УДК 517.9 + 53(092)

М. Гордієнко, асп., В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

МАТЕМАТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ М.М. БОГОЛЮБОВА ПЕРІОДУ 1923–1932 РОКІВ

Проаналізовано наукові праці М.М. Боголюбова періоду 1924–1932 рр. і досліджено процес еволюції напрямків його наукової діяльності .

ВСТУП. Наукові дослідження М.М. Боголюбова (1909–1992 рр.) стосувалися широкого кола наукових проблем з математики, механіки і теоретичної фізики. Основні наукові праці М.М.Боголюбова містяться в 12-ти томному зібранні його наукових праць [12], які об'єднані в 3 серії, що відповідають трьом основним напрямам його наукової діяльності: математика і нелінійна механіка, статистична механіка, квантова теорія. Серія "Математика. Нелінійна механіка" складається з 4 томів: том 1 "Математика, 1925–1990" [13] містить математичні праці М.М. Боголюбова, а інші три томи присвячені нелінійній механіці і асимптотичним методам в теорії нелінійних коливань. Вибрані праці з математики і нелінійної механіки М.М. Боголюбова також представлені в [10, 11]. Порівняльний аналіз переліку праць в [10–13] і [21–23] показує, що зібрання [10–13] не містять всі наукові праці М.М. Боголюбова, наприклад, – праці періоду з початку його наукової діяльності до 1940 р., зокрема, ті праці, які були надруковані або ж в Україні, або ж за кордоном. Деякі з праць, які не увійшли до [10–13], можна знайти в [20], наприклад, [17, 32]. Аналіз переліку праць М.М. Боголюбова [10–13], [21–23] та [1] показує, що протягом періоду 1924–1932 рр. ним написано 35 наукових праць [4–8, 15–19, 25–49], з них – 9 самостійно [4–6, 25–30]. В [11, 13] можна ознайомитися з монографією М.М. Боголюбова [4], а в [10, 11, 13] – зі статтями [5, 6, 7, 25, 26, 28], окрім зазначених, в [13] також увійшла стаття [18], а в [14] міститься стаття [19]. Праці [7, 15, 16, 27, 29–31, 33–49], на жаль, не доступні.

М.М. Боголюбов розпочав свою наукову діяльність у 1923 р., коли почав відвідувати науковий семінар М.М. Крилова. У 1924 р. М.М. Боголюбов написав свою першу наукову працю "Про поведінку інтегралів лінійного рівняння другого порядку на нескінченності", якою розпочав цикл наукових досліджень з теорії диференціальних рівнянь та їх застосувань і варіаційного числення. Як зазначено у [13, с. 764], ця праця не збереглася. Перші наукові праці М.М. Боголюбова були пов'язані з тематикою наукових інтересів його наставника – академіка М.М. Крилова, який на той час мав наукові праці з варіаційних методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, зокрема, з застосування методу Рітца та його узагальнень. У 1928 р. М.М. Боголюбов успішно захистив кандидатську дисертацію, був зарахований науковим співробітником кафедри математичної фізики Всеукраїнської академії наук і того ж року отримав престижну премію Болонської академії наук, у 1930 р. йому присуджено науковий ступінь доктора наук (honoris causa). 5 жовтня 1932 р., рекомендуючи М.М. Боголюбова для обрання членом-кореспондентом АН СРСР, М.М. Крилов відзначає [9, с. 347]: "Научные работы Н.Н.Боголюбова по предмету их исследования можно разбить на три группы: работы, относящиеся к 1) вариационному исчислению, 2) теории почти периодических функций, 3) приближеному интегрированию дифференциальных уравнений и к изучению колебательных процессов в технике". Далі він пише [9, с. 348]: "С этими работами тесно связаны работы, написанные совместно с акад. Н.Н. Крыловым по заданиям различных отраслевых институтов (например, авиации, промэнергетики, сооружений), в которых исследуются в основном почти периодические свойства и устойчивость процессов". Отже, станом на початок 30-х рр. XX-го ст. М.М. Боголюбов – досвідчений науковець: від початку своєї наукової діяльності по 1932 р., коли його наставник дав процитовану вище характеристику його наукових праць, він – автор 36 статей і 1 монографії, з них, 8 статей і 1 монографію виконав самостійно.

У короткому огляді наукової діяльності М.М. Боголюбова, що відкриває перший том його вибраних праць, Ю.О. Митропольський, С.В. Тябликов, В.П. Шелест зазначають наступне [10, с. 11]: "В 1932 г. Н.Н. Боголюбов совместно с академиком Н.Н. Крыловым приступили к разработке совершенно новой отрасли математической физики – теории нелинейных колебаний, названной ими нелинейной механикой. … Преодолев большие принципиальные трудности Н.Н. Боголюбов совместно с Н.Н. Крыловым распространили методы теории возмущений на общие неконсервативные системы и построили новые асимптотические методы нелинейной механики"

У 30-х рр. XX ст. М.М. Боголюбов поступово від математичних праць і праць з застосування математичних методів до розв'язання задач фізики і практики, які стали основою для створення ним спільно з М.М. Криловим нелінійної механіки, перейшов до задач статистичної механіки, а потім – задач квантової фізики.

У даній статті аналізується наукова діяльність М.М. Боголюбова за період з 1923 р. по 1932 р., тобто з початку його наукової діяльності до заснування нового розділу математичної фізики – нелінійної механіки [24, с. 103].

ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ОЦІНКИ ПОХИБОК. Перші наукові праці М.М. Боголюбова були виконані у співавторстві з М.М. Криловим і стосувалися варіаційних методів наближеного розв'язання рівнянь математичної фізики та оцінјг похибок наближеного інтегрування. У 1908 р. швейцарський фізик В. Рітц запропонував наближений метод розв'язання диференціальних рівнянь, при якому використовується еквівалентність даного диференціального рівняння деякій задачі варіаційного числення і при цьому наближене інтегрування цього диференціального рівняння зводиться до наближеного розв'язання еквівалентної варіаційної задачі. М.М. Крилов приділив дослідженню метода Рітца значну увагу і назвав цей метод методом варіаційного алгоритму. Зокрема, він відзначив [32], що "хотя еще до него (Ритца, прим. авторів) Релей использовал метод вариационного алгоритма как способ вычисления, тем не менее, совершенно бесспорно, что именно Ритцу принадлежит заслуга открытия общего метода и доказательства в частных случаях сходимости процесса" [20, с. 90].

М.М. Крилов у 20-ті та на початку 30-тих рр. активно займався дослідженням питань про побудову наближених розв'язків диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики. Питання про знаходження наближених розв'язків тих чи інших задач мало важливе значення для розв'язання багатьох задач практики, з якими доводилося мати справу М.М. Крилову в той час. При цьому, як він відзначав у [20, с. 132–149], задачу про наближене інтегрування диференціальних рівнянь можна сформулювати різними способами. У його численних самостійних і сумісних з М.М. Боголюбовим працях розглядалася задача побудови наближених розв'язків, коли вважалося, що розв'язок даного диференціального рівняння апріорі існує та єдиний, і необхідно обчислити цей розв'язок з наперед заданою точністю та знайти вирази для похибки у вигляді, який зручний для практичних обчислень. Також вважалося, що для знаходження наближеного розв'язку має бути використано порівняно невелика кількість математичних операцій, які були пов'язані з розв'язуванням відповідних систем (диференціальних або алгебраїчних) рівнянь для визначення коефіцієнтів відповідних розкладів для наближеного розв'язку. При цьому питання про збіжність процесу побудови наближених розв'язків не було головним.

