Список використаних джерел

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1988.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., 1977.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1976. 4. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К., 2000.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1953.
6. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Пг., 1917.
7. Фещенко С.Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. – 1955. – Том 7, № 2. – С. 167 – 179.
8. Фещенко С.Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. – 1955. – Том 7, № 4. – С. 252 – 243.
9. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К., 1966.
10. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. – М., 1966.
11. Шкиль Н.И. Асимптотическое поведение решений линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения // Укр. матем. журн. – 1962. – Том 16, № 4. – С. 383 – 392.
12. Шкиль Н.И. Построение общего асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 1. – С. 163 – 169.
13. Шкиль Н.И. О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами: дис. ... докт. физ.-мат. наук. – К., 1968.
14. Шкиль Н.И. О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка // Arch. Math. (Brno). – 1987. – 23, № 1. – P. 53 – 62.
15. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К., 1989.
16. Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – Vol. 9. – P. 219 – 231.
17. Hukuhara M. Sur les proprietes asymptotiques des solutions d'un systeme d'equations differentielles lineaires contenant un parametre // Mem Fac. Engin. Kyusyu UniVol. – 1937. – Vol. 8. – P. 249 – 280.
18. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I // Funkcialaj Ekvacioj. – 1963. – Vol. 5. – P. 71 – 134.
19. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II // Funkcialaj Ekvacioj. – 1964. – Vol. 6. – P. 89 – 141.
20. Iwano M., Sibuya Y. Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter // Kodai Math. Semi. Rep. – 1963. – Vol. 15. – P. 1 – 28.
21. Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losunger linearer Differential systeme als Functionen eines Parameteres // Math. Anal. – 1907. – Vol. 63. – S. 277 – 300.
22. Sibuya Y. Sur reduction analitique d'un systeme d'equation differentielles ordinair lineaires contenant un parameter // Journ. Fac. Sci. UniVol. Tokyo. – 1958. – Vol. 7, № 5. – P. 527 – 540.

Надійшла до редколегії 11.12.13

П. Самусенко, канд. физ.-мат. наук, доц., М. Шкіль, д-р фіз.-мат. наук, проф.
НПУ имени М.П. Драгоманова, Киев

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С помощью метода возмущенного характеристического уравнения построены асимптотические решения линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения. Полученные результаты обобщены для аналогичных систем с периодическими коэффициентами.

P. Samusenko, PhD, M. Shkil, Full Doctor
National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv

ASYMPTOTICAL INTEGRATION OF LINEAR SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Using the perturbed characteristic equation method, the asymptotic solutions of the linear singularly perturbed system of differential equations in the case of multiples roots of the characteristic equation is constructed. The results generalized for similar systems with periodic coefficients.

УДК 517.9

Т. Тищук, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

КЛАСИФІКАЦІЯ ПЕРІОДИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ НЕПЕРЕРВНИХ УНІМОДАЛЬНИХ ОПУКЛИХ ВГОРУ ВІДОБРАЖЕНЬ ВІДРІЗКА В СЕБЕ

Розглядається задача про класифікацію циклів неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе за взаємним розміщенням точок циклу. Запропоновано поняття опуклої вгору (опуклої вниз) циклічної перестановки, підозрілого на типовий вектора, типового вектора опуклої вгору циклічної перестановки. Сформульовано означення ваги опуклої вгору циклічної перестановки, за допомогою якого визначається відношення лінійного порядку на просторі опуклих вгору циклічних перестановок. Дано леми про структуру типового вектора, єдиність типу циклу та відношення лінійного порядку на множині опуклих вгору циклічних перестановок.

ВСТУП. Теорія одновимірних динамічних систем посідає особливе місце в загальній теорії динамічних систем у зв'язку з тим, що такі системи допускають достатньо повний опис і при цьому демонструють складні нелінійні ефекти. Прикладом такої динамічної системи є динамічна система, що визначається за допомогою ітерацій неперервного відображення відрізка в себе. Навіть у випадку, коли розглядуване неперервне відображення є унімодальним, тобто в деякому сенсі найпростішим нелінійним відображенням відрізка в себе, відповідна динамічна система, яку воно породжує, демонструє складну поведінку та співіснування періодичних траєкторій довільного періоду [4].

