УДК 517.9

Б. Репета, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛОГ БІФУРКАЦІЇ НАРОДЖЕННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА У СИСТЕМАХ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

В даній статті описується динамічна біфуркація, при якій положення рівноваги диференціальної системи в деякий момент часу втрачає стійкість та встановлюється коливальний режим. Методом нормальних форм отримується біфуркаційна система, що досліджується на дисипативність та конвергентність. Кінцевим результатом є доведення теореми про асимптотичне зображення розв'язків нормалізованої системи.

Вступ

В даній статті ми розглянемо диференціальну систему

$$\dot{x} = A(\tau,\varepsilon)x + F(\tau,x,\varepsilon),$$

яка залежить від "повільного" часу $\tau = \varepsilon t$ та малого параметра $\varepsilon > 0$. Нас цікавитиме випадок, коли спектр матриці $A(\tau,0)$ утворюють пари суто уявних власних чисел $\pm i\omega_j(\tau),\ j=\overline{1,n}$, а система має тривіальне положення рівноваги, яке в деякий момент, скажімо $\tau = 0$, втрачає властивість стійкості. Тобто при $\tau < 0$ це положення рівноваги поводить себе як локальний атрактор, притягуючи близькі розв'язки, а при $\tau > 0$ воно стає репелером. Наша мета полягає в тому, аби показати, що за певних додаткових умов в системі відбувається встановлення стійкого коливального режиму і ми маємо змогу спостерігати динамічну біфуркацію, яка є аналогом біфуркації народження інваріантного тора в автономному випадку, детально описаної в [2].

Серед основоположних праць, присвячених вивченню динамічних біфуркацій у нелінійних системах зі швидкими та повільними змінними вигляду

$$\dot{x} = \varepsilon f(x,y,\lambda), \quad \dot{y} = g(x,y,\lambda),$$

відзначимо [6, 9]. У цих статтях, а згодом у [7] вивчалося, зокрема, явище затримки втрати стійкості, яке полягає в наступному. Коли під час біфуркації положення рівноваги повільної системи втрачає властивість стійкості, близькі до нього траєкторії певний час порядку $O(1/\varepsilon)$ залишаються в його околі, а потім швидко віддаляються від цього положення на відстань $O(1)$. На відміну від цих праць ми зосереджуємося на аналізі коливальних режимів, які виникають у процесі динамічної біфуркації.

Для дослідження вихідної диференціальної системи ми використаємо вже відомі результати про неавтономний метод нормальних форм для побудови модельної біфуркаційної системи [8], а також деякі відомості з теорії дисипативних та конвергентних систем для якісного аналізу останньої. Насамкінець буде сформульовано й доведено теорему про асимптотичне зображення розв'язків вихідної системи.

Отримані результати можуть бути корисними при дослідженні математичних моделей деяких явищ нелінійної механіки, гідродинаміки та динаміки популяцій.

Зазначимо, що окрім вже згаданих джерел детальну інформацію про побудову нормальних форм можна знайти, наприклад, в [11], де розглянуто неавтономні системи, системи з повільно змінними параметрами та проведено порівняння методу нормальних форм з іншими способами якісного дослідження нелінійних рівнянь. У випадку, коли права частина періодична за часом, можна звернутись до [5]. Також для ознайомлення з цим методом можна звернутись до [10]. Особливу увагу в останній відведено системам, у яких лінійна частина має нульові або суто уявні власні числа, системам на центральних многовидах та наведено приклади деяких біфуркацій, наприклад Гопфа та Богданова-Такенса.

Стосовно дослідження явищ біфуркації у системах зі швидкими та повільними змінними заслуговують на увагу праці [12, 14], пов'язані з багатовимірною біфуркацією Гопфа, з'ясуванням властивостей стійкості народжуваних циклів, знаходження сталої Ляпунова, що за них відповідає, тощо. Інший тип біфуркації народження циклу – "катастрофу блакитного неба" – описано в [4]. Для неї характерним є необмежене зростання періоду та довжини циклу, коли біфуркаційний параметр стає як завгодно малим.

Нарешті, варто відзначити ще один результат загального характеру про динамічні біфуркації, анонсований в [1]: якщо в результаті звичайної біфуркації в системі виникає експоненціальний стійкий або гіперболічний інваріантний многовид, то аналогічне явище можна спостерігати і при малій динамічній біфуркації.