Для побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь М.М. Крилов і М.М. Боголюбов використовували методи варіаційного алгоритму (метод Релея-Рітца), метод найменших квадратів і його різні узагальнення, метод скінченних різниць і його узагальнення, зокрема, метод "тронсонів", метод спеціальної ортогоналізації (метод Енскога). Значну увагу в їх працях було приділено застосуванню принципу Релея та його обґрунтуванню, розгляду якого було присвячено декілька статей [8, 38, 42]. У [8] автори математично обґрунтували принцип Релея, який стосується зв'язку між розв'язками різницевих і диференціальними рівнянь, що має важливе значення при переході від дискретної механіки до неперервної. У [11, с. 6–7] автори зазначають, що ще у 18-му столітті, у епоху створення диференціального і інтегрального числення, граничний перехід у рівняннях руху для дискретних систем привів до відомих рівнянь математичної фізики з частинними похідними, які, отже, можна вважати рівняннми руху неперервної системи. З іншого боку, граничний перехід можна здійснити не лише у рівняннях для руху дискретної системи, але й у розв'язках цих рівнянь, тобто відповідних рівнянь у скінченних різницях. Природно виникає питання: чи отримаємо один й той самий результат при згаданих вище способах переходу до границі. Керуючись інтуїцією, вчені того часу дали ствердну відповідь на це питання, а такі вчені як Релей і Пуанкаре застосували цей метод при дослідженні деяких важливих задач математичної фізики, зокрема, при розгляді крайових задач. Отже, обґрунтування принципу Релея пов'язано з доведенням того, що розв'язок відповідного різницевого рівняння прямує до розв'язку вихідного диференціального рівняння. Це питання розглянуто у [11, с. 6–29], де запропоновано спосіб обчислення порядку малості похибки n-го наближення для крайової задачі вигляду

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=q(x)y(x)+f(x),\quad y(0)=y(1)=0,\ \text{де}\ q(x)>0\,, \tag{1}$$

коли потрібно оцінити порядок малості виразу $\left|y(x_k)-y^{(n)}(x_k)\right|=\left|y_k-y_k^{(n)}\right|$, де $y_k^{(n)}$ – розв'язок системи у скінченних різницях:

$$\frac{\Delta^2y_k^{(n)}}{\Delta x^2}=q(x_k)y_k^{(n)}+f(x_k),\quad y_0^{(n)}=y_n^{(n)}=0. \tag{2}$$

Тут $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$, $\Delta^2y_k=\Delta y_{k+1}-\Delta y_k$, $\Delta x=n^{-1}$, $k=\overline{0,n-2}$, і припускається, що перші похідні функцій $f(x)$, $q(x)$ задовольняють умову Ліпшиця. Помітивши, що для функції Гріна $G(x,t)=\begin{cases}(1-x)t, t\le x,\\(1-t)x, t\ge x\end{cases}$ крайової задачі $\frac{d^2y(x)}{dx^2}=0$, $y(0)=y(1)=0$, має місце рівність $G_{i,k}=G^{(n)}(r_i,t_k)=\begin{cases}(1-i/k)k/n, k\le i,\\(1-k/n)i/n, k\ge i\end{cases}$, де $G^{(n)}(r_i,t_k)$ – функція Гріна відповідної різницевої крайової задачі вигляду $\frac{\Delta^2y_k^{(n)}}{\Delta x^2}=0$, $y_0^{(n)}=y_n^{(n)}=0$, $k=\overline{0,n-2}$, М.М. Боголюбов і М.М. Крилов отримали рівність:

$$(y_k^{(n)}-y_k)=-\sum_{i=0}^{n}G(x_k,t_i)q_i\left(y_i^{(n)}-y_i\right)\Delta t+\varepsilon_k^{(n)}\,, \tag{3}$$

де $\varepsilon_k^{(n)}$ – величина порядку малості n^{-2}. Потім помноживши (3) на вираз $(y_k^{(n)}-y_k)q_k\Delta t$ і підсумувавши по k та скориставшись нерівністю Коші, автори отримали оцінку: $\left|y_k^{(n)}-y_k\right|\le M\left|\varepsilon_k^{(n)}\right|$, де M – деяка стала.

В [11, с. 6–29] також розглянуто крайову задачу вигляду (1) з параметром

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\lambda q(x)y=f(x),\quad y(0)=y(1)=0\,, \tag{4}$$

для розв'язків якої і розв'язків апроксимуючого різницевого рівняння

$$\frac{\Delta^2y_k^{(n)}}{\Delta x^2}=\lambda q(x_k)y_k^{(n)}+f(x_k),\quad y_0^{(n)}=y_n^{(n)}=0,\quad \Delta x=n^{-1},\ k=\overline{0,n-2}, \tag{5}$$

отримано співвідношення:

$$y_k^{(n)}=y_k-\lambda\sum_{i=0}^{n}G(x_k,t_i)q_i\left(y_i^{(n)}-y_i\right)\Delta t+\varepsilon_k^{(n)}\,,\quad y_i^{(n)}=y_i-\sum_{i=1}^{n-2}z_i^{(k)}\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{(n)}g_iz_i^{(n)}\Delta t}{\lambda-\lambda_k^{(n)}}-\varepsilon_i^{(n)}\,, \tag{6}$$

де $z_i^{(k)}$, $k=\overline{1,n-2}$, – розв'язки однорідної системи в скінченних різницях вигляду:

$$\frac{\Delta^2z_i^{(k)}}{\Delta x^2}=\lambda_k^{(n)}q_iz_i^{(k)}\,,\quad z_0^k=z_n^k=0\,,\ k=\overline{1,n-2}, \tag{7}$$

при цьому величини $z_i^{(k)}$ відповідають значенням параметра $\lambda_1^{(n)},\lambda_2^{(n)},...,\lambda_{n-2}^{(n)}$, які автори називають різницевими характеристичними числами.

В [11, с. 6–29] показано, що порядки малості $\left|\lambda_k - \lambda_k^{(n)}\right|$ і $\left|\varphi_k - \varphi_k^{(n)}\right|$ рівні n^{-1}, де λ_k і $\varphi_k = \varphi(x_k)$ – k-те характеристичне число і k-та характеристична функція відповідного однорідного рівняння (4), а $\lambda_k^{(n)}$ і $\varphi_k^{(n)} = \varphi^{(n)}(x_k)$ – k-те характеристичне число і k-та характеристична функція крайової задачі (7), відповідно.