В теорії одновимірних динамічних систем отримано цілу низку глибоких результатів, які знайшли своє застосування, зокрема, у теорії різницевих та диференціально-різницевих рівнянь і теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними [5].

Однією з основних задач теорії динамічних систем є визначення типів траєкторій динамічної системи та встановлення взаємозв'язків між різними типами траєкторій [2,4]. Для періодичних траєкторій дискретних динамічних систем фундаментальним результатом дослідження такої задачі є теорема Шарковського про співіснування періодичних траєкторій різних періодів для неперервних відображень відрізка в себе [3]. За допомогою цієї теореми можна отримати відомості про те, цикли яких періодів є у розглядуваного відображення. Проте цей важливий результат не дає змоги отримати інформацію про взаєморозташування циклів (чи принаймні, їх мінімальних точок), які співіснують відповідно до теореми Шарковського.

У даній статті досліджується задача про упорядкування циклів неперервного відображення відрізка в себе не за періодами (як у теоремі Шарковського), а за взаємним розташуванням точок циклів.

Така класифікація дає змогу, зокрема, розрізняти між собою цикли одного періоду, чого не можна досягнути, використовуючи класифікацію за періодами. Для розв'язання поставленої задачі використовується теорія перестановок. Клас відображень, що досліджується, звужено з неперервних відображень відрізка в себе до унімодальних опуклих вгору неперервних відображень, оскільки динаміка таких відображень є досить складною та відображає практично всі можливі сценарії в теорії одновимірних динамічних систем.

ПОНЯТТЯ ТИПОВОГО ВЕКТОРА ТА ЙОГО ВАГИ. Нехай $I=[0;1]$, $f\in C^0(I;I)$ – довільна неперервна функція, $B=\{\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n\}$ – періодична траєкторія періоду n (цикл періоду n) відображення $f:I\to I$, де $\beta_1=\min\limits_{1\le i\le n}\beta_i$, $f(\beta_i)=\beta_{i+1}$ для всіх $i=\overline{1,n-1}$ та $f(\beta_n)=\beta_1$.

Якщо занумерувати елементи множини B так, щоб виконувались нерівності $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n$, та вважати, що $f(\beta_i)=\beta_{j_i}$, де $j_i, i=\overline{1,n}$, то циклу B можна поставити у відповідність циклічну перестановку [1] наступного вигляду

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Для циклічної перестановки (1) її циклічним зображенням є рядок вигляду:

$$\left(1,\ \pi(1),\ \ldots,\ \pi^{n-1}(1)\right). \tag{2}$$

Отже, довільному циклу періоду n неперервного відображення відрізка в себе можна поставити у відповідність єдину циклічну перестановку π порядку n, циклічним зображенням якої є рядок вигляду (2).

Наприклад, для періодичної траєкторії $A=\left\{\frac{10}{33},\frac{14}{33},\frac{20}{33},\frac{26}{33},\frac{28}{33}\right\}$ періоду 5 кусково-лінійного відображення

$$g(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le\frac{1}{2},\\ -2(x-1), & \frac{1}{2}<x\le 1,\end{cases} \tag{3}$$

відповідна циклічна перестановка має вигляд

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Розглянемо спеціальний клас циклічних перестановок порядку n вигляду (1), для кожної з яких існує єдине число $i^{\Diamond}\in\{2,\ \ldots,\ n-1\}$, для якого $\pi\left(i^{\Diamond}\right)=n$ та $j_i<j_{i+1}$ при $1\le i<i^{\Diamond}$ і $j_i>j_{i+1}$ при $i^{\Diamond}\le i<n$. Називатимемо такі циклічні перестановки опуклими вгору циклічними перстановками. Аналогічно, циклічну перестановку порядку n вигляду (1), для якої існує єдине число $i^{\Diamond}\in\{2,\ \ldots,\ n-1\}$, для якого $\pi\left(i^{\Diamond}\right)=1$ та $j_i>j_{i+1}$ при $1\le i<i^{\Diamond}$ і $j_i<j_{i+1}$ при $i^{\Diamond}\le i<n$, називатимемо опуклою вниз циклічною перестановкою.