Нормалізація системи

Будемо розглядати $2n$-вимірну диференціальну систему

$$\dot{x} = A(\tau,\varepsilon)x + F(\tau,x,\varepsilon), \tag{1}$$

залежну від "повільного" часу $\tau = \varepsilon t$ та малого параметра $\varepsilon > 0$, для якої виконуються наступні припущення

1. $F(\tau,0,\varepsilon) = 0$, $F'_x(\tau,0,\varepsilon) = 0$;
2. матриця $A(\tau,0)$ має прості суто уявні власні числа $\pm i\omega_j(\tau),\ j=\overline{1,n}$;
3. функції $\pm i\omega_j(\tau),\ j=\overline{1,n}$ додатні, неперервні та обмежені на всій осі;
4. $\inf\limits_{\tau\in\mathbb{R}} |\omega_i(\tau) - \omega_j(\tau)| > 0,\ i \ne j$;
5. функції $A(\tau,\varepsilon)$ та $F(\tau,x,\varepsilon)$ визначені на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$ відповідно, гладкі.

За вказаних вище умов можна застосувати метод нормальних форм [8]. Опишемо коротко його ідею.

Нехай в системі (1)

$$A(\tau,\varepsilon)=\sum_{l\geq 0}A_l(\tau)\varepsilon^l,\qquad F(\tau,x,\varepsilon)=\sum_{k\geq 2}\sum_{l\geq 0}F_{k,l}(\tau)\varepsilon^l x^k.$$

Ряди в правих частинах формальні або збіжні, а відображення $A_l\in C^\infty(\mathbb{R}\to\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})),\ F_{k,l}\in C^\infty(\mathbb{R}\to\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n))$ обмежені на дійсній осі разом з усіма своїми похідними. Тут через $\mathfrak{F}^k$ поначено простір $\mathbb{R}^n$-значних однорідних поліноміальних форм k-го степеня.

Тоді виконавши заміну $y=S(\tau)z$, де $S(\tau)$ – матриця, складена з власних векторів матриці $A_0(\tau)$, яка зводить матрицю $A_0(\tau)$ до канонічної форми, та формальне поліноміальне перетворення

$$x=\sum_{k\geq 1}\sum_{l\geq 0}H_{k,l}(\tau)\varepsilon^l y^k,\quad H_{1,0}(\tau)=E,$$

систему (1) можна звести до вигляду

$$\dot z_j=\left(\lambda_j(\tau)+\sum_{l\geq 1}\lambda_{j,l}(\tau)\varepsilon^l\right)z_j+\sum_{\substack{|q|\geq 2\\ \mathrm{res}}}\sum_{l\geq 0}g_{j,q,l}(\tau)\varepsilon^l z^q,\quad j=\overline{1,n}.$$

При цьому в другу суму входять тільки резонансні члени, тобто ті доданки, індекси яких задовольняють нерівність

$$\inf_{\tau\in\mathbb{R}}\left|\ \langle q,\Lambda(\tau)\rangle-\lambda_j(\tau)\right|=0,$$

де вектор $\Lambda(\tau)=(\lambda_1(\tau),...,\lambda_{2n}(\tau))$. Детально процес побудови такої нормальної форми описано в [8].

Розглянемо умови резонансів системи (1). Власні числа матриці $A(\tau,0)$ мають вигляд $\pm i\omega_j(\tau),\ j=\overline{1,n}$, тому вказаний вектор $\Lambda(\tau)$ можна визначити як $\Lambda(\tau)=(i\omega_1(\tau),-i\omega_1(\tau),...,i\omega_n(\tau),-i\omega_n(\tau))$. Оскільки він складається з n пар комплексно спряжених суто уявних функцій, то ми отримаємо лише n різних умов резонансів:

$$\inf_{\tau\in\mathbb{R}}\left|(q_1-q_2-1)\omega_1(\tau)+(q_3-q_4)\omega_2(\tau)+...+(q_{2n-1}-q_{2n})\omega_n(\tau)\right|=0,$$

$$\dots$$

$$\inf_{\tau\in\mathbb{R}}\left|(q_1-q_2)\omega_1(\tau)+(q_3-q_4)\omega_2(\tau)+...+(q_{2n-1}-q_{2n}-1)\omega_n(\tau)\right|=0.$$

Очевидно, що з виконання рівностей

$$q_1=q_2,\ ...,\ q_{2j-3}=q_{2j-2},\quad q_{2j-1}=q_{2j}+1,\quad q_{2j+1}=q_{2j+2},\ \ ...,\ \ q_{2n-1}=q_{2n}$$

випливає виконання j-ої умови резонансу. Тому для того щоб отримати потрібні нам доданки в нормальній формі, будемо вважати, що при всіх інших значеннях q таких, що $|q|\leq 4$, кожна лінійна комбінація

$$(q_1-q_2)\omega_1(\tau)+...+(q_{2j-1}-q_{2j}-1)\omega_j(\tau)+...+(q_{2n-1}-q_{2n})\omega_n(\tau),\quad j=\overline{1,n},$$

відділена від нуля на всій осі.