На основі формули (6) отримано оцінку $\left|y_k^{(n)} - y_k\right| \le M\left|\varepsilon_k^{(n)}\right|$, де величина $\left|\varepsilon_k^{(n)}\right|$ має порядок малості n^{-2}, M – деяка стала, що залежить від $\left|\lambda - \lambda_k\right|$. Тут λ_k – характеристичне число, найближче до даного значення параметра λ. Записані вище оцінки обґрунтовують принцип Релея для випадку задачі (4). Далі автори пов'язують задачу (4) та відповідну різницеву задачу (5) за принципом мінімуму, при якому гранична задача розглядається як рівняння Ейлера, яке відповідає умові мінімуму функціонала $I[y]$ для (4) і суми $S\left(y_i^{(n)}\right)$ для (5). У цьому випадку також визначається порядок малості відповідних величин і обґрунтовується принцип Релея.

М.М. Боголюбов і М.М. Крилов встановили наступну теорему [11, с. 23].

Теорема. *Якщо у найпростішій задачі варіаційного числення* $\int_0^1 f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx = I[y]$ *функція під знаком інтеграла задовольняє умови:*

1. $\frac{d^2 f}{dy'^2} \ge \alpha_1 > 0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \le -\beta < 0$,

2. $\left|f''_{yp}\right| \le M = const$, $\left|f'_y\right|, \left|f''_{yx}\right| \le N(p) + P(y) + C$, *де* M, N, P, C *– сталі,*

то можна не лише довести принцип Релея, але й обчислити порядок малості похибки, яка відповідає n-му наближенню.

Отже, у [11 с. 6–29] М.М. Боголюбов і М.М. Крилов не лише розробили методи наближеного розв'язання рівнянь математичної фізики, але й отримали оцінку похибки n-го наближення.

У 1928 р. у [48] М.М. Боголюбов і М.М. Крилов для оцінки порядку малості похибки для n-го наближення розв'язку диференціального рівняння запропонували новий метод, основою якого став метод скінченних різниць, а саме: вибираючи більш точне зображення для похідних та інтегралів різницями і сумами, вони в результаті отримали краще наближення. Того ж року, у [41] запропоновано метод побудови наближених розв'язків задач математичної фізики на основі методу відрізків, коли інтервал розбивається на n частин, а функції замінюються кусково-сталими функціями. Як наслідок, відповідне рівняння Штурма-Ліувілля є рівнянням зі сталими коефіцієнтами на кожному з інтервалів $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$, на кінцях яких має виконуватися умова Вейєрштрасса-Ердмана. У цій статті автори також отримали оцінки похибок для власних функцій і характеристичних чисел.

У 1929 р. М.М. Боголюбов і М.М. Крилов розглянули методи наближеного розв'язання інтегральних рівняннь. У статті [34] вивчено задачу про наближене розв'язання інтегрального рівняння, до якого можна звести задачу Діріхле. У статті [46] зазначено, що задача наближеного обчислення фундаментальних чисел, найближчих до заданого числа, можна сформулювати також для інтегральних рівнянь. В якості прикладу автори розглянули лінійне однорідне інтегральне рівняння $y(x) + \lambda\int_0^1 K(x,t)\,y(t)\,dt = 0$, ядро якого $K(x,t)$ є симетричним. У цілому ця стаття присвячена проблемі обчислення фундаментальних чисел. Автори показали, що застосування методу найменших квадратів та методу Рітца (згідно термінології М.М. Крилова – метод варіаційного алгоритму) дозволяє знайти корені визначника Фредгольма. У цій статті також встановлено зв'язок між методом найменших квадратів і методом Рітца. Протягом 1930–1931 рр. М.М. Боголюбов і М.М. Крилов продовжили розвиток методів наближеного розв'язання диференціальних рівнянь. Зокрема, вони застосували метод Рітца і метод зведення для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу.

У праці [17] М.М. Боголюбов за допомогою методу узагальненого гармонічного аналізу довів існування розв'язку мішаної крайової задачі вигляду

$$\begin{cases} A_0(x)u_{xx} + A_1(x)u_{xt} + A_2(x)u_{tt} + A_3(x)u_x + A_4(x)u_t + A_5(x)u = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

який і похідні якого, що входять у рівняння, на нескінченності зростають не швидше, ніж $\exp(Mt)$, де M – деяка стала, за умов виконання нерівностей $A_0(x) < -\alpha$, $A_2(x) > \alpha$, $A_5(x) > 0$, де $\alpha > 0$ – деяке число, і отримав оцінки для n-го наближення розв'язку задачі (8).

Значну увагу М.М. Боголюбов і М.М. Крилов приділили виконанню наукових досліджень на замовлення проектних організацій, які були пов'язані з питаннями наближеного обчислення розв'язків певних диференціальних рівнянь. Так, наприклад, Інститут споруд (Харків) запропонував розв'язати наступну задачу [14, с. 263]: необхідно знайти найбільше значення напружень, прогибів і моментів балки, що лежить на пружній основі, без знаходження функцій, які їх описують. Оскільки, положення балки описується диференціальним рівнянням 4-го порядку вигляду

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2 y}{dt^2}\right) + ky = y(x), \tag{9}$$

де E, k – сталі, $I = I(x)$, то з математичної точки зору це означає, що необхідно встановити обмеження для максимальних значень розв'язку $y(x)$ і його другої похідної $y''(x)$ диференціального рівняння (9). При цьому мають виконуватися певні крайові умови, а саме (один із зазначених нижче випадків):

а) $y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) = 0$ (балка з закріпленими кінцями);

б) $y''(0) = y''(l) = y'''(0) = y'''(l) = 0$ (балка вільно лежить);

в) $y(0) = y(l) = y'''(0) = y'''(l) = 0$ (балка шарнірно закріплена на кінцях).

Взагалі кажучи, згадані максимуми є деякими функціями від коефіцієнтів рівняння (9), але знайти ці максимуми у загальному випадку так само складно, як і знайти сам розв'язок. М.М. Боголюбов і М.М. Крилов, використовуючи метод послідовних наближень, отримали обмеження зверху та знизу для максимальних значень розв'язку задачі (9), при цьому запропоновані ними формули були зручними для практичного використання [14, с. 263–275].

ПРЯМІ МЕТОДИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. У 1923 р. М.М.Крилов опублікував статтю [50], в якій ним було доведено низку теорем, з яких як частинний випадок слідували відомі на той час узагальнення основної леми варіаційного числення.

Перші самостійні наукові дослідження М.М. Боголюбова стосувалися теоретико-функціонального напрямку варіаційного числення. Цей напрямок був започаткований Д. Гільбертом, який першим сформулював у загальному вигляді проблему існування абсолютного екстремуму інтеграла. Для розв'язання цієї проблеми він запропонував метод, який принципово відрізнявся від класичних методів варіаційного числення того часу, суттєво узагальнивши клас допустимих ліній за рахунок розгляду спряжених кривих. Саме це розширення класу допустимих ліній було принциповим моментом методу Д.Гільберта, який він застосував для розв'язання наступної задачі: серед деякого класу допустимих ліній необхідно знайти ту лінію, на якій досягається абсолютний мінімум інтегралу

$$J = \int_{S_2}^{S_1} F(x, y, x', y')\, dS\ .$$

При записі даного інтегралу використовується параметричне рівняння лінії, а в якості параметру використовується натуральний параметр (довжина дуги).