Згадана вище циклічна перестановка (4) є опуклою вгору циклічною перестановкою, для якої $i^{\Diamond}=2$.

Надалі розглядатимемо періодичні траєкторії опуклих вгору унімодальних відображень та відповідні їм опуклі вгору циклічні перестановки. Для циклічного зображення (2) опуклої вгору циклічної перестановки π порядку n введемо позначення $k_i=\pi^{i-1}(1)$, $i=\overline{1,n}$. Оскільки π – опукла вгору циклічна перестановка, то $k_1=1$ і $k_n=n$. Отже, циклічне зображення (2) перестановки π можна записати наступним чином

$$\left(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n\right). \tag{5}$$

Для опуклої вгору циклічної перестановки (4) циклу A відображення (3) її циклічним зображенням є рядок вигляду

$$\left(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2\ \ 5\right). \tag{6}$$

Розіб'ємо циклічне зображення (5) на блоки двома способами. Спочатку застосуємо наступну схему розбиття: кожне з чисел рядка послідовно порівнюємо з числом k_{n-1} та відносимо у блоки з непарними номерами ті числа, що менші за k_{n-1}, а у блоки з парними номерами ті числа, що не менші за k_{n-1}. В результаті отримаємо рядок вигляду

$$\left(k_1,\ \ldots,\ k_{m_1}\mid k_{m_1+1},\ \ldots,\ k_{m_1+l_1}\mid\ldots\mid k_{m_1+l_1+\ldots+m_s+1},\ldots,\ k_n\right), \tag{7}$$

де символ $|$ розділяє сусідні блоки.

Тепер змінимо умову потрапляння в парні та непарні блоки наступним чином: у блоки з непарними номерами віднесемо ті числа, що не більші за k_{n-1}, а у блоки з парними номерами ті числа, що більші за k_{n-1}. Аналогічно попередньому випадку, отримаємо рядок вигляду

$$\left(k_1, \ldots, k_{m'_1} \mid k_{m'_1+1}, \ldots, k_{m'_1+l'_1} \mid \ldots \mid k_{m'_1+l'_1+\ldots+m'_s+1}, \ldots, k_n\right). \tag{8}$$

За побудовою кількість блоків у рядках (7) та (8) є парною, адже $k_n = n > k_{n-1}$, тобто кожен з рядків закінчується блоком з парним номером $2s$ та $2s'$ відповідно і виконуються наступні рівності

$$\sum_{i=1}^{s}\left(m_i + l_i\right) = n, \qquad \sum_{i=1}^{s'}\left(m'_i + l'_i\right) = n.$$

У випадку циклічного зображення (6) опуклої вгору циклічної перестановки (4) рядки (7) і (8) можна відповідно записати наступним чином

$$\left(1 \mid 3,\ 4,\ 2,\ 5\right), \tag{9}$$

$$\left(1 \mid 3,\ 4 \mid 2 \mid 5\right), \tag{10}$$

де рядок (9) складається з двох блоків, а рядок (10) складається з чотирьох блоків.

Числа $m_1, m_2, \ldots, m_s$ рядка (7) (відповідно числа $m'_1, m'_2, \ldots, m'_s$ рядка (8)) рівні кількості послідовних точок циклу, що знаходяться на лівій гілці, а числа $l_1, l_2, \ldots, l_s$ рядка (7) (числа $l'_1, l'_2, \ldots, l'_s$ рядка (8)) – на правій гілці розглядуваного опуклого вгору унімодального відображення.

З чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$, $l_1, l_2, \ldots, l_s$ утворимо вектори вигляду

$$\left(m_1,\ l_1,\ m_2,\ l_2,\ \ldots,\ m_s,\ l_s\right), \tag{11}$$

$$\left(m'_1,\ l'_1,\ m'_2,\ l'_2,\ \ldots,\ m'_s,\ l'_s\right), \tag{12}$$

де вектор (11) відповідає рядку (7), а вектор (12) – рядку (8).

Векторами вигляду (11) і (12) для рядків (9) і (10) є наступні вектори

$$\left(1,\ 4\right), \tag{13}$$

$$\left(1,\ 2,\ 1,\ 1\right), \tag{14}$$

Означення 1. Вектори (11), (12), які побудовано з коефіцієнтів рядків (7), (8) відповідно, називаються векторами, що підозрілі на типові для опуклої вгору циклічної перестановки $\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right)$.

Означення 2. Вектор, що підозрілий на типовий, який не складається лише з повторюваних блоків, що його утворюють, називається типовим вектором опуклої вгору циклічної перестановки $\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right)$.

Кожному підозрілому на типовий вектору вигляду $\left(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s\right)$ поставимо у відповідність число σ, що визначається з рівності

$$\frac{3}{2}\sigma = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s}\left(\left(-2\right)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} l_j} 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} m_j}\left(1-\left(-2\right)^{l_i}\right)\right)}{1-\left(-2\right)^{\sum\limits_{i=1}^{s} l_i} 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i}}, \tag{15}$$

яке називатимемо вагою цього підозрілого на типовий вектора.

Вага типового вектора опуклої вгору циклічної перестановки визначається аналогічно, за допомогою формули (15).

Для опуклої вгору циклічної перестановки (4) підозрілими на типові вектори є вектори (13) і (14), причому кожен з них є її типовим вектором. З формули (15) вагою типового вектора (13) є число $\frac{10}{33}$, а типового вектора (14) – число $\frac{10}{31}$.

Має місце наступна лема.

Лема 1. Нехай $\left(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s\right)$ – підозрілий на типовий вектор для опуклої вгору циклічної перестановки порядку n, а $\left(\underbrace{m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s}_{1}, \ldots, \underbrace{m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s}_{p}\right)$ – підозрілий на типовий вектор для опуклої вгору циклічної перестановки порядку pn. Тоді ваги цих векторів рівні.

Доведення леми 1 виконується за допомогою тотожних перетворень формули (15).

ПОНЯТТЯ ВАГИ ОПУКЛОЇ ВГОРУ ЦИКЛІЧНОЇ ПЕРЕСТАНОВКИ. Визначивши вагу підозрілого на типовий та типового вектора опуклої вгору циклічної перестановки π, визначимо вагу цієї перестановки.

Означення 3. Вагою опуклої вгору циклічної перестановки π, яка має один типовий вектор, називатимемо вагу цього типового вектора. Вагою опуклої вгору циклічної перестановки π, яка має два типових вектори, називатимемо більшу із ваг цих типових векторів.

Вагу опуклої вгору циклічної перестановки π позначатимемо σ_π.

Враховуючи, що кожна опукла вгору циклічна перестановка має принаймні один типовий вектор, поняття ваги опуклої вгору циклічної перестановки визначено коректно.

Наприклад, вагою опуклої вгору циклічної перестановки (4) є число $\frac{10}{31}$.

Оскільки компоненти типового вектора (або з одного із типових векторів, якщо таких векторів два) рівні кількості послідовних ітерацій на одній з гілок розглядуваного опуклого вгору унімодального відображення, то заданому циклу єдиним чином можна поставити у відповідність типовий вектор (відповідної опуклої вгору циклічної перестановки) – вектор вигляду (11) або ж вигляду (12).

Рядок вигляду (7) називатимемо типом циклу унімодального опуклого вгору відображення, якщо даному циклу ставиться у відповідність типовий вектор (11). Аналогічно, рядок вигляду (8) називатимемо типом циклу унімодального опуклого вгору відображення, якщо даному циклу ставиться у відповідність типовий вектор (12). Зауважимо, що тип циклу визначається однозначно.

