УДК 519.21

О. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Мосеєнков, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ФОРМУЛА КОШІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ІНТЕГРАЛОМ СКОРОХОДА

Отримано формулу Коші для зображення розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з інтегралом Скорохода та дано її застосування.

1. Вступ

В [2,3,4,5,8] одним з авторів цієї роботи вивчались властивості розв'язків лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь дифузійного типу. Так, в [3] наведено умови існування стохастично обмежених розв'язків, в [5] показано, що за умови періодичності коефіцієнтів, стохастично обмежений розв'язок може бути також періодичним, тобто мати періодичні скінченновимірні розподіли. Основний інструмент цих досліджень становить формула Коші зображення розв'язків лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь у явному вигляді. Для стохастичних диференціальних рівнянь зі стохастичним інтегралом Іто формулу Коші отримано в [1] та [6]. Оскільки стохастичний інтеграл Скорохода дозволяє розглядати підінтегральні вирази з випередженням відносно фільтрації породженої Вінерівським процесом, то зображення розв'язків лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь у явному вигляді для рівнянь з інтегралом Скорохода дає можливість вивчати властивості більш широкого класу рівнянь. Частковий випадок формули Коші для інтегралу Скорохода у випадку відсутності неоднорідності у стохастичному інтегралі записано в [7]. У даній статті отримано формулу Коші у загальному випадку та дано приклад її застосування у випадку початкової умови та неоднорідностей з випередженням. Приклад свідчить, що за умови стійкості з ймовірністю 1 однорідного рівняння розв'язок неоднорідного може бути стохастично обмеженим.

2. Позначення, припущення, постановка задачі та допоміжні твердження

Нехай $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ – канонічний імовірнісний простір одновимірного броунівського руху, тобто $\Omega = C_0([0,1])$ – простір неперервних функції що визначені на відрізку $[0,1]$, для яких $x(0)=0$, F – борелевська σ-алгебра, P – вінерівська міра, $\|\xi\|^2 = \mathsf{E}\,\xi^2$. Позначимо через S множину гладких випадкових величин на просторі $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ (див. [7]). Через $\int_0^1 f_s(\omega)\,\delta w_s$ позначимо визначений стохастичний інтеграл Скорохода (див. [7]), $Dom\delta$ – область визначення інтегралу Скорохода.

Нехай $L_s^2([0,1]^m)$ – підпростір в $L^2([0,1]^m)$, що складається з симетричних функцій, $\|g_m\|_2 = \|g_m\|_{L^2([0,1]^m)}$. Для $g_m \in L_s^2([0,1]^m)$ визначено кратний стохастичний інтеграл $I_m(g_m) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_m(s_1,\ldots,s_m)\,dw_{s_1}\ldots dw_{s_m}$ (див. [7]). Для $f_n \in L_s^2([0,1]^n)$ і $g_m \in L_s^2([0,1]^m)$ через $f_n \widetilde{\otimes} g_m$ позначено симетризацію тензорного добутку $f_n \otimes g_m$. Якщо $\sigma \in L^2([0,1])$ то на Ω існують сімейства перетворень $T^t, A^t : \Omega \to \Omega$, $t \in [0,1]$, які визначено так:

$$T^t(\omega)_s = \omega_s + \int_0^{t\wedge s} \sigma_u\,du,\ \ A^t(\omega)_s = \omega_s - \int_0^{t\wedge s} \sigma_u\,du,\ \ s,t \in [0,1].$$

Зазначимо, що $T^t A^t = A^t T^t = I$, $I(\omega) = \omega$. Позначимо $\breve{\varepsilon}(f) = \exp\left\{\int_0^\infty f_u\,dw_u - \frac{1}{2}\int_0^\infty (f_u)^2\,du\right\}$ для $f \in L^2([0,\infty))$,

