УДК 512.53+512.64

В. Бондаренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Інститут математики НАН України, Київ,
О. Зубарук, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

АЛГЕБРА АУСЛЕНДЕРА ДЛЯ ПАР ІДЕМПОТЕНТНИХ МАТРИЦЬ З СЕНДВІЧ-СПІВВІДНОШЕННЯМИ

Описано алгебру Ауслендера для задачі про класифікацію пар ідемпотентних матриць A, B із співвідношеннями ABA=0, BAB=0.

1. ВСТУП

Сучасна теорія зображень має два напрямки. Перший із них продовжує класичну традицію, коли вивчаються самі зображення (опис нерозкладних зображень, їх канонічний вигляд, тощо), а другий пов'язаний в першу чергу з описом категорії зображень. До першого напрямку відноситься і заснована А.В. Ройтером сучасна теорія матричних задач, проте вона відіграє важливу роль в обох випадках.

Якщо говорити про категорії зображень, то основними поняттями тут є сагайдак Ауслендера-Райтен та алгебра Ауслендера, які вивчаються протягом багатьох десятиліть (див., наприклад, [1-10]).

Алгеброю Ауслендера алгебри скінченного зображувального типу називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (із кожного класу еквівалентності нерозкладних зображень треба взяти один представник). Якщо зображення розглядати в матричному вигляді, то і алгебра Ауслендера буде реалізовуватись в матричному вигляді і в цьому випадку ми будемо називати її матричною алгеброю Ауслендера.

Ця стаття присвячена обчисленню матричної алгебри Ауслендера для однієї задачі про подібність пари матриць з деякими природними співвідношеннями.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Протягом всієї статті K позначає довільне поле.

Розглянемо задачу про подібність пар ідемпотентних матриць $A^2 = A$, $B^2 = B$ із співвідношеннями $ABA = 0$, $BAB = 0$, які ми називаємо сендвіч-співвідношеннями. Ця задача рівносильна задачі про еквівалентність матричних зображень напівгрупи (із нулем) M з системою твірних 0, a, b та визначальними співвідношеннями

1) $0^2 = 0$, $0a = a0 = 0$, $0b = b0 = 0$;

2) $a^2 = a$, $b^2 = b$;

3) $aba = 0$, $bab = 0$.

Згідно загального означення матричним зображенням напівгрупи M над полем K є довільний гомоморфізм $T : M \to M_n(K)$, де $M_n(K)$ – напівгрупа (відносно множення) всіх квадратних матриць розміру $n \times n$ над полем K (n називається розмірністю зображення T). При цьому ми вважаємо, що $T(0) = 0$, і тому зображення $T : M \to M_n(K)$ напівгрупи M однозначно задається парою матриць $R = \{A = T(a),\ B = T(b)\}$, такою, що $A^2 = A$, $B^2 = B$, $ABA = 0$, $BAB = 0$.

Матричні зображення $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи M називаються еквівалентними, якщо $A' = CAC^{-1}$ і $B' = CBC^{-1}$ для деякої оборотної матриці C. Матричне зображення R називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним в іншому разі. Для матричних зображень напівгрупи M (як і для будь-якої скінченної напівгрупи) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Оскільки між зображеннями напівгрупи M та зображеннями її напівгрупової алгебри існує природна взаємно однозначна відповідність, то можна говорити про алгебру Ауслендера як напівгрупи M (означення якої дається саме для алгебр), так і для пар ідемпотентних матриць A, B з двома сендвіч-співвідношеннями.

Мета цієї роботи – обчислити алгебру Ауслендера для напівгрупи M, або, що те саме, для вказаних пар матриць.

3. ФОРМУЛЮВАННЯ КЛАСИФІКАЦІЙНОЇ ТЕОРЕМИ

Теорема 1. *Будь-яке матричне зображення напівгрупи M еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \to \mathrm{A} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad b \to \mathrm{B} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тут через E позначено одиничні матриці (деякі із них можуть мати розмір 0×0).

4. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 1

Нехай $R=\{A,B\}$ – матричне зображення напівгрупи M над полем K. Можна вважати, що матриця A має жордановий нормальний вигляд $A=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, а $B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$, де розміри блоків обох матриць збігаються.