Таким чином, маємо таке підсумкове твердження.

Лема 2. Кожен цикл неперервного унімодального опуклого вгору відображення має єдиний тип.

Типом циклу A унімодального опуклого вгору відображення (3) є рядок (10).

ЛІНІЙНИЙ ПОРЯДОК НА МНОЖИНІ ОПУКЛИХ ВГОРУ ЦИКЛІЧНИХ ПЕРЕСТАНОВОК. На множині опуклих вгору циклічних перестановок введемо відношення лінійного порядку $\lhd$ наступним чином. Будемо говорити, що дві довільні опуклі вгору циклічні перестановки π' і π'' знаходяться у відношенні $\lhd$, тобто $\pi' \lhd \pi''$, якщо $\sigma(\pi') \le \sigma(\pi'')$.

Лема 3. Відношення $\lhd$ є відношенням лінійного порядку на множині опуклих вгору циклічних перестановок.

Доведення. Перевіримо виконання умов повноти, транзитивності та антисиметричності для відношення $\lhd$. Умова повноти означає, що для будь-яких π' і π'' опуклих вгору циклічних перестановок виконується одне зі співвідношень $\pi' \lhd \pi''$ або $\pi'' \lhd \pi'$. Умова тразитивності означає, що зі співвідношень $\pi' \lhd \pi''$ і $\pi'' \lhd \pi'''$, де π', π'', π''' – довільні опуклі вгору циклічні перестановки, випливає співвідношення $\pi' \lhd \pi'''$. Умова антисиметричності означає, що якщо для будь-яких опуклих вгору циклічних перестановок π' і π'' мають місце співвідношення $\pi' \lhd \pi''$ і $\pi'' \lhd \pi'$, то $\pi' = \pi''$. Виконання всіх вище згаданих умов випливає з означення ваги опуклої вгору циклічної перестановки.

ВИСНОВКИ. У статті введено означення опуклої вгору (опуклої вниз) циклічної перестановки, вектора, що підозрілий на типовий, типового вектора та ваги опуклої вгору циклічної перестановки, які використовуються для визначення типу циклу унімодального опуклого вгору відображення. Отримано леми про структуру типового вектора, єдиність типу циклу для унімодального опуклого вгору відображення та відношення лінійного порядку на множині опуклих вгору циклічних перестановок, що індуковане вагою опуклої вгору циклічної перестановки.

Список використаних джерел

1. Калужнин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
2. Федоренко В.В. Канонические периодические траекториии одномерных динамических систем // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Институт математики АН УССР, 1983. – С. 106 – 109.
3. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн., 1964, 16. – №1. – С. 61 – 71.
4. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. – К.: Наукова думка, 1989. – 216 с.
5. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. – К.: Наукова думка, 1986. – 278 с.

Надійшла до редколегії 10.12.13

Т. Тищук, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ УНИМОДАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ ВВЕРХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОТРЕЗКА В СЕБЯ

Рассматривается задача о классификации циклов непрерывных унимодальных выпуклых вверх отображений отрезка в себя по взаимному расположению точек цикла. Предложено понятие выпуклой вверх (выпуклой вниз) циклической перестановки, подозрительного на типичный вектора, типичного вектора выпуклой вверх циклической перестановки и веса выпуклой вверх циклической перестановки.

T. Tyshchuk, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

CLASSIFICATION OF PERIODIC TRAJECTORIES OF CONTINUOUS CONVEX UPWARD UNIMODAL MAPPINGS OF THE INTERVAL

The problem of classification of cycles of continuous convex upward unimodal mappings of the interval is studied. The concept of a convex upward (convex downward) cyclic permutation, vector suspicious for typical and typical vector of convex upward cyclic permutation are posed. Definition of weight of convex upward cyclic permutation is proposed.