$\breve{\varepsilon}_s^t = \breve{\varepsilon}(\sigma \mathrm{I}_{[s,t]}) = \exp\left\{\int_s^t f_u\,dw_u - \frac{1}{2}\int_s^t (f_u)^2\,du\right\}$. Нехай $b \in L^1([0,1])$. Тоді $\hat{\varepsilon}_s^t = \exp\left\{\int_s^t b_u\,du\right\}$, $h_s^t = \hat{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}_s^t$, $h_s^t = h_0^t (h_0^s)^{-1}$, $s,t \in [0,1]$. Справедливе зображення $\breve{\varepsilon}_s^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} I_m(f_m^{s,t})$, де $f_m^{s,t} = (\sigma \mathrm{I}_{[s,t]})^{\otimes m}$, $(\sigma \mathrm{I}_{[s,t]})(u) = \sigma_u \mathrm{I}_{[s,t]}(u)$, $f_0^{s,t} = 1$.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$x_t = x_0(\omega) + \int_0^t \left[b_s x_s + \varphi_s(\omega)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma_s x_s + \psi_s(\omega)\right] \delta w_s. \tag{1}$$

Будемо припускати, що випадкові величини, які входять в праву частину (1), зображуються рядами Вінера – Іто, тобто $x_0(\omega) = \sum_{n=0}^\infty I_n(r_n)$; $\varphi_t(\omega) = \sum_{n=0}^\infty I_n((\varphi_t)_n)$; $\psi_t(\omega) = \sum_{n=0}^\infty I_n((\psi_t)_n)$.

Означення. Процес x_t, $0 \le t \le 1$, називається розв'язком рівняння (1), якщо $1_{[0,t]}(\bullet)\sigma_\bullet x_\bullet \in Dom\delta$ для кожного $t \in [0,1]$ і якщо співвідношення (1) виконується з ймовірністю 1 для кожного $t \in [0,1]$.

Лема. Справедлива рівність

$$I_l(g_l; A^t T^s)\breve{\varepsilon}_s^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} I_{l+m}(g_l \widetilde{\otimes} f_m^{s,t}).$$

Доведення. Враховуючи формулу добутку кратних стохастичних інтегралів, комбінаторні співвідношення і те, що $I_l(g_l;A^tT^s)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k I_{l-k}((g_l,f_k^{s,t}))$, $(g_l,f_k^{s,t})=\int_0^1\cdots\int_0^1 g_l(s_1,\ldots,s_{l-k},s_{l-k-1},\ldots,s_l)f_k^{s,t}(s_{l-k+1},\ldots,s_l)\,ds_{l-k+1}\ldots ds_l$, маємо

$$I_l(g_l;A^tT^s)\breve{\varepsilon}_s^t=\sum_{k=0}^{l}(-1)^kC_l^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_{l-k}((g_l,f_k^{s,t}))I_m(f_m^{s,t})=\sum_{k=0}^{l}(-1)^kC_l^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{(l-k)\wedge m}r!C_{l-k}^rC_m^rI_{(l-k)+m-2r}((g_l,f_{k+r}^{s,t})\widetilde{\otimes}f_{m-r}^{s,t})=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\sum_{r=0}^{l-k}(-1)^k\frac{r!}{(r+m)!}C_l^kC_{l-k}^rC_{r+m}^rI_{l-(k+r)+m}((g_l,f_{k+r}^{s,t})\widetilde{\otimes}f_m^{s,t})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_{l+m}(g_l\,\widetilde{\otimes}\,f_m^{s,t}),$$ оскільки для $v=k+r$, $0\le v\le l$,

$$\sum_{r=0}^{v}(-1)^{v-r}\frac{r!}{(r+m)!}C_l^{v-r}C_{l-(v-r)}^rC_{r+m}^r=\frac{l!}{m!\,v!\,(l-v)!}\sum_{r=0}^{v}(-1)^{v-r}C_v^{v-r}=\begin{cases}0,\ v=\overline{1,l};\\ \dfrac{1}{m!},\ v=0.\end{cases}$$

Наслідок. $\breve{\varepsilon}_s^t\breve{\varepsilon}(f;A^tT^s)=\breve{\varepsilon}(f^{s,t}+f)$.