Тоді (1) можна поліноміальним перетворенням звести до системи з n пар комплексно спряжених рівнянь

$$\dot z_i=\left[i\omega_i(\tau)+\sum_{l\geq 1}\lambda_{i,l}(\tau)\varepsilon^l\right]z_i+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}a_{i,j,l}(\tau)\,|z_j|^2\,z_i\varepsilon^l+Z_i(\tau,z,\varepsilon),\quad i=\overline{1,n},$$

де функції $Z_k(\tau,z,\varepsilon)$ мають порядок $O(z^5)$ при $z\to 0$, а коефіцієнти $\lambda_{i,j}(\tau)$ та $a_{i,j,l}(\tau),\ i,j\geq 1,\ l\geq 0$ – гладкі та обмежені на всій осі.

Перейшовши до полярних змінних і повільного часу $\tau=\varepsilon t$ та зробивши розтяг за допомогою заміни $z_j=\sqrt{\varepsilon r_j},\ j=\overline{1,n}$, остаточно отримаємо систему вигляду

$$r_i'=\alpha_i(\tau)r_i+\sum_{k=1}^{n}\beta_{i,k}(\tau)r_k r_i+\varepsilon R_i(\tau,r,\varphi,\varepsilon),\quad i=\overline{1,n},\tag{2}$$

$$\varphi_i'=\frac{\omega_i(\tau)}{\varepsilon}+\omega_{i,1}(\tau)+\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(\tau)r_k+\varepsilon\Phi_i(\tau,r,\varphi,\varepsilon),\quad i=\overline{1,n},$$

в якій диференціювання в лівій частині здійснюється за змінною τ, а коефіцієнти мають вигляд

$$\alpha_i(\tau)=\mathrm{Re}\,\lambda_{i,0}(\tau),\quad \beta_{i,j}(\tau)=\mathrm{Re}\,a_{i,j,0}(\tau),\quad \omega_{i,1}(\tau)=\mathrm{Im}\,\lambda_{i,0}(\tau),\quad c_{i,k}(\tau)=\mathrm{Im}\,a_{i,k,0}(\tau).$$

При цьому для будь-якого $R>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0>0$, що праві частини системи (2) є гладкими 2π-періодичними за змінною φ функціями на множині

$$D:=\{\tau\in\mathbb{R}\}\times\{r\in[0,R]\}\times\{\varphi\in\mathbb{R}\}\times\{\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\}.$$

Саме з системою (2) ми й матимемо справу надалі. Нижче ми з'ясуємо які умови мають задовольняти коефіцієнти $\alpha_i(\tau),\ \ i=\overline{1,n}$ та $\beta_{i,j}(\tau),\ \ i,j=\overline{1,n}$, щоб мав місце динамічний аналог біфуркації народження інваріантного тора найбільшої розмірності. Також ми розглянемо простішу модельну систему, розв'язки якої апроксимують розв'язки системи (2). При цьому бажана динаміка матиме наступний характер.

1. При $\tau<0$ тривіальне положення рівноваги модельної системи відіграє роль глобального атрактора. Причому це положення абсолютно нестійке, коли $\tau\to-\infty$.

2. При $\tau > 0$ тривіальне положення рівноваги є репелером, а всі розв'язки модельної системи притягуються до деякого нетривіального експоненціально стійкого розв'язку, що трактується як встановлення коливального режиму.

Модельна система та її попередній аналіз

Оскільки при малих значеннях ε функції $R_j, \Phi_j, j = \overline{1,n}$, в (2) фактично відіграють роль малих збурень, то природно, що поведінка розв'язків системи (2) значною мірою визначається простішою модельною системою, складеною з рівнянь для радіальних та кутових змінних

$$r_i' = \alpha_i(\tau) r_i + \sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k}(\tau) r_k r_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\varphi_i' = \frac{\omega_i(\tau)}{\varepsilon}, \quad i = \overline{1,n}.$$

При цьому основний інтерес становить тільки частина з радіальними змінними.

Зауважимо, що права частина (3) є локально ліпшицевою відносно $r = (r_1, \ldots, r_n)$, а отже для неї має місце єдиність розв'язків. Унаслідок цього будь-який розв'язок $r(\tau; \tau_0, r_0)$, що проходить через точку $r_0 \in \mathbb{R}_+^n$ у деякий момент часу τ_0, не виходить за межі позитивного конуса $\mathbb{R}_+^n$. Дійсно, якби $r(\tau; \tau_0, y_0)$ перетинав межу $\partial \mathbb{R}_+^n$ в момент часу τ_1, то хоча б одна з координат $r_i(\tau; \tau_0, r_0)$ стала б рівною нулеві, а отже і для похідної ми б мали

$$r_i'(\tau; \tau_0, r_0) = 0.$$

Але в силу єдиності, це можливо лише для розв'язків, що лежать у гіперплощині $r_i = 0$.