Довівши існування кривої, що надає абсолютний мінімум інтеграла J серед спряжених кривих, Д.Гільберт сформулював проблему про аналітичність розв'язку. Йому вдалося показати, що екстремальна крива задовольняє рівняння Ейлера і має неперервну другу похідну. У подальшому теоретико-функціональні методи Д.Гільберта були розвинені у працях італійського математика Л.Тонеллі, який використовуючи інтеграл Лебега, побудував теорію абсолютного екстремуму варіаційних задач вигляду

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\, dx\ ,$$

при цьому, він розглянув в якості допустимих лінії, що задаються абсолютно неперервними функціями. Тим самим, було розширено клас допустимих ліній, доведено існування абсолютного екстремуму для широкого класу варіаційних задач і встановлено аналітичність розв'язку задачі.

Значним кроком вперед у розвитку результатів Л. Тонеллі стали дослідження М.М. Боголюбова, які стосувалися розробки прямого методу розв'язання варіаційних задач і які було розпочато ним у його кандидатській дисертації "Про деякі нові методи в варіаційному численні" (1926) на прикладі найпростішої задачі варіаційного числення про абсолютний мінімум інтеграла Лебега вигляду

$$I(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx\ .$$

Тут припускається, що функція $f(x, y, z)$ – неперервна разом зі своїми частинними похідними до другого порядку включно, функція $y(x)$ — диференційована майже всюди на інтервалі (a, b), задовольняє умови $y(a) = a_1$, $y(b) = b_1$, де a, b, a_1, b_1 – деякі сталі числа, та її перша похідна є інтегрованою.

У 1927 р. було оголошено конкурс на здобуття премії імені Адольфо Мерлані, присудження якої було доручено Болонській Академії наук. При цьому було обумовлено, що премія присуджується за кращу наукову працю на тему "Вивчення прямими методами екстремальних властивостей криволінійного інтегралу $I(C) = \int_C F(x, y, x', y', x'', y'')\, dt$ " [3, с. 44]. Значення цього інтегралу для дослідження екстремальних властивостей помітив ще Д.Гільберт, який вивчав цей інтеграл, хоча і не зумів дослідити його повністю.

М.М. Боголюбов розглянув задачу знаходження мінімуму криволінійного інтеграла

$$\int_C F(x, y, x', y', x'', y'')\, dt\ , \tag{10}$$

де функція $F(x, y, x', y', x'', y'')$ є неперервною, якщо $x'^2 + y'^2 \neq 0$.

Він показав, що $I(C)$ завжди можна подати у вигляді

$$\int_0^{L_C} f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) ds\ , \tag{11}$$

де $f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)$ є неперервною функцією своїх аргументів і періодичною за θ з періодом 2π, x, y, θ, s – відповідно координати, кут напрямку і дуга поточної точки кривої C, L_C – довжина кривої C, а вирази (10) і (11) є еквівалентними, причому існує взаємно однозначне співвідношення [11, с. 52–53], при якому

$$f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) = F\left(x, y, \cos\theta, \sin\theta, -\frac{d\theta}{ds}\sin\theta, \frac{d\theta}{ds}\cos\theta\right),\quad F(x, y, x', y', x'', y'') = f\left(x, y, arctg\,\frac{y'}{x'}, \frac{y''x' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{2/3}}\right)\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Це дозволило М.М. Боголюбову отримати необхідні і достатні умови існування абсолютного екстремуму для інтеграла вигляду (10). Він також запропонував метод, який можна застосовувати як до напівнеперервних, так і до ненапівнеперервних функціоналів, в той час, як методи Л. Тонеллі можна було застосовувати лише до напівнеперервних функціоналів. Ці результати увійшли до праці М.М. Боголюбова "Застосування прямих методів до однієї проблеми варіаційного числення", яку він у 1927 р. подав на здобуття премії імені Адольфо Мерлані Болонської Академії наук. Згодом згадані результати отримали свій подальший розвиток у працях М.М. Боголюбова, які він доповів 4 квітня 1930 р. на семінарі з математичної фізики (керівник – М.М. Крилов), прочитавши доповідь "Застосування нових методів до однієї проблеми варіаційного числення", де було розглянуто нові екстремальні властивості інтеграла $I(C)=\int\limits_C F(x,y,x',y',x'',y'')\,dt$.

У статті [11, с. 51 – 97] та більш детально у монографії [13, с. 40 – 160], що присвячена викладу прямих методів, методу утворення мінімізуючих послідовностей, опису результатів Л.Тонеллі, вивченню загального (неквазірегулярного) випадку, властивостям розв'язків рівняння Ейлера, підсумовано основні результати М.М.Боголюбова з теорії варіаційного числення, які полягають у наступному:

1. Задача про абсолютний мінімум інтеграла $I(C)=\int\limits_0^{L_C} f\left(x,y,\theta,\dfrac{d\theta}{ds}\right)ds$, де $f\left(x,y,\theta,\dfrac{d\theta}{ds}\right)$ – неперервна функція своїх аргументів і періодична за θ з періодом 2π на множині M кривих, кути напрямку $\theta(s)$ яких мають обмежену варіацію, x,y,θ,s – відповідно, координати, кут напрямку і дуга поточної точки кривої C , L_C – довжина кривої C , не має, взагалі кажучи, розв'язку.

2. Якщо функція $f\left(x,y,\theta,\dfrac{d\theta}{ds}\right)$ задовольняє нерівність $\left|f\left(x,y,\theta,\dfrac{d\theta}{ds}\right)\right|\le A\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|^{\delta}+B$, де A,B – обмежені для обмежених x,y ; $\delta<1$ – фіксоване додатне число, то задача про абсолютний мінімум криволінійного інтеграла $I(C)$ в полі D кривих, кути напрямку яких абсолютно неперервні і задовольняють тим же крайовим умовам, що і криві поля M , не має розв'язку.

3. Нехай $f\left(x,y,\theta,\dfrac{d\theta}{ds}\right)$ є двічі диференційованою функцією, що задовольняє нерівність

$$A(x,y)\left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta}+B(x,y)\ge f\left(x,y,\theta,\frac{d\theta}{ds}\right)\ge k\left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta},$$

де k,δ – фіксовані додатні числа, $A(x,y),B(x,y)$ – обмежені при обмежених значеннях аргументів. Тоді границя (при $\varepsilon\to0$) нижньої межі криволінійного інтеграла $I(C)=\int\limits_0^{L_C} f\left(x,y,\theta,\dfrac{d\theta}{ds}\right)ds$ у полі $D_\varepsilon(C)$ кривих C класу P , що мають разом з C спільний окіл (ε) порядку 1, дорівнює криволінійному інтегралу $J(C)=\int\limits_0^{L_C}\Phi\left(x,y,\theta,\dfrac{d\theta}{ds}\right)ds$.