Спочатку скористаємося рівністю $ABA=0$: $\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, яка еквівалентна рівності $B_{11}=0$, і тоді $B=\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$. Рівність $BAB=0$: $\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ еквівалентна наступній рівності:

$$B_{21}B_{12}=0. \tag{1}$$

Нарешті рівність $B^2=B$, тобто $\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}B_{12}B_{21} & B_{12}B_{22}\\ B_{22}B_{21} & B_{21}B_{12}+B_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$, еквівалентна наступним рівностям:

$$B_{12}B_{21}=0, \tag{2}$$
$$B_{12}B_{22}=B_{12}, \tag{3}$$
$$B_{22}B_{21}=B_{21}, \tag{4}$$
$$B_{21}B_{12}+B_{22}^2=B_{22}. \tag{5}$$

Таким чином, наше матричне зображення $R=\{A,B\}$ має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

де блоки B_{12}, B_{21} і B_{22} задовольняють співвідношення (1) – (5).

З'ясуємо, коли зображення $R=\{A,B\}$ еквівалентне зображенню $\overline{R}=\{\overline{A},\overline{B}\}$ такого ж вигляду, а саме

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \overline{B}=\begin{pmatrix}0 & \overline{B_{12}}\\ \overline{B_{21}} & \overline{B_{22}}\end{pmatrix}.$$

Нехай $\overline{A}=XAX^{-1}$, $\overline{B}=XBX^{-1}$ для деякої оборотної матиці X (розбиття якої узгоджено з розбиттям матриць A і B), що еквівалентно $\overline{A}X=XA$, $\overline{B}X=XB$. Зрозуміло, що $\overline{A}=A$. Спочатку використаємо рівність $\overline{A}X=XA$:

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Маємо $X_{12}=0$, $X_{21}=0$, тобто $X=\begin{pmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix}$. Тепер рівність $\overline{B}X=XB$ має вигляд

$$\begin{pmatrix}0 & \overline{B_{12}}\\ \overline{B_{21}} & \overline{B_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix}0 & \overline{B_{12}}X_{22}\\ \overline{B_{21}}X_{11} & \overline{B_{22}}X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & X_{11}B_{12}\\ X_{22}B_{21} & X_{22}B_{22}\end{pmatrix}.$$

Звідси $\overline{B_{12}}X_{22}=X_{11}B_{12}$, $\overline{B_{21}}X_{11}=X_{22}B_{21}$, $\overline{B_{22}}X_{22}=X_{22}B_{22}$ або

$$\overline{B_{12}}=X_{11}B_{12}X_{22}^{-1}, \tag{7}$$
$$\overline{B_{21}}=X_{22}B_{21}X_{11}^{-1}, \tag{8}$$
$$\overline{B_{22}}=X_{22}B_{22}X_{22}^{-1}. \tag{9}$$

Отже, ми показали, що матричні зображення $R=\{A,B\}$ та $\overline{R}=\{\overline{A},\overline{B}\}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли справедливі рівності (7) – (9).

Таким чином, із зазначеного вище випливає, що задача про опис (з точністю до еквівалентності) матричних зображень вигляду (6) напівгрупи M, а отже, і взагалі всіх її матричних зображень, рівнозначна задачі про опис матриць B_{12}, B_{21} і B_{22} з точністю до еквівалентності, яка задається рівностями (7) – (9).

Переходимо тепер до нашої нової матричної задачі (відносно матриць B_{12}, B_{21} і B_{22}). Можна було б розглядати цю задачу окремо, але ми робитимемо це (для більшої наглядності) "всередині" матриці B.

Підставивши (1) в (5), отримаємо $B_{22}^2=B_{22}$. Тоді, використовуючи перетворення (9), зведемо матрицю B_{22} до наступного (жорданового) вигляду

$$B_{22}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Далі, розбивши матриці B_{12} і B_{21} відповідно до розбиття на блоки матриці B_{22}, отримуємо наступний вигляд матриці B:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & E & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де B_{12}, B_{13}, B_{21} і B_{31} – деякі матриці (формально матрицю B потрібно було б замінити іншим символом, наприклад, B_1, але для зручності і за традицією в теорії матричних задач ми зберегли старе позначення; це ж стосується матриць B_{12}, B_{13}, B_{21} і B_{31}).