Тому надалі нас буде цікавити радіальна складова системи (3) лише в позитивному конусі. При цьому замість звичайної евклідової норми $\|r\|$ зручніше буде використовувати норму $\|r\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |r_i|$.

Із зроблених раніше припущень щодо поведінки розв'язків модельної системи та характеру її стійкості одразу можна виписати умови на компоненти вектора $\alpha(\tau) = (\alpha_1(\tau), ..., \alpha_n(\tau))$:

$$\operatorname{sgn} \alpha_i(\tau) = \operatorname{sgn} \tau,$$

$$\limsup_{\tau \to -\infty} \alpha_j(\tau) < 0, \quad \liminf_{\tau \to +\infty} \alpha_j(\tau) > 0. \tag{4}$$

Опишемо тепер умови, яким мають задовольняти елементи матриці $B(\tau) = (\beta_{i,j}(\tau))$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\tau < 0$. Для того, щоб кожен розв'язок $r(\tau)$ наближався до тривіального, норма $\|r(\tau)\|_1$ має спадати, тобто похідна

$$\|r\|_1' = \langle \alpha(\tau), r \rangle + \langle B(\tau) r, r \rangle \tag{5}$$

має бути від'ємною. Це можна забезпечити, наприклад, однією з двох умов:

1) всі елементи матриці $B(\tau)$ недодатні; 2) симетрична частина матриці $B(\tau)$ від'ємно визначена.

Тоді справджується оцінка

$$\|r\|_1' \le \max_i \alpha_i(\tau) \|r\|_1 + Q(\tau) \|r\|_1^2 < 0,$$

де $Q(\tau) = \max_{i,j} \beta_{i,j}(\tau)$ у першому випадку, або $Q(\tau) = \max_{\|r\|=1} \langle B(\tau) r, r \rangle$ $Q(\tau) = \max_{\|r\|_1=1} \langle B(\tau) r, r \rangle$ – у другому.

З урахуванням (4), $\|r(\tau)\|_1$ строго спадає на $\tau < 0$ і всі розв'язки наближаються до тривіального. При цьому розв'язок $r(\tau; \tau_0, r_0)$, який задовольняє початкову умову $r(\tau_0; \tau_0, r_0) = r_0$ в деякий віддалений в минуле момент часу $\tau_0 < 0$, наближається до тривіального розв'язку тим ближче при $\tau \to 0-$, чим більше значення $|\tau_0|$.

Дисипативність модельної системи

На наступному кроці з'ясуємо за яких умов система (3) дисипативна при $\tau > 0$: всі розв'язки з початковими значеннями в $\mathbb{R}_+^n$ входять в деяку множину $\{\|r\|_1 < M, r \in \mathbb{R}_+^n\}$ та в подальшому не залишають її. При цьому будемо надалі припускати, що симетрична частина матриці $B(\tau)$ рівномірно від'ємно визначена при $\tau \ge 0$.

Позначимо

$$a_*(\tau) = \min_i \alpha_i(\tau), \quad a^*(\tau) = \max_i \alpha_i(\tau), \quad b_*(\tau) = \min_{\|r\|_1=1} \langle -B(\tau) r, r \rangle, \quad b^*(\tau) = \max_{\|r\|_1=1} \langle -B(\tau) r, r \rangle.$$

Тоді в рівнянні (5) похідну норми розв'язку можна оцінити як

$$a_*(\tau) \|r\|_1 - b^*(\tau) \|r\|_1^2 \le \|r\|_1' \le a^*(\tau) \|r\|_1 - b_*(\tau) \|r\|_1^2.$$

Розв'язавши відповідні нижнє й верхнє рівняння Бернуллі, отримаємо оцінку для норми розв'язку

$$e^{\int_{\tau_0}^{\tau} a_*(s) ds} \left(\|r(\tau_0)\|_1^{-1} + \int_{\tau_0}^{\tau} b^*(p) e^{\int_{\tau_0}^{p} a_*(s) ds} dp \right)^{-1} \le \|r(\tau)\|_1 \le e^{\int_{\tau_0}^{\tau} a^*(s) ds} \left(\|r(\tau_0)\|_1^{-1} + \int_{\tau_0}^{\tau} b_*(p) e^{\int_{\tau_0}^{p} a^*(s) ds} dp \right)^{-1}.$$

Після спрямування $\tau \to \infty$ остаточно будемо мати

$$0 < \liminf_{\tau\to\infty} \frac{a_*(\tau)}{b^*(\tau)} \le \liminf_{\tau\to\infty} \|r(\tau)\|_1 \le \limsup_{\tau\to\infty} \|r(\tau)\|_1 \le \limsup_{\tau\to\infty} \frac{a^*(\tau)}{b_*(\tau)} =: M < \infty,$$

що й забезпечує властивість дисипативності.