Позначимо через π_n множину всіх перестановок з n елементів, а через λ_n – множину всіх розбиттів множини з n елементів на k та $(n-k)$ елементів. Тоді маємо:

$$\breve{\varepsilon}_s^t\breve{\varepsilon}(f;A^tT^s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_m(f_m^{s,t})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n(f^{\otimes n};A^tT^s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n(f^{\otimes n};A^tT^s)\breve{\varepsilon}_s^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_{n+m}(f^{\otimes n}\,\widetilde{\otimes}\,f_m^{s,t})=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}I_n\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}f^{\otimes k}\,\widetilde{\otimes}\,f_{n-k}^{s,t}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}I_n\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi_n}f(\bullet_{\sigma(1)})\cdot\ldots\cdot f(\bullet_{\sigma(k)})f^{s,t}(\bullet_{\sigma(k+1)})\cdot\ldots\cdot f^{s,t}(\bullet_{\sigma(n)})\Big)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n\Big(\sum_{k=0}^{n}\sum_{\sigma\in\lambda_n}f(\bullet_{\sigma(1)})\cdot\ldots\cdot f(\bullet_{\sigma(k)})f^{s,t}(\bullet_{\sigma(k+1)})\cdot\ldots\cdot f^{s,t}(\bullet_{\sigma(n)})\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n((f^{s,t}+f)^{\otimes n})=\breve{\varepsilon}(f^{s,t}+f).$$

3. Основний результат

Теорема. Нехай виконуються умови

А) $\sum_{n=0}^{\infty}n!\,2^{2n}\|r_n\|_2^2<\infty$; $\sup\limits_{0\le t\le 1}\sum_{n=0}^{\infty}n!\,2^{2n}\|(\varphi_s)_n\|_2^2<\infty$; $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\,2^{2(n+1)}\|\widetilde{\psi}_n\|_2^2<\infty$;

В) $\sup\limits_{0\le t\le 1}(|b_t|+|\sigma_t^2|)\le L<\infty$.

Тоді розв'язок рівняння (1) зображується у вигляді

$$x_t=h_0^tx_0(A^t)+\int_0^t h_s^t\varphi_s(A^tT^s)\,ds+\int_0^t h_s^t\psi_s(A^tT^s)\,\delta w_s\,. \tag{2}$$

Доведення. Перевіримо спочатку існування правої частини в (2) для кожного $t\in[0,1]$. Покажемо, що $\|x_t\|^2<\infty$. Для $h_0^tx_0(A^t)$ маємо оцінку

$$\left\|h_0^tx_0(A^t)\right\|^2=\left\|\widehat{\varepsilon}_0^t\breve{\varepsilon}_s^t\sum_{n=0}^{\infty}I_n(r_n;A^t)\right\|^2=K\left\|\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_{l+m}(r_l\,\widetilde{\otimes}\,f_m^{0,t})\right\|^2=K\left\|\sum_{l=0}^{\infty}I_l\Big(\sum_{k=0}^{l}(r_{l-k}\,\widetilde{\otimes}\,\frac{1}{k!}f_k^{0,t})\Big)\right\|^2=$$

$$=K\sum_{l=0}^{\infty}l!\left\|\sum_{k=0}^{l}(r_{l-k}\,\widetilde{\otimes}\,\frac{1}{k!}f_k^{0,t})\right\|_2^2\le K\sum_{l=0}^{\infty}l!(l+1)\sum_{k=0}^{l}\left\|r_{l-k}\,\widetilde{\otimes}\,\frac{1}{k!}f_k^{0,t}\right\|_2^2\le K\sum_{l=0}^{\infty}l!(l+1)\sum_{k=0}^{l}\frac{L^k}{(k!)^2}\|r_{l-k}\|_2^2\le$$

$$\le K\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}2^k(k+1)k!\frac{L^k}{(k!)^2}2^{l-k}(l-k+1)(l-k)!\|r_{l-k}\|_2^2\le K\sum_{n=0}^{\infty}2^{2n}\frac{L^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}m!\,2^{2m}\|r_m\|_2^2\le Ke^{4L}\sum_{m=0}^{\infty}m!\,2^{2m}\|r_m\|_2^2<\infty,$$

де $K=e^{2L}$. Аналогічно попередньому для $\int_0^t h_s^t\varphi_s(A^tT^s)\,ds$ отримаємо при $K=e^{2L}$ таку нерівність

$$\left\|h_s^t\varphi_s(A^tT^s)\right\|^2=\left\|\widehat{\varepsilon}_s^t\breve{\varepsilon}_s^t\sum_{n=0}^{\infty}I_n((\varphi_s)_n;A^tT^s)\right\|^2\le K\left\|\sum_{l=0}^{\infty}I_l\Big(\sum_{k=0}^{l}((\varphi_s)_{l-k}\,\widetilde{\otimes}\,\frac{1}{k!}f_k^{s,t})\Big)\right\|^2=K\sum_{l=0}^{\infty}l!\left\|\sum_{k=0}^{l}((\varphi_s)_{l-k}\,\widetilde{\otimes}\,\frac{1}{k!}f_k^{s,t})\right\|_2^2\le$$