Скористаємося умовою $B^2 = B$. Маємо

$$\begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & E & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} B_{12}B_{21}+B_{13}B_{31} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{21}B_{12}+E & B_{21}B_{13} \\ 0 & B_{31}B_{12} & B_{31}B_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & E & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо

$$B_{12}B_{21}=0, \tag{11}$$

$$B_{13}=0, \tag{12}$$

$$B_{21}B_{12}=0, \tag{13}$$

$$B_{31}=0. \tag{14}$$

Таким чином, матриця B має вигляд (врахувавши рівності (12) і (14)):

$$B=\begin{pmatrix} 0 & B_{12} & 0 \\ B_{21} & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де B_{12} та B_{21} – деякі матриці.

Допустимими перетвореннями приведемо матрицю B_{12} до наступного канонічного вигляду:

$$B_{12}=\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Зауважимо, що з формальних міркувань ця канонічна форма відрізняється від канонічної форми (10), що в принципі не є суттєвим.

Розіб'ємо матрицю B_{21} на блоки відповідно до розбиття матриці B_{12}, а саме представимо матрицю B_{21} у вигляді

$$B_{21}=\begin{pmatrix} B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Тоді, підставивши у рівності (11) та (13) вигляди матриць (15) і (16), маємо співвідношення $\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & B_{31} \\ 0 & B_{41} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Звідси $B_{31}=0$, $B_{41}=0$ і $B_{42}=0$.

Враховуючи вище отримані рівності, маємо наступний вигляд матриці B

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{32} & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де B_{32} – деяка матриця.

Привівши матрицю B_{32} до канонічного вигляду $B_{32}=\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і підставивши цей вираз у матрицю B (зробивши відповідне розбиття матриці A), отримуємо матричне зображення напівгрупи M вказаного в умові теореми вигляду.

Отже, теорема 1 доведена.

5. АЛГЕБРА АУСЛЕНДЕРА ДЛЯ ПАР ІДЕМПОТЕНТНИХ МАТРИЦЬ $A^2 = A$, $B^2 = B$ З СЕНДВІЧ-СПІВВІДНОШЕННЯМИ $ABA = 0$, $BAB = 0$

Використовуючи теорему 1, опишемо (в матричному вигляді) алгебру Ауслендера для пар ідемпотентних матриць $A^2 = A$, $B^2 = B$ з сендвіч-співвідношеннями $ABA = 0$, $BAB = 0$ над полем K. Для цього розглянемо наступне матричне зображення напівгрупи M над полем K, яке за теоремою 1 є (з точністю до перестановки рядків та стовпців) прямою сумою нерозкладних зображень (кожне з яких зустрічається один раз):

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Нехай X – елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто матриця X така, що $AX = XA$ та $BX = XB$.

Спочатку розглянемо співвідношення $AX = XA$. Маємо:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}&x_{16}&x_{17}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}&x_{26}&x_{27}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}&x_{36}&x_{37}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\x_{51}&x_{52}&x_{53}&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\x_{61}&x_{62}&x_{63}&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\x_{71}&x_{72}&x_{73}&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}&x_{16}&x_{17}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}&x_{26}&x_{27}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}&x_{36}&x_{37}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\x_{51}&x_{52}&x_{53}&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\x_{61}&x_{62}&x_{63}&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\x_{71}&x_{72}&x_{73}&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}&x_{16}&x_{17}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}&x_{26}&x_{27}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}&x_{36}&x_{37}\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&0&0&0&0\\x_{51}&x_{52}&x_{53}&0&0&0&0\\x_{61}&x_{62}&x_{63}&0&0&0&0\\x_{71}&x_{72}&x_{73}&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

тобто матриця X має вигляд

$$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0\\0&0&0&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}.$$

Розглянемо тепер рівність $BX = XB$. Маємо:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0\\0&0&0&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0\\0&0&0&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix}0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&x_{11}&0\\0&0&0&0&0&x_{21}&0\\0&0&0&0&0&x_{31}&0\\0&0&x_{44}&x_{44}&x_{45}&x_{46}&0\\0&0&x_{54}&x_{54}&x_{55}&x_{56}&0\\0&0&x_{64}&x_{64}&x_{65}&x_{66}&0\\0&0&x_{74}&x_{74}&x_{75}&x_{76}&0\end{pmatrix},$$