Оцінка знизу може бути покращена. Для цього введемо функцію

$$z = \langle \alpha(\tau), r \rangle + \langle B(\tau) r, r \rangle. \tag{6}$$

Рівність $z = 0$ при кожному фіксованому $\tau > 0$ визначає еліпсоїд E_τ, який є своєрідним аналогом 0-ізокліни, оскільки на ньому $\|r\|_1' = 0$. Цей еліпсоїд відтинає на додатних координатних півосях відрізки з довжинами $-\alpha_i(\tau)/\beta_{i,i}(\tau),\ \ i = \overline{1,n}$, обмеженими на півосі $\tau > 0$ і відділеними від нуля при $\tau \ge \tau_0 > 0$. Введемо позначення

$$m_*(\tau) = \min_i (\alpha_i(\tau)/-\beta_{i,i}(\tau)), \quad m = \liminf_{\tau\to\infty} m_*(\tau)$$

та покажемо, що число m можна використати як оцінку знизу норми розв'язків модельної системи.

Неважко переконатись, що при довільному фіксованому τ множина $S_\tau = \{\|r\|_1 < m_*(\tau),\ r \in \mathbb{R}_+^n\}$ лежить всередині E_τ. Тоді будь-яка точка $r = \|r\|_1 \sum_i \lambda_i e_i$, де $\sum_i \lambda_i = 1$, e_i – i-ий базисний орт, з множини S_τ задовольняє нерівність

$$z\left(\|r\|_1 \sum_i \lambda_i e_i\right) \ge \|r\|_1 \sum_i \lambda_i (\alpha_i(\tau) + \|r\|_1 \beta_{i,i}(\tau)) >$$

$$> \|r\|_1 \sum_i \lambda_i (\alpha_i(\tau) + m_*(\tau)\beta_{i,i}(\tau)) + \|r\|_1 (\|r\|_1 - m_*(\tau)) \sum_i \lambda_i \beta_{i,i}(\tau) \ge \|r\|_1 (m_*(\tau) - \|r\|_1) \min_i |\beta_{i,i}(\tau)|.$$

Водночас для всіх точок, що лежать за межами E_τ справедлива нерівність $\|r\|_1 \ge m_*(\tau)$.

Для всякого нетривіального розв'язку $r(\tau)$ при $\tau > 0$ апріорі можливі три сценарії поведінки:

1. існує $\tau_0 > 0$ таке, що $z(r(\tau), \tau) > 0$ для всіх $\tau \ge \tau_0$;
2. існує $\tau_0 > 0$ таке, що $z(r(\tau), \tau) \le 0$ для всіх $\tau \ge \tau_0$;
3. жоден з двох попередніх випадків не має місця.

У першому випадку $\|r(\tau)\|_1$ при $\tau \ge \tau_0$ монотонно зростає і, отже, існує границя $\lim_{\tau\to\infty} \|r(\tau)\|_1 = \rho \ge m$. Справді, якщо б $\rho < m$, то при всіх досить великих τ ми б мали

$$\|r(\tau)\|_1' > \rho(m - \rho) \inf_{\tau \ge \tau_0} \min_i |\beta_{i,i}(\tau)| > 0,$$

звідки $\|r(\tau)\|_1 \to \infty,\ \tau \to \infty$, що неможливо.

У другому випадку, як вже було зазначено, $\|r(\tau)\|_1 \ge m_*(\tau)$ і тому $\liminf_{\tau\to\infty} \|r(\tau)\|_1 \ge m$.