4. Якщо функція $f\left(x,y,\theta,\dfrac{d\theta}{ds}\right)$ задовольняє умови

$$f\left(x,y,\theta,\frac{d\theta}{ds}\right)\le A(x,y,\theta)\left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta}+B(x,y,\theta),\quad \left|f'_x\right|\le A(x,y,\theta)\left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta}+B(x,y,\theta), \tag{12}$$

$$\left|f'_y\right|\le A(x,y,\theta)\left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta}+B(x,y,\theta),\quad \left|f'_\theta\right|\le A(x,y,\theta)\left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta}+B(x,y,\theta), \tag{13}$$

де $A(x,y,\theta),B(x,y,\theta)$ – обмежені при обмежених значеннях аргументів, то для існування кривої, на якій досягається абсолютний мінімум інтеграла $I(C)$ в полі D , необхідно і достатньо, щоб серед кривих (завжди існуючих), на яких досягається абсолютний мінімум для $J(C)$ в полі D , існувала крива, яка не має спільної дуги з "особливими кривими" даної задачі відшукання мінімуму.

5. Якщо функція $f\left(x,y,\theta,\dfrac{d\theta}{ds}\right)$ задовольняє нерівності (12), (13), то в полі D існує принаймні один розв'язок рівняння Ейлера (що відноситься до $I(C)$), який складається зі скінченної кількості екстремалей. Більш того, яким би не було ε , завжди можна поставити йому у відповідність у полі D принаймні один розв'язок рівняння Ейлера (що відноситься до $I(C)$), на якому $I(C)$ набуває значення, яке відрізняється не більше ніж на ε від нижньої межі i_D .

ТЕОРІЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ. У 1923 р. датський математик Г. Бор запропонував поняття майже періодичної функції: *неперервна на всій дійсній осі функція $f(t)$ називається майже періодичною, якщо для всіх $\varepsilon>0$ існує таке число $L_\varepsilon>0$, що в кожному інтервалі довжини L_ε існує таке число τ_ε , що $\left|f(t+\tau_\varepsilon)-f(t)\right|\le\varepsilon$ для всіх $t\in(-\infty,+\infty)$.*

Це означення Бора узагальнює поняття періодичної функції. Задовго до Г. Бора відомий латвійський математик П. Боль запропонував поняття квазіперіодичної функції, згідно з яким неперервна на всій дійсній осі функція $f(t)$ називається квазіперіодичною, якщо існують такі лінійно незалежні дійсні числа $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m$, що будь-якому $\varepsilon>0$ можна поставити у відповідність η_ε так, що кожне число τ_ε , яке задовольняє умову $R(\tau_\varepsilon\omega_k)\le\eta_\varepsilon,\ k=\overline{1,m},$ є майже періодом функції $f(t)$, тобто $\left|f\left(t+\tau_{\varepsilon}\right)-f\left(t\right)\right|\le\varepsilon$ для всіх $t\in\left(-\infty,+\infty\right)$. Тут позначено $R(x)=\left|x-E(x)\right|$, де $E(x)$ – найближче до x ціле число. З означення П. Боля випливає, що будь-яку квазіперіодичну функцію можна подати у вигляді $f(t)=F(\omega_1 t,\dots,\omega_m t)$, де $F(x_1,\dots,x_m)$ – неперервна *1*–періодична функція своїх змінних.

На основі свого означення Г. Бор довів теорему про рівномірну тригонометричну апроксимацію.

У подальшому поняття майже періодичної функції Бора узагальнювалося, було доведено низку теорем про тригонометричну апроксимацію (Н. Вінер (1925), К. Валле-Пуссен (1927), С. Бохнер (1927), Г. Вейль(1927)).

М.М. Боголюбов у [26–28] розглянув питання, які стосувалися теорії майже періодичних функцій. Результати цих статей М.М. Боголюбов подав на семінарі кафедри математичної фізики у доповідях "До теорії майже періодичних функцій" (24 травня 1930 р.) та "Про тригонометричне зображення функцій на нескінченному інтервалі $\left(-\infty;+\infty\right)$" (6 листопада 1930 р.) [2, с. 123]). З приводу цих праць М.М. Крилов зазначив [9, с. 348]: "По теории почти периодических функций Н.Н. Боголюбовым исследовано главным образом влияние процессов суммирования произвольных функций на появление в пределе почти периодических свойств. С помощью этих исследований им установлены различные теоремы, относящиеся к равномерному приближению почти периодических функций тригонометрическими суммами.

С этими работами тесно связаны работы, написанные совместно с акад. Н.Н. Крыловым по заданиям различных отраслевых институтов (например, авиации, промэнергетики, сооружений), в которых исследуются в основном почти периодические свойства и устойчивость процессов".

У [11, с. 44–50] М.М. Боголюбов встановив, що теореми Г. Бора, Н. Вінера, Г. Вейля про апроксимацію майже періодичної функції на всій дійсній осі з допомогою формально побудованих сум $\sum\limits_p A_p e^{i\Lambda_p t}$, де Λ_p – дійсні числа, можна розглядати як прямі наслідки наступного загального твердження.

Теорема [11, с. 44–45]. *Нехай* $p_s^{(m)}\left(\varepsilon\right)$, $q_s^{(m)}\left(\varepsilon\right)$, $\tau_s^{(m)}\left(\varepsilon\right)$, $\delta_s^{(m)}\left(\varepsilon\right)$, $s=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm m$, $m=1,2,\dots$, *– послідовності чисел, з яких* $p_s^{(m)}\left(\varepsilon\right)$, $q_s^{(m)}\left(\varepsilon\right)$ *можуть бути комплексними, які задовольняють нерівності:*

$$\tau_{s+1}^{(m)}-\tau_s^{(m)}\ge\alpha>0,\ \left|\tau_{\pm m}^{(m)}\right|\le am,\ \sum_{s=-m}^{m}\left|p_s^{(m)}\right|^2(2m+1)\le A,$$

$$\delta_{s+1}^{(m)}-\delta_s^{(m)}\ge\alpha>0,\ \left|\delta_{\pm m}^{(m)}\right|\le am,\ \sum_{s=-m}^{m}\left|q_s^{(m)}\right|^2(2m+1)\le A,$$

де α, a, A *– додатні сталі.*

Нехай $f_m\left(t\right)$, $m\to\infty$, *– деяка послідовність функцій, які можуть набувати комплексні значення, і які задовольняють умову* $\dfrac{1}{6am}\int\limits_{-3am}^{3am}\left|f_m\left(t\right)\right|^2dt\le B=const$, $m\to\infty$. *Тоді для будь-якого додатного числа* $\delta\le\alpha$ *з послідовності* $\left[m\right]$ *можна виділити таку послідовність* $\left[\mu\right]$, $\mu\to\infty$, *що у кожному скінченному інтервалі дійсної осі має місце рівномірна збіжність*

$$\frac{1}{4\delta^2}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\left\{\sum_{s=-\mu}^{s=+\mu}\sum_{r=-\mu}^{r=+\mu}p_s^{(\mu)}q_r^{(\mu)}f_\mu\left(t+\tau_s^{(\mu)}+\delta_r^{(\mu)}\right)\right\}dt^2\xrightarrow[\mu\to\infty]{}\sum_{p=1}^{+\infty}A_pe^{i\Lambda_pt},$$

де Λ_p *– дійсні числа і ряд* $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\left|A_p\right|$ *збігається.*

У статті [11, с. 98–108] М.М. Боголюбов продовжив вивчення майже періодичних функцій і довів для них низку теорем про тригонометричну апроксимацію. Зокрема, він показав, що основні теореми теорії майже періодичних функцій є наслідком деяких загальних теорем, що стосується довільних обмежених функцій. М.М. Боголюбов довів наступні дві теореми.