а отже,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & x_{45} & x_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{77} \end{pmatrix}.$$

З цих міркувань слідує наступна теорема:

Теорема 2. *Матрична алгебра Ауслендера для пар ідемпотентних матриць* $A^2 = A$*,* $B^2 = B$ *з сендвіч-співвідношеннями* $ABA = 0$*,* $BAB = 0$ *над полем* K *складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & x_{45} & x_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{77} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} *– елементи поля* K*.*

6. ВИСНОВКИ

Описана матрична алгебра Ауслендера для задачі про класифікацію пар ідемпотентних матриць A і B із співвідношеннями $ABA = 0$ і $BAB = 0$.

Список використаних джерел

1. Assem I., Brown P. Strongly simply connected Auslander algebras – Glasqow Math. J. – 1997. – 39, no. 1. – p.21–27.
2. Bautista R., Larrión F. Auslander-Reiten quivers for certain algebras of finite representation type. – J. London Math. Soc. (2). – 1982. – 26, no. 1. – p.43–52.
3. Bongartz K., Gabriel P. Covering spaces in representation-theory. – Invent. Math. – 1981. – 65, no. 3. – p.331–378.
4. Brenner S., Butler M. Wild subquivers of the AuslanderReiten quiver of a tame algebra. Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras. – Contemp. Math. – 1997. – 229. – p.29–48.
5. Dieterich E. Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings. – Math. Z. – 1983. – 184, no. 1. – p.43–60.
6. Gabriel P. Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. Representation theory, I. – Lecture Notes in Math. – 1979. – 831. – p.1-71.
7. Geiss C., Leclerc B., Schröer J. Auslander algebras and initial seeds for cluster algebras. – J. Lond. Soc. – 2007. – 75, no. 3. – p.718–740.
8. Igusa K., Platzeck M., Todorov G., Zacharia D. Auslander algebras of finite representation type. – Comm. Algebra, – 1987. – 15, no. 1-2. – p.377–424.
9. Leszczyński Z., Skowroński A. Auslander algebras of tame representation type. Representation theory of algebras. – 1994, p.475–486.
10. Riedtmann C. On stable blocks of Auslander-algebras. – Trans. Amer. Math. Soc., – 1984. – 283, no. 2. – p.485–505.

Надійшла до редколегії 27.11.13

В. Бондаренко, д-р физ.-мат. наук
Институт математики НАН Украины, Киев,
О. Зубарук, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

АЛГЕБРА АУСЛЕНДЕРА ДЛЯ ПАР ИДЕМПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ С СЕНДВИЧ-СООТНОШЕНИЯМИ

Описана алгебра Ауслендера для задачи о классификации пар идемпотентных матриц A, B с соотношениями ABA=0, BAB=0.

V. Bondarenko, Full Doct.
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,
O. Zubaruk, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

THE AUSLANDER ALGEBRA FOR THE PAIRS OF IDEMPOTENT MATRICES WITH SANDWICH RELATIONS

We describe the Auslander algebra for the problem of classification of pairs of idempotent matrices A, B with the relations ABA=0, BAB=0.

УДК 512.552.1

С. Лисенко, асп., В. Лучко, канд. фіз.-мат. наук, А. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ОРТОГОНАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ НА АСОЦІАТИВНИХ АЛГЕБРАХ

Нехай K – поле і A – асоціативна алгебра над K (не обов'язково з одиницею). Лінійний оператор T на A будемо називати ортогональним, якщо T(x)T(y)=xy для довільних x, y із A. Вивчаються асоціативні алгебри з нетривіальним ортогональним оператором T і група O(A) всіх бієктивних ортогональних операторів на A для деяких класів алгебр. Доведено, що радикал Джекобсона J(A) інваріантний відносно дії такої групи. Структура групи O(A) досліджена для деяких класів алгебр A.

ВСТУП. В статтях [1] – [3] вивчались ортогональні оператори на алгебрах Лі (лінійний оператор $T: L \to L$ на алгебрі Лі L називається ортогональним або Лі-ортогональним, якщо виконується умова $[T(x), T(y)] = [x, y]$ для довільних $x, y \in L$). В цих працях, зокрема, доведено, що прості скінченновимірні алгебри Лі характеристики 0 мають