У третьому випадку піввісь $\tau > \tau_0$ можна подати у вигляді об'єднання $I_0 \cup I_+ \cup I_-$, де

$$I_0 = \{\tau > \tau_0 \,\text{Ы}\, r(\tau) \in \mathrm{E}_\tau,\ r \in \mathbb{R}_+^n\}, \quad I_+ = \{\tau > \tau_0 \,\text{Ы}\, r(\tau) \in \operatorname{int} \mathrm{E}_\tau,\ r \in \mathbb{R}_+^n\}, \quad I_- = \{\tau > \tau_0 \,\text{Ы}\, r(\tau) \in \operatorname{ext} \mathrm{E}_\tau,\ r \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

Кожна з двох останніх множин як відкрита множина на прямій є об'єднанням неперетинних інтервалів. При цьому вони скінченні, оскільки випадки 1 та 2 виключаються. Тепер бачимо, що для $\tau \in I_0 \cup I_-$ виконується нерівність $\|r(\tau)\|_1 \ge m_*(\tau)$, а якщо $(\tau_1, \tau_2) \subset I_+$ і до моменту τ_1 розв'язок $r(\tau)$ перетнув еліпсоїд, то $\|r(\tau)\|_1 > m_*(\tau_1)$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\tau_\varepsilon > 0$, що при $\tau_1 > \tau_\varepsilon$ матимемо $\|r(\tau)\|_1 > m - \varepsilon$.

Підсумовуючи все сказане вище, сформулюємо твердження.

Твердження 1. *Якщо вектор $\alpha(\tau)$ задовольняє умови (4), а симетрична частина матриці $B(\tau)$ рівномірно від'ємно визначена, то всі розв'язки модельної системи (3) при $\tau \to +\infty$ як завгодно близько наближаються до області $\Omega = \left\{m < \|r\|_1 < M,\ r \in \mathbb{R}_+^n\right\}$. При цьому, якщо всі розв'язки $r(\tau)$ такі, що $r(\tau_0) \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^n$, відділені від координатних площин $\partial \mathbb{R}_+^n$ при $\tau \to \infty$, то вони входять в область Ω за скінченний час.*

Відділеність розв'язків від $\partial \mathbb{R}_+^n$

Якщо б досліджувана система було автономною, то для того, щоб у ній спостерігалося явище біфуркації народження n-вимірного інваріантного тора внаслідок переходу параметра ε через критичне значення $\varepsilon = 0$, відповідна модельна система при $\varepsilon > 0$ повинна була б мати в $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^n$ експоненціально стійке положення рівноваги. Беручи до уваги цей факт, ми проаналізуємо умови, які гарантують відділеність від межі $\partial \mathbb{R}_+^n$ при додатних τ усіх розв'язків неавтономної системи (3), що починаються в $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^n$.

Розглянемо i -е рівняння модельної системи:

$$r_i' = (\alpha_i(\tau) + \sum_{j \neq i} \beta_{i,j}(\tau) r_j) r_i + \beta_{i,i}(\tau) r_i^2 .$$

Якщо розв'язати це рівняння як рівняння Бернуллі, то можна використати оцінку

$$\liminf_{\tau \to \infty} r_i(\tau) \geq \liminf_{\tau \to \infty} \frac{\inf_{r \in \Omega}(\alpha_i(\tau) + \sum_{j \neq i} \beta_{i,j}(\tau) r_j)}{-\beta_{i,i}(\tau)} =: m_i .$$

Тоді якщо $m_i > 0$, то розв'язки модельної системи відділені від координатної площини $r_i = 0$.

Повторивши аналогічні міркування для інших рівнянь системи, приходимо до наступного висновку.

Твердження 2. *Якщо всі* $m_i, i = \overline{1,n}$ *, додатні, то розв'язки модельної системи, що починаються в* $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^n$ *, відділені від межі* $\partial \mathbb{R}_+^n$ *та справедливі оцінки* $\liminf_{\tau \to \infty} r_i(\tau) \geq m_i, \quad i = \overline{1,n}$.

Зауважимо, що, коли всі $\beta_{i,j}(\tau), i \neq j$, елементи матриці $B(\tau)$ невід'ємні при великих $\tau > 0$, умови твердження виконуються автоматично.

Конвергентність модельної системи на півосі

Виконаємо заміну $r_j = e^{u_j}$, $j = \overline{1,n}$, в системі (3). Будемо мати

$$u_i' = \alpha_i(\tau) + \beta_{i,1}(\tau) e^{u_1} + \ldots + \beta_{i,n}(\tau) e^{u_n} , \quad i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Зрозуміло, що, якщо при $\tau > 0$ розв'язок $r(\tau)$ системи (3) відділений від $\partial \mathbb{R}_+^n$ та обмежений, то відповідний йому розв'язок $u(\tau)$ системи (7) також обмежений на півосі. Тобто ця система теж є дисипативною. Тепер нас цікавитиме питання, чи є система (7) конвергентною на додатній півосі.