Теорема IV [11, с. 103–104]. *Якщо кожному числу* $\varepsilon>0$ *можна поставити у відповідність такі числа* $l\left(\varepsilon\right)$, $\alpha\left(\varepsilon\right)$, $A\left(\varepsilon\right)$, $k\left(\varepsilon\right)$, *де* $k\left(\varepsilon\right)$ *– ціле, так, що у кожному інтервалі довжини* $l\left(\varepsilon\right)$ *існують числа* $\tau_{r,\varepsilon}$, $r=1,2,\dots,k\left(\varepsilon\right)$, *яким можна поставити у відповідність числа* $A_{r,\varepsilon}$, $r=1,2,\dots,k\left(\varepsilon\right)$, *так, що виконуються нерівності*

$$\left|f\left(t\right)-\sum_{r=1}^{k(\varepsilon)}A_{r,\varepsilon}f\left(t+\tau_{r,\varepsilon}\right)\right|\le\varepsilon,\ \ \left|A_{r,\varepsilon}\right|\le A\left(\varepsilon\right),\ \tau_{r+1,\varepsilon}-\tau_{r,\varepsilon}\ge\alpha\left(\varepsilon\right),\ A\left(\varepsilon\right)\left(1+k\left(\varepsilon\right)\right)\le A=const,$$

і якщо при цьому функція $f\left(t\right)$ *є неперервною і обмеженою в кожному інтервалі, то цю функцію можна рівномірно апроксимувати тригонометричними сумами.*

Теорема V [11, с. 106–107]. *Якщо кожному числу* $\varepsilon>0$ *можна поставити у відповідність такі числа* $l\left(\varepsilon\right)$, $\alpha\left(\varepsilon\right)$, $A\left(\varepsilon\right)$, $k\left(\varepsilon\right)$, *де* $k\left(\varepsilon\right)$ *– ціле, так, що у кожному інтервалі довжини* $l\left(\varepsilon\right)$ *існують числа* $\tau_{r,\varepsilon}$, $r=1,2,\dots,k\left(\varepsilon\right)$, *яким можна поставити у відповідність числа* $A_{r,\varepsilon}$, $r=1,2,\dots,k\left(\varepsilon\right)$, *так, що виконуються нерівності*

$$\int\limits_{t-1}^{t+1}\left|f\left(t\right)-\sum_{r=1}^{k(\varepsilon)}A_{r,\varepsilon}f\left(t+\tau_{r,\varepsilon}\right)\right|^2dt\le\varepsilon,\ \left|A_{r,\varepsilon}\right|\le A\left(\varepsilon\right),\ A\left(\varepsilon\right)\left(1+k\left(\varepsilon\right)\right)\le A=const,\ \tau_{r+1,\varepsilon}-\tau_{r,\varepsilon}\le\alpha\left(\varepsilon\right),$$

і якщо також $\dfrac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left|f\left(t\right)\right|^2dt\le C=const$, $T\to\infty$, *то кожному додатному* ε *можна поставити у відповідність таку тригонометричну суму* $P_\varepsilon\left(t\right)$, *що* $\int\limits_{t-1}^{t+1}\left|f\left(t\right)-P_\varepsilon\left(t\right)\right|^2dt\le\varepsilon$ *для всіх дійсних значень* t.

Теореми IV, V узагальнюють теореми Г. Бора і Н. Вінера про тригонометричну апроксимацію майже періодичних функцій.

ІНЖЕНЕРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ. Теорія коливань зацікавила М.М. Боголюбова ще у юності. О.М. Боголюбов у [3, с. 40] пригадує: " Уважне опрацювання товстих томів Хвольсона, у яких було зібрано все, що фізики знали на кінець XIX століття, наштовхнуло його (М.М. Боголюбова, прим. авторів) думку на одне явище, яке постійно з'являлось в усіх феноменах фізики – коливання. Очевидно, в коливаннях містилась суть більшості, а можливо і всіх, феноменів природи, які так детально і точно описували фізики". У 1925 р. М.М. Боголюбов самостійно виконав наукову роботу [11, с. 40–43], якою було започатковано один з напрямків спільної наукової діяльності М.М. Боголюбова і М.М. Крилова – дослідження нелінійних коливань і вивчення нелінійних диференціальних рівнянь, якими можна описати нелінійні коливальні процеси.

У вступі до статті [11, с. 40–43] М.М. Боголюбов зауважив, що у техніці доводиться часто мати справу з коливальними рухами. Якщо припустити, що основна сила пропорційна зміщенню, то рух матеріальної точки описується диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами і у цьому випадку вимушені коливання обчислюються дуже просто. Але, якщо основна сила не пропорційна зміщенню, то питання про обчислення вимушених коливань значно ускладнюється. Такий рух можна описати, якщо основну силу подати у вигляді многочлена третього степеня відносно зміщення.

У [11, с. 40–43] М.М. Боголюбов довів збіжність методу послідовних наближень для розв'язку рівняння Дюфінга $\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha x-\gamma x^3=k\sin\omega t$, коли $x\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=x(t)$, $x(0)=0$, за умови, що система є резонансною, тобто $\alpha<\frac{8\omega^2}{\pi^2}$.

Перше наближення будується методом Рітца. Цей метод запропонував Дюфінг, проте він не встановив його збіжність.

Низка дослідницьких праць М.М. Боголюбова і М.М. Крилова стосується вивчення коливальних процесів в радіотехнічних пристроях і електричних машинах. Зокрема, вивчаючи принципи роботи і будову індикаторів, вони розглядали питання загальної теорії синхронізації, використовуючи методи наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, при цьому значну увагу приділяли вивченню явища синхронізації, яке мало важливе значення при створенні індикаторних приладів. У 1928 р. у спільній статі [44] М.М. Боголюбов і М.М. Крилов розглянули питання про інтегральну синхронізацію у сенсі Блонделя для випадку, коли досліджувана система описується диференціальним рівнянням другого порядку вигляду $m\ddot{q}+\chi\dot{q}+\rho q=k(t)$, де $k(t)$ – T-періодична функція. Автори отримали значення верхньої межі для пунктуальної похибки повної синхронізації у сенсі Блонделя, а також значення для середньої квадратичної похибки.

Стаття [7] присвячена знаходженню значень параметрів m, λ, c для рівняння $m\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$, при яких власні коливання системи, що описується цим рівнянням, затухають якомога швидше, тобто для випадку так званої часткової синхронізації у сенсі Корню, і при цьому періодичний розв'язок цього рівняння повинен майже не відрізнятися від розв'язку, який відповідає повній або інтегральній синхронізації у сенсі Блонделя. Використовуючи наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь, М.М. Боголюбов і М.М. Крилов отримали оцінки для середніх квадратичних і пунктуальних похибок повної синхронізації (у сенсі Блонделя) за умови, що часткова синхронізація у сенсі Корню має місце.