$$\le K\sum_{l=0}^{\infty}l!(l+1)\sum_{k=0}^{l}\frac{L^k}{(k!)^2}\|(\varphi_s)_{l-k}\|_2^2\le K\sum_{n=0}^{\infty}2^{2n}\frac{L^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}m!\,2^{2m}\|(\varphi_s)_m\|_2^2\le Ke^{4L}\sum_{m=0}^{\infty}m!\,2^{2m}\|(\varphi_s)_m\|_2^2<\infty.$$

Для $\int_0^t h_s^t \psi_s(A^t T^s)\,\delta w_s$, враховуючи умови існування інтегралу Скорохода з [7], для $K = e^{2L}$ виконується оцінка

$$\left\|\int_0^t h_s^t \psi_s(A^t T^s)\,\delta w_s\right\|^2 = \left\|\int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t \sum_{l=0}^{\infty} I_l\Big(\sum_{k=0}^{l}((\psi_s)_{l-k} \,\widetilde{\otimes}\, \frac{1}{k!} f_k^{s,t})\Big)\,\delta w_s\right\|^2 = K\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)!\left\|\sum_{k=0}^{l}((\psi)_{l-k} \,\widetilde{\widetilde{\otimes}}\, \frac{1}{k!} f_k^t)\right\|_2^2 \le$$

$$\le K\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)!\left\|\sum_{k=0}^{l}((\psi)_{l-k} \,\widetilde{\widetilde{\otimes}}\, \frac{1}{k!} f_k^t)\right\|_2^2 \le K e^{4(L+1)}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)!\,2^{2(l+1)}\left\|\widetilde{\psi}_l\right\|_2^2 < \infty .$$

Покажемо тепер, що вираз у правій частині (2) задовольняє (1). Покладемо $y_t = h_0^t x_0(A^t) + \int_0^t h_s^t \varphi_s(A^t T^s)\,ds$. В монографії [7] доведено, що y_t становить єдиний розв'язок рівняння

$$y_t = x_0(\omega) + \int_0^t \big[b_s y_s + \varphi_s(\omega)\big]ds + \int_0^t \sigma_s y_s\,\delta w_s\,. \tag{3}$$

Враховуючи лінійну структуру рівняння (1), для доведення теореми залишається показати, що величина $z_t = x_t - y_t = \int_0^t h_s^t \psi_s(A^t T^s)\,\delta w_s$ є розв'язком рівняння

$$z_t = \int_0^t b_s z_s\,ds + \int_0^t \big[\sigma_s z_s + \psi_s(\omega)\big]\delta w_s \tag{4}$$

Дійсно, враховуючи, що згідно теореми Гірсанова $\mathrm{E}\Big[G(A^t)\breve{\varepsilon}_0^t\Big] = \mathrm{E}\,[G]$ для $G \in L^1(\Omega)$, рівність $\frac{d}{ds}G(T^t) = \sigma_s\big[D_s G\big](T^t)$ для $G \in S$ і означення інтегралу Скорохода, для $G \in S$ маємо