З'ясування властивості конвергентності модельної системи виявилося нетривіальною задачею і нам не вдалося її розв'язати в повному обсязі. Однак у деяких випадках на питання про існування глобально експоненціально стійкого розв'язку все ж можна дати ствердну відповідь. Нехай матриця $B(\tau)$ симетрична. Розглянемо залежну від τ додатно визначену форму $\left\langle -B^{-1}(\tau)(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right\rangle$. Її похідна має вигляд

$$\left\langle -B^{-1}(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right\rangle' = \left\langle -(B^{-1})'(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right\rangle - 2 \left\langle e^{u_1} - e^{u_2}, u_1 - u_2 \right\rangle ,$$

де позначено $e^{u_i} = (e^{u_{i,1}}, \ldots, e^{u_{i,n}}), \ i = \overline{1,2}$.

Використавши теорему Лагранжа, дістанемо

$$\left\langle -B^{-1}(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right\rangle' = \left\langle -(B^{-1})'(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right\rangle - 2 \left\langle e^{\theta} \circ (u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right\rangle ,$$

де $\theta_j \in [u_{1,j}, u_{2,j}], \ j = \overline{1,n}$, а $\circ$ – поелементний добуток матриць (добуток Адамара). З урахуванням виконаної заміни $r_j = e^{u_j}$, $j = \overline{1,n}$, маємо, що починаючи з деякого моменту часу τ_0 справджуються нерівності $e^{\theta_j} \geq m_j, \ j = \overline{1,n}$. Це дає змогу оцінити похідну

$$\left\langle -B^{-1}(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right\rangle' \leq \lambda_{\max}(-(B^{-1})') \|u_1 - u_2\|^2 - 2\varkappa \|u_1 - u_2\|^2 ,$$

де $\varkappa = \min_j m_j$.

З іншого ж боку справедлива нерівність $\left\langle -B^{-1}(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right\rangle \geq \lambda_{\min}(-B^{-1}) \|u_1 - u_2\|^2$, звідки випливає оцінка для норми

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq -\lambda_{\min}(B) \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\lambda_{\max}(-(B(s)^{-1})') - 2\varkappa \right) \|u_1 - u_2\|^2 \, ds + \|u_1(\tau_0) - u_2(\tau_0)\|^2$$

і за лемою Гронуола-Беллмана маємо

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \|u_1(\tau_0) - u_2(\tau_0)\|^2 \exp \int_{\tau_0}^{\tau} \left[-\lambda_{\min}(B(s)) \left(\lambda_{\max}(-(B(s)^{-1})') - 2\varkappa \right) \right] ds .$$

Зважаючи на умови щодо матриці $B(\tau)$, якщо справджується нерівність

$$\sup_{\tau \geq \tau_0} \left(\lambda_{\max}(-(B(\tau)^{-1})') - 2\varkappa \right) < 0 , \tag{8}$$

два довільні розв'язки модельної системи (7) наближаються один до одного з експоненціальною швидкістю при $\tau \to \infty$. Це й означає, що система (7) конвергентна.

Варто зауважити, що, коли додатково матриця $B(\tau)$ стала, умова (8) виконується автоматично.

У деяких випадках замість перевірки нерівності (8) можна скористатись простішими твердженнями. Так з [3, 13] відомо, що для системи у варіаціях

$$\delta \dot{u} = J(\tau, u) \delta u$$

відносно деякого розв'язку $u(\tau)$ має місце оцінка

$$\|\delta u(\tau)\|_1 \le \|\delta u(\tau_0)\|_1 \exp \int_{\tau_0}^{\tau} \max{}_j (J_{j,j}(s,u(s)) + \sum_{i \ne j} |J_{i,j}(s,u(s))|) ds\,. \tag{9}$$

При цьому, якщо інтеграл від'ємний та розбіжний при $\tau \to +\infty$, то модельна система конвергентна на півосі.

Таким чином, коли справедлива нерівність

$$\max_j \sup_{\tau > \tau_0} \left(\beta_{j,j}(\tau) + \sum_{i \ne j} |\beta_{i,j}(\tau)| \right) < 0\,,$$

конвергентність системи (7) випливає безпосередньо з оцінки (9).

Якщо ж модельна система двовимірна та справджуються умови

$$\beta_{1,1}(\tau) + |\beta_{1,2}(\tau)| < 0, \quad \beta_{2,2}(\tau) + |\beta_{2,1}(\tau)| < 0,$$

то за допомогою перетворення

$$\delta z = \operatorname{diag}\{a,b\}\delta u, \quad a = \limsup_{\tau \to \infty} |\beta_{1,2}(\tau)|, \quad b = \limsup_{\tau \to \infty} |\beta_{2,1}(\tau)|$$

отримаємо матрицю Якобі

$$F = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} e^{u_1} & \dfrac{a}{b} \beta_{1,2} e^{u_2} \\ \dfrac{b}{a} \beta_{2,1} e^{u_1} & \beta_{2,2} e^{u_2} \end{pmatrix},$$