Стаття [43] присвячена уточненню так званих індикаторних діаграм. У ній розглянуто диференціальне рівняння $m\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$ і розроблено метод, який автори назвали "методом зміщення діаграм", за допомогою якого, застосовуючи звичайні графічні способи, можна "корегувати діаграми", тобто за даною діаграмою будувати інші діаграми, які в певному сенсі апроксимують графік шуканої функції з наперед заданою точністю. Тут також отримано оцінки для середньої квадратичної і пунктуальної похибок у сенсі Корню і у сенсі Блонделя.

У 1932 р. було надруковано 9 спільних праць М.М. Боголюбова і М.М. Крилова [15, 16, 19, 33, 36, 37, 39, 40, 47], де вивчалися нелінійні коливання. Три з цих праць [36, 39, 47] опубліковані у трьох послідовних повідомленнях Паризької Академії наук і містили нові методи, за допомогою яких можна досліджувати як періодичні, так і квазіперіодичні коливання. У статті [39] отримано перші наближення для розв'язку рівняння $\frac{d^2I}{dt^2}+\omega^2I=\varepsilon f\left(\frac{dI}{dt}\right)+E\sin\alpha t$, яке описує нелінійні коливання і зустрічається у радіотехніці [21, с. 390]. Автори вивчили квазіперіодичні режими, що виникають в автоколивальній системі під дією зовнішньої періодичної сили і отримали низку результатів, що стосуються аналізу резонансних явищ у нелінійному випадку, причому, крім основного резонансу розглянуто і так звані демультиплікаційні резонанси, які, як і основний резонанс, характеризуються зникненням явища биття всередині деяких зон, ширину і положення яких було визначено у цій праці.

У поданій на Перший міжнародний електротехнічний конгрес (Париж, 1932 р.) доповіді [40] М.М. Боголюбов і М.М.Крилов запропонували нові методи нелінійної теорії регулювання. Зокрема, вони розробили прийом, за допомогою якого систему n диференціальних рівнянь з n невідомими, що описують роботу n синхронних машин, завжди можна звести до одного рівняння з одним невідомим і отримали умови, яким мають задовольняти моменти зовнішніх навантажень, дослідили вплив моменту затухання на стійкість системи за Ляпуновим, вивчили критерії стійкості її роботи, а також проаналізували області динамічної та статичної стійкості. Ці результати того року були опубліковані у монографії [16] і мали важливе практичне значення, зокрема. при побудові електростанцій.

Окрім задачі про стійкість паралельної роботи електричних машин у 1932 р. за завданням Харківського авіаційного заводу М.М. Боголюбов і М.М. Крилов проаналізували повздовжню стійкість літака для випадку його польоту з вимкненим двигуном і нерухомими рулями. Дослідження проведено шляхом поширення методів Гюльдена і Ліндштедта на неконсервативну систему вигляду $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_i^2x_i=\varepsilon f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\frac{dx_1}{dt},\frac{dx_2}{dt},\ldots,\frac{dx_n}{dt}\right)$, де $i=1,2,\ldots,n$. Результати опубліковано у монографії [15], в якій автори розпочали роботу над створенням асимптотичних методів нелінійної механіки.