$$\mathrm{E}\int_0^t \sigma_s z_s\big[D_s G\big]ds = \mathrm{E}\int_0^t \sigma_s \int_0^s h_u^s \psi_u(A^s T^u)\,\delta w_u\big[D_s G\big]ds = \mathrm{E}\int_0^t \sigma_s \int_0^s h_u^s \psi_u(A^s T^u)\Big[D_{us}^2 G\Big]du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t \sigma_s \int_0^s \widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^s)\psi_u(T^u)\Big[D_{us}^2 G\Big](T^s)\,du\,ds = \mathrm{E}\int_0^t\int_0^s \widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^s)\psi_u(T^u)\frac{d}{ds}\big[D_u G\big](T^s)\,du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t\int_u^t \widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^s)\psi_u(T^u)\frac{d}{ds}\big[D_u G\big](T^s)\,ds\,du =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t \Big\{\widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^u)\psi_u(T^u)\,\big[D_u G\big](T^s)\Big\}\Big|_u^t du - \mathrm{E}\int_0^t\int_u^t (\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^u)\psi_u(T^u)\,\big[D_u G\big](T^s)\frac{d}{ds}\widehat{\varepsilon}_u^s\,ds\,du =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t \widehat{\varepsilon}_u^t \breve{\varepsilon}_0^t(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}\psi_u(A^t T^u)\,\big[D_u G\big]du - \mathrm{E}\int_0^t \breve{\varepsilon}_0^u(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}\psi_u\big[D_u G\big]du - \mathrm{E}\int_0^t\int_0^s b_s \widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^u)\psi_u(T^u)\,\big[D_u G\big](T^s)\,du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t h_u^t \psi_u(A^t T^u)\,\big[D_u G\big]du - \mathrm{E}\int_0^t \psi_u\big[D_u G\big]du - \mathrm{E}\int_0^t b_s \int_0^s \widehat{\varepsilon}_u^s \breve{\varepsilon}_0^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}\psi_u(A^s T^u)\,\big[D_u G\big]du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t h_u^t \psi_u(A^t T^u)\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t \psi_u\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\int_0^t b_s \int_0^s h_u^s \psi_u(A^s T^u)\,\big[D_u G\big]du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t h_u^t \psi_u(A^t T^u)\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t \psi_u\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\left[\int_0^t \Big(b_s \int_0^s h_u^s \psi_u(A^s T^u)\,\delta w_u\,ds\Big)\,G\right] =$$

$$= \mathrm{E}\big[z_t G\big] - \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t \psi_u\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t b_s z_s\,ds\Big)\,G\right]. \tag{5}$$

З (3), (4) та (5) випливає співвідношення $\mathrm{E}\int_0^t (\sigma_s x_s + \psi_s)\,[D_s G]\,ds = \mathrm{E}\,\big(\,[x_t - x_0 - \int_0^t (b_s x_s + \varphi_s)\,ds]\,G\,\big)$ для $G \in S$. Для завершення доведення достатньо, [7], показати, що для кожного $t \in [0,1]$ виконується нерівність $\| x_t - x_0 - \int_0^t (b_s x_s + \varphi_s)\,ds \| < \infty$. Справедливість останньої оцінки випливає з того, що $\| x_t \|^2 < \infty$ і умов теореми. Отже, показано, що $1_{[0,t]}(\bullet)\,[\sigma_\bullet \zeta_\bullet + \psi_\bullet] \in Dom\,\delta$ і що рівність (1) виконується майже для всіх $\omega \in \Omega$. Теорему доведено.

3. Застосування формули Коші

Одне із застосувань формули Коші для лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь полягає у вивченні властивостей розв'язків при $t \to \infty$. Для рівнянь дифузійного типу ця задача досліджувалась, зокрема, в працях [2,3,4,5,8].

Припустимо, що $x_0(\omega) = \breve{\varepsilon}(f^1)$, $\varphi_t(\omega) = \breve{\varepsilon}(f^2)$, $\psi_t(\omega) \equiv 0$, $f^i_\bullet = q^i_\bullet 1_{[0,T]}(\bullet)$, $0 < T < \infty$, $q^i \in L^2([0,\infty))$, $i = 1,2$. Слід зазначити, що функції такого типу формують тотальну множину в просторі $L^2(\Omega)$. Нехай, також, при $0 \le t < \infty$ $b_t - {\sigma_t}^2 / 2 \le -\gamma < 0$, існують такі $\sigma'_t = d\sigma_t / dt$ і $\sigma_t^{-1} = 1/\sigma_t$, що $\sup\limits_{0 \le t < \infty} (|\sigma_t^{-1}| + |\sigma'_t|) \le L < \infty$. Розглянемо рівняння

$$x_t = \breve{\varepsilon}(f^1) + \int_0^t [b_s x_s + \breve{\varepsilon}(f^2)]\, ds + \int_0^t \sigma_s x_s\, \delta w_s \,. \tag{6}$$

