\int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda\ r)}{\sqrt{\lambda\ r}}\ z_{m,2}^l\,(d\lambda)\ \right]\right\}^2 \tag{19}$$

У виразі (19) виділимо суми при $l=0$ та при $l>0$ і, використовуючи властивості ортогональних випадкових мір і стохастичних інтегралів, отримаємо:

$$M\left|\xi(r,\theta,\varphi)-\xi_M(r,\theta,\varphi)\right|^2=$$

$$=\sum_{m=N+1}^{\infty}\left[\ (2m+1)\left(P_m(\cos\theta)\right)^2\int_0^\infty \frac{J^2_{m+1/2}(\lambda r)}{\lambda r}d\,\Phi\,(\lambda)+\sum_{l=1}^{m}2\,C^2_{m,l}\left(\ P_m^l(\cos\theta)\ \right)^2\int_0^\infty \frac{J^2_{m+1/2}(\lambda r)}{\lambda r}\ d\,\Phi\,(\lambda)\right].$$

Далі, врахуємо рівність $P_m(1)=1$ та застосуємо теорему додавання для многочленів Лежандра:

$$P_m(\ \cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\,(\varphi_1-\varphi_2)\,)=P_m(\cos\theta_1)\ P_m(\cos\theta_2)+$$

$$+\ 2\ \sum_{l=1}^{m}\frac{(m-l)!}{(m+l)!}\ \ P_m^l(\cos\theta_1)\ \ P_m^l(\cos\theta_2)\cos\ l\,(\varphi_1-\varphi_2)\,.$$

Тоді маємо $M\left|\xi(r,\theta,\varphi)-\xi_M(r,\theta,\varphi)\right|^2\le\pi\int_0^\infty\left\{\sum_{m=M+1}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{J^2_{m+1/2}(\lambda r)}{\lambda r}\right\}d\Phi(\lambda)=\pi/2\sum_{m=M+1}^{\infty}\ (2m+1)\int_0^\infty\frac{J^2_{m+1/2}(\lambda r)}{\lambda r}\,d\Phi(\lambda).$

Використовуючи наведену вище лему, отримаємо таку оцінку:

$$\pi\int_0^\infty\left\{\sum_{m=M+1}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{J^2_{m+1/2}(\lambda r)}{\lambda r}\right\}d\Phi(\lambda)\le\pi\int_0^\infty\frac{5\left(\lambda r\right)^4}{4M^2\lambda r}d\Phi(\lambda)\le\frac{5\pi r^3\mu_3}{4M^2}.$$

Теорему доведено.

Опишемо побудований на основі моделі (15) та оцінки середньоквадратичного наближення (18) однорідних ізотропних випадкових полів $\xi(r, \theta, \varphi)$ на R^3 з обмеженим спектром алгоритм для моделювання реалізацій таких випадкових полів, які розподілені за гауссівським законом.

АЛГОРИТМ.

1. Вибираємо, відповідно до необхідної точності e>0, натуральне число M для моделі (15) за допомогою нерівності:

$$\frac{5\pi r^3 \mu_3}{4M^2} < \varepsilon ,$$

де $\mu_3 = \int_0^\infty \lambda^3 d\Phi(\lambda)$, де *r* – полярний радіус точки в тривимірному просторі, в якій генерується реалізація випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$.

2. Моделюємо послідовності гауссівських випадкових величин (випадкових процесів при фіксованому *r*) $\left\{\varsigma_{m,k}^{l}(r)\right\}, k = 1, 2; m = 0, 1, ...; l = 0, 1, ..., m.$ які задовольняють умовам (11), (12).

3. Обчислюємо вираз (15) у заданій точці $(r, \theta, \varphi) \in R^3$ підставляючи в нього обчислені за попередніми пунктами 1 та 2 значення величини M і послідовності гауссівських випадкових величин.

4. Перевіряємо згенеровану в п.3 реалізацію випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ на адекватність даним цього випадкового поля шляхом порівняння відповідних статистичних характеристик.

Слід відзначити, що наведений алгоритм можна застосувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу, а не лише з гауссівським.

ВИСНОВКИ. Із використанням отриманої оцінки середньоквадратичної апроксимації однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному евклідовому просторі моделлю, побудованою на основі спектрального розкладу, розроблено алгоритм статистичного моделювання реалізацій таких випадкових полів. При цьому запропоновано залучати обчислені аналітичні формули спектральних коефіцієнтів для практично важливих типів кореляційних функцій випадкових полів у просторі R^3.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, Т.2, 1974. 2. Вижва З.О.Статистичне моделювання випадкових процесів та полів. Монографія, – К.: ВГЛ "Обрії", – 2011, 388 с. 3. Вижва З.О, Вижва А.С. Статистичне моделювання стаціонарних випадкових процесів// Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2010. – Вип. 24. – С. 33–39. 4. Вижва З.О., Зражевський О.Г. Про статистичне моделювання випадкових полів на площині// Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2008. – Вип. 19–20. – С. 43–47. 5. Вижва З.О., Ядренко М.Й. Статистичне моделювання ізотропних випадкових полів на сфері // Вісник Київського університету. Математика і Механіка – 2000. – №5. – С. 5–11. 6. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М., Наука, – 1982. – 296 с. 7. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей . Новосибирск: Изд-во ИВМ и МГ, – 2005. – 259 с. 8. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. – К.: Наукова думка. – 1980. 9. Ядренко М.Й., Гамалій О. Статистичне моделювання однорідних та ізотропних тривимірних випадкових полів та оцінки похибок моделювання// Теор. йм. та мат. стат., 1998, №59, С. 171–175. 10. Chiles J.P., Delfiner P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. John Wiley & Sons, Inc. New York, Torontoю - 2009. - 720 p. 11. Gneiting T. Symmetric Positive Definite Functions with Applications in Spatial Statistics. Von der Universitat Bayeuth zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung. – 1997. – P.107. 12. Schlather M. Introduction to Positive Define Functions and to Unconditional Simulation of Random Fields. Technical Report – 1999. ST–99–10. Lancaster University, UK. 13. Vyzhva Z.O. About Approximation of 3-D Random Fields and Statistical Simulation // Random Operator and Stochastic Equation, – 2003, V. 4, No. 3, p. 255–266. 14. Vyzhva Z.O. On Approximation of Isotropic Random Fields on the Sphere and Statistical Simulation// Theory of Stochastic Processes. – 1997, V. 3(19), N 3–4, p. 463–467.

Надійшла до редколегії 22.01.13

З. Выжва, докт. физ.-мат. наук

О СТАТИСТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрена задача о статистическом моделировании реализации однородных изотропных случайных полей в трехмерном евклидовом пространстве на основе их спектрального разложения. Приведены спектральные коэффициенты для практически важных корреляционных функций таких случайных полей. Получена среднеквадратическая оценка аппроксимации этих случайных полей частичными суммами ряда. Построена модель и сформулирован алгоритм статистического моделирования реализации гауссовских однородных изотропных случайных полей в трехмерном пространстве с использованием спектральных коэффициентов.

Z.Vyzhva, Full Doctor

THE PROBLEM OF STATISTICAL SIMULATION OF HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC RANDOM FIELDS ON THE 3D EUCLIDEAN SPACE

The problem of statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the 3D Euclid Spacerealizations has been considered, which was built on the base of it spectral decomposition. It has been giventhe spectral coefficients for the typical random field's examples. It has been got theme ansquarees timator of this random fields approximation by thepartial sums. It has been constructed the model and statistical simulation of homogeneous and isotropic random fieldson the 3D space algorithm by used the spectral coefficients.