ВИСНОВКИ. Проаналізовано наукову діяльність М.М. Боголюбова періоду 1923–1932 рр. і досліджено еволюцію напрямків його наукової творчості протягом зазначеного періоду часу, аналіз якої дозволяє встановити зв'язок між різними напрямками наукових досліджень вченого, розкрити процес еволюції його наукових поглядів та ідей, прослідкувати, за яких умов і під впливом яких факторів відбувалося формування стилю наукової діяльності М.М. Боголюбова. Встановлено, що протягом 1923–1932 рр. основними напрямками наукових досліджень були: варіаційні методи наближеного розв'язання рівнянь математичної фізики і оцінка похибок наближеного інтегрування, теорія майже періодичних функцій, прямі методи варіаційного числення, інженерні задачі теорії коливань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Архів Інституту математики НАН України, особова справа М.М.Боголюбова, арк. 14–20. 2. Боголюбов А.Н. Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов // Историко-математич. исследования. Серия 2. – М.: "Янус", 1996. – Вып. 1 (36), № 2. – С. 118–127. 3. Боголюбов А.Н. Н.Н. Боголюбов. Жизнь. Творчество. – Дубна: ОИЯИ, 1996. – 182 с. 4. Боголюбов М.М. Нові методи в варіацийному численні. – Харків; Київ: Техтеоретвидав., 1932. – 111 с. 5. Боголюбов М.М. Про наближене розв'язання диференціальних рівнянь // Збірник праць Ін-ту технічної механіки ВУАН. – 1927. – Вип.2. – С. 79–87. 6. Боголюбов М.М. Про обчислення вимушених хитань, що справджують певні нелінійні диференціальні рівняння // Зб. праць Ін-ту тех. механіки ВУАН. – 1927. – Вип.2. – С. 89–92. 7. Боголюбов М.М., Крилов М.М. До теорії синхронізації // Записки фіз.-мат. відділу ВУАН. – К., 1930. – Т. 4, вип.4. – С. 299–302. 8. Боголюбов М.М., Крилов М.М. Про Rayleigh'ів принцип в теорії диференціальних рівнянь математичної фізики та про одну Ейлерову методу в варіяційнім численні // Труди фіз.-мат. відділу ВУАН. – К., 1926. – Т. 3, вип.3. – С. 39–57. 9. Боголюбов Н.Н. Боголюбов Николай Николаевич // Физики о себе. – Л.: Наука, 1990. – С. 345–348.10. Боголюбов Н.Н. Избранные труды: в 3 т. / Ред.-сост. Ю.А.Митропольский. – К.: Наукова думка, 1969. – Т. 1. – 646 с. 11. Боголюбов Н.Н. Избранные труды по математике / Под ред. В.С.Владимирова, А.Д.Суханова; ред.-сост. А.Д.Суханов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 560 с. 12. Боголюбов Н.Н. Собрание научных трудов: в 12 т. / Ред.-сост. А.Д.Суханов. – М.: Наука, 2005 – 2009. 13. Боголюбов Н.Н. Собрание научных трудов: в 12 т. / Ред.-сост. А.Д.Суханов. – М.: Наука, 2005. – Т. 1. – 776 с. 14. Боголюбов Н.Н. Собрание научных трудов: в 12 т. / Ред.-сост. А.Д.Суханов. – М.: Наука, 2005. – Т. 2. – 832 с.15. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. Исследование продольной устойчивости аэроплана. – М.; Л.: Гос. Авиаавтотрактиздат., 1932. – 60 с.16. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. О колебаниях синхронных машин. Об устойчивости параллельной работы n синхронных машин. – Харків; Київ: Енерговидав, 1932. – 98 с. 17. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. О некоторых теоремах, касающихся существования интегралов дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа // Известия АН СССР, Отделение матем. и естеств. наук. – 1931. – № 3. – С. 323–344. 18. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. Определение максимальных значений некоторых величин (прогибов, моментов и т. д.) с помощью специальных методов, выработанных для снижения мажораций этих величин // Известия АН СССР, Отделение матем. и естеств. наук. – 1931. – № 6. – С. 771–785.19. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. Основные проблемы нелинейной механики. – М.; Л.: Гостехтеоретикоиздат., 1932. – 23 с. 20. Крылов Н.М. Избранные труды: в 3 т. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – Т. 2. – 307 с. 21. Крылов Н.М. Избранные труды: в 3 т. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – Т. 3. – 397 с. 22. Митропольський Ю.О., Боголюбов О.М. Микола Митрофанович Крилов. – К.: Наукова думка, 1979. – 90 с. 23. Николай Николаевич Боголюбов // Материалы к библиографии ученых СССР: Серия математики, вып 8. – М.: Изд-во АН СССР, 1959 – 50 с. 24. Самойленко А.М. Н.Н.Боголюбов и нелинейная механика // Успехи матем. наук. – 1994. Т. 49. – вып. 5(299). – С. 103–146. 25. Bogoliouboff N.N. Sur l'application des methodes directes a quelques problemes du calcul des variations // Annali di matematica pura ed applicata. Serie 4. – 1931. – T. 9. – P. 195–241. 26. Bogoliouboff N.N. Sur l'approximation des fonctions par les sommes trigonometriques // ДАН СССР, А. – 1930. – № 6. – С. 147–152. 27. Bogoliouboff N.N. Sur l'approximation trigonometrique des fonctions dans l'intervalle infini. I. // Известия АН СССР, Отделение матем. и естеств. наук. Сер. VII. – 1931. – № 1. – С. 23–54. 28. Bogoliouboff N.N. Sur l'approximation trigonometrique des fonctions dans l'intervalle infini. II (О тригонометрическом приближении функций на бесконечном интервале. II. // Известия АН СССР, Отделение матем. и естеств. наук. Сер. VII. – 1931. – № 2. – С. 149–160. 29. Bogoliouboff N.N. Sur le theoreme fondamental de l'algebre // Bolletino della Unione Matematica Italiana. – 1932. – Ann. 7. – P. 65–66. 30. Bogoliouboff N.N. Sur quelques methodes nouvelles dans le calcul des variations // Annali di matematica pura ed applicata. Serie 4. – 1929. – T. 7. – P. 249–271. 31. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Application de la methode de l'algorithme variationnel a la solution approchee des equations differentielles aux derivees partielles du type elliptique. Estimation des erreurs qu'on commet en s'arretant a la n-eme approximation dans le calcul des valeurs et des fonctions singulieres. Cas general de l'equation non homogene // Известия АН СССР, Отделение физ.-мат. наук. – 1930. – № 1. – С. 43–71. 32. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Application de la methode de l'algorithme variationnel a la solution approchee des equations differentielles aux derivees partielles du type elliptique. Estimation des erreurs qu'on commet en s'arretant a la n-eme approximation dans le calcul des valeurs et des fonctions singulieres. Cas general de l'equation non homogene // Известия АН СССР, Отделение физ.-мат. наук. – 1930. – № 2. – С. 105–114. 33. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Fundamental problems of the non-linear mechanics // Congres international des mathematiciens. – Zürich, 1932. – V. 2. – P. 270–272. 34. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. La solution approchee du probleme de Dirichlet // ДАН СССР, А. – 1929. – № 12. – С. 284–288. 35. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. La solution approchee du probleme de Dirichlet. Resume // Vortrage aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwander Gebiete (Aachen, 1929). – Berlin: Springer, 1930. – S. 53 – 55. 36. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Les phenomenes de demultiplication de frequence en radiotechnique // Comptes rendus de l'Academie des Scienses, Paris. – 1932. – T. 194. – P. 1119–1122. 37. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Methodes nouvelles pour la solution de quelques problemes mathematiques se rencontrant dans la science des constructions. – Киев, б. и., 1932. – 96 с. 38. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. On Rayleigh's principle in the theory of differential equations of mathematical physics and on Euler's method in calculus of variations // Annals of Mathematics. Serie II. – 1928. – vol. 29, №. 3. – P. 255–276. 39. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Quelques exemples d'oscillation non-lineaires // Comptes rendus de l'Academie des Scienses, Paris. – 1932. – T. 194. – P. 957–960. 40. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Recherché sur la stabilite statique et la stabilite dynamique des machines synchrones // Comptes rendus des travaux de la Troisieme section. – Paris: Gauthier – Villars, 1932. – P. 179–205. – (Congres Intern. d'electricite, v. 4, 3 section, t. 1, rapport 14). 41. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sopra il metodo dei coefficienti constanti (metodo dei tronconi) per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della fisica matematica // Bolletino della Unione Matematica Italiana. – 1928. – Ann. 7, №. 2. – P. 72–77. 42. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur la justification du principe de Rayleigh par l'ordre de l'erreur commise a la n-me approximation // Comptes rendus de l'Academie des Scienses, Paris. – 1926. – T. 183, N.9. – P. 476–479. 43. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur la theorie des appareiles indicateurs // Journal de Physique et le Radium. Ser. 7. – 1930. – T. 1, № 3. – P. 77–92. 44. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur la theorie mathematique des oscillographes // Comptes rendus de l'Academie des Scienses, Paris. – 1928. – T. 187. – P. 938–940. 45. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur quelques criteres concernant l'existance des derivees d'une fonction d'une variable reelle // Збірник Математично-природописно-лікарської секції Наукового т-ва ім. Т.Г.Шевченка. – Львів, 1928. – Т. 27. – С. 215–221. 46. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur le calcul des racines de la transcendante de Fredholm les plus voisines d'un nombre donne par les methodes des moindres carres et de l'algorithme variationnel // Изв. АН СССР, ОФМН. – 1929. – №5. – С. 471–488. 47. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur le phenomena de l'entralnement en radiotechnique // Comptes rendus de l'Academie des Scienses, Paris. – 1932. – T. 194. – P. 1064–1066. 48. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur les methodes des differences finies pour la resolution approchee des problemes fondamentaux de la physique mathematique // Comptes rendus de l'Academie des Scienses, Paris. – 1928. – T. 186. – P. 422–425. 49. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur un probleme de l'electrostatique // Тр. Харьковского электротехн. ин-та. – 1931. – № 1. – С. 7–19. 50. Kryloff N.M. Sur differentes generalisations du lemme fondamental du calcul des variations // Записки фіз.-мат. відділу ВУАН. – 1923. – Т.1, вип. 1. – с. 8–11.

Надійшла до редколегії 11.02.13

М. Гордиенко, асп.,
В. Самойленко, д-р физ.-мат. наук

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ Н.Н. БОГОЛЮБОВА ПЕРИОДА 1923–1932 ГОДОВ

Проанализированы научные труды Н.Н. Боголюбова периода 1924–1932 годов и исследован процесс эволюции направлений его научной деятельности

M. Gordienko, PhD graduate, V. Samoylenko, Full Doctor

MATHEMATICAL RESEARCHES OF M.M. BOGOLIUBOV OF TIME PERIOD 1923–1932

Scientific researches by M.M. Bogoliubov of time period 1924–1932 are analyzed and evolution process of his scientific activity in mentioned time period is studied.