З наслідку леми випливає, що $h_0^t x_0(A^t) = \widehat{\varepsilon}_0^t \breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1)$, $h_s^t \varphi_s(A^t T^s) = \widehat{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2)$. При $T < s < t$ випадкові величини $\breve{\varepsilon}(f^i)$ і $\breve{\varepsilon}_s^t$ незалежні, а відтак, $\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^i) = \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\breve{\varepsilon}(f^i)$. Розв'язок рівняння (6) має вигляд $x_t = \widehat{\varepsilon}_0^t \breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1) + \int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2)\, ds + \int_0^t h_s^t\, \delta w_s$. Оскільки $\int_0^t h_s^t\, \delta w_s = h_0^t \int_0^t (h_0^s)^{-1}\, \delta w_s - h_0^t \int_0^t \sigma_s (h_0^s)^{-1}\, ds$, а процес $(h_0^t)^{-1}$ вимірний відносно потоку, що породжений Вінерівським процесом, то інтеграл Скорохода співпадає з інтегралом Іто, тобто $\int_0^t (h_0^s)^{-1}\, \delta w_s = \int_0^t (h_0^s)^{-1}\, dw_s$. За формулою Іто $h_0^t \int_0^t (h_0^s)^{-1}\, dw_s = h_0^t \sigma_0^{-1} - \sigma_t^{-1} + \int_0^t \sigma_s^{-1}(-b_s + \sigma_s^2 - \sigma_s^{-1}\sigma'_s) h_s^t\, ds$. Отже,

$$x_t = -\sigma_t^{-1} + \widehat{\varepsilon}_0^t (\breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1) + \sigma_0^{-1}\breve{\varepsilon}(f^{0,t})) + \int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t [\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2) - \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s + \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s^{-1}(-b_s + \sigma_s^2 - \sigma_s^{-1}\sigma'_s)]\, ds \,. \tag{7}$$

При виконанні зроблених припущень $\widehat{\varepsilon}_0^t (\breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1) + \sigma_0^{-1}\breve{\varepsilon}(f^{0,t}))$ прямує до нуля майже напевно при $t \to \infty$, а $\int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t [\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2) - \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s + \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s^{-1}(-b_s + \sigma_s^2 - \sigma_s^{-1}\sigma'_s)]\, ds$ – стохастично обмежений процес, як це випливає з [3], оскільки випадкові величини $\breve{\varepsilon}(f^i)$ і $\breve{\varepsilon}(f^{s,t})$ не залежні для $T < s < t$. Отже, розв'язок (7) рівняння (6) буде стохастично обмеженим.

4. Висновки

Встановлено формулу Коші зображення розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з інтегралом Скорохода. Таке зображення дає можливість досліджувати асимптотичні властивості розв'язків у разі, коли неоднорідності є функціоналами від Вінерівського процесу з випередженням відносно потоку, який породжено Вінерівським процесом. Розглянуто приклад, який демонструє таку можливість у випадку обмеженої за часом неоднорідності експоненціального типу.

Список використаних джерел

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.
2. Ільченко О.В. Про стаціонарні розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Матем. та мех. – 2003, № 9. – С. 36-40.
3. Ільченко О.В. Стохастично обмежені розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння // Теорія ймовір. та матем. статист., 2003, Вип. 68. – С. 47-54.
4. Ільченко О.В. Про асимптотичне виродження систем лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь // Теорія ймовір. та матем. статист., 2007, Вип. 76. – С. 39-46.
5. Ільченко О.В. Періодичні розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Матем. та мех. – 2013, № 1(29). – С. 44-47.
6. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
7. Nualart D. The Malliavin Calculus and Related Topics.– Berlin Heidelberg New York: Springer, 2006. – 382 p.
8. Ilchenko A. Asymptotic behavior of solutions of nonhomogeneous linear systems of stochastic differential equations with constant coefficients // Random Operators And Stochastic Equations. – 1992. – vol.1, nomb.1, – p. 79-89.

Надійшла до редколегії 11.11.13

А. Ильченко, канд. физ.-мат. наук, Ю. Мосеенков, канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ФОРМУЛА КОШИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛОМ СКОРОХОДА

В роботе получена формула Коши представления решений линейного неоднородного стохастического дифференциального уравнения с интегралом Скорохода и приведено ее применение.

A. Ilchenko, PhD, Y. Moseenkov, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

CAUCHY REPRESENTATION FORMULA FOR SOLUTIONS OF THE LINEAR NONHOMOGENUOUS STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION WITH SKOROHOD INTEGRAL

In this paper the Cauchy representation formula for solutions of the linear nonhomogenuous stochastic differential equation with Skorohod stochastic integral is found and application is considered.