для якої

$$\limsup_{\tau \to \infty} (\beta_{1,1}(\tau) + \frac{a}{b} |\beta_{2,1}(\tau)|) \le \limsup_{\tau \to \infty} \beta_{1,1}(\tau) + \limsup_{\tau \to \infty} |\beta_{1,2}(\tau)| < 0\,,$$

$$\limsup_{\tau \to \infty} (\beta_{2,2}(\tau) + \frac{b}{a} |\beta_{1,2}(\tau)|) \le \limsup_{\tau \to \infty} \beta_{2,2}(\tau) + \limsup_{\tau \to \infty} |\beta_{2,1}(\tau)| < 0\,,$$

та знову використаємо оцінку (9).

Асимптотичне зображення розв'язків

Провівши детальний аналіз модельної системи, перейдемо до основного результату. Як і раніше зробимо заміну $r_i = e^{u_i}$, $i = \overline{1,n}$, після якої прийдемо до системи

$$u_i' = \alpha_i(\tau) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k}(\tau) e^{u_k} + R_i(\tau, e^u, \varphi, \varepsilon), \quad i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

$$\varphi_i' = \frac{\omega_i(\tau)}{\varepsilon} + \omega_{i,1}(\tau) + \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}(\tau) e^{u_k} + \varepsilon \Phi_i(\tau, e^u, \varphi, \varepsilon), \quad i = \overline{1,n},$$

в якій через e^u позначено вектор $(e^{u_1}, ..., e^{u_2})$.

Тепер для системи (10) можемо сформулювати та довести теорему про асимптотичне інтегрування. З неї зокрема випливатиме, що u -компоненти розв'язку задачі Коші $u(\tau_0) = u_0$ та $\varphi(\tau_0) = \varphi_0$ системи (10) при $\varepsilon \to 0+$ рівномірно на півосі $\tau \ge \tau_0$ прямують до $u(\tau; \tau_0, u_0)$ – розв'язку модельної системи (7).

Як і раніше ми вважаємо, що вектор $\alpha(\tau)$ задовольняє умови (4), матриця $B(\tau)$ рівномірно від'ємно визначена та виконуються оцінки, що дозволяють стверджувати про дисипативність та конвергентність модельної системи (7).

Теорема 1. *Нехай модельна система (7) має глобально експоненційно стійкий, обмежений на додатній півосі розв'язок* $u_0(\tau)$. *Тоді для довільних* $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 \in \mathbb{T}^n$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ *існують такі числа* $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, *що розв'язок системи (10), який задовольняє початкові умови* $u(\tau_0) = u_0$, $\varphi(\tau_0) = \varphi_0$ *при кожному* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *допускає зображення*

$$u = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i u_i(\tau) + \varepsilon^m U(\tau, \varepsilon),$$

$$\varphi_j = \varphi_{0,j}(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\frac{\omega_j(s)}{\varepsilon} + \omega_{j,1}(s) + \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}(s) e^{u_k(s)} \right] ds + \varepsilon \Psi_j(\tau, \varepsilon), \quad j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

де $u_0(\tau) = u(\tau; \tau_0, u_0)$ *– розв'язок модельного рівняння (7), що задовольняє початкову умову* $u(\tau_0) = u_0$, *а функції* $u_i(\tau), i = \overline{1, m-1}$, $U(\tau, \varepsilon)$, $\Psi(\tau, \varepsilon)$ *гладкі щодо* $\tau \ge \tau_0$, *причому* $u_i(\tau_0) = 0, i = \overline{1, m-1}$ *та*

$$\max_{\tau \ge \tau_0} \left\{ \|u_i(\tau)\|, \|U(\tau, \varepsilon)\|, \frac{\|\Psi(\tau, \varepsilon)\|}{\tau - \tau_0} \right\} \le C, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Доведення. Підставивши (11) в (10), отримаємо низку задач Коші

$$u_i' = J(u_0, \tau)u_i + f_i(\tau), \quad u_i(\tau_0) = 0, \quad i = \overline{1, m-1},$$

де $f_i(\tau)$ утворено з використанням функцій $u_j(\tau),\ j = \overline{0, i-1}$. В силу конвергентності модельної системи симетрична частина її матриці Якобі $J(u_0, \tau)$ від'ємно визначена і кожен розв'язок відповідної задачі Коші $u_i(\tau)$ обмежений при $\tau \to \infty$. Тобто знайдуться такі числа N_i, що $\sup_{\tau \geq \tau_0} \|u_i(\tau)\| \leq N_i,\ i = \overline{1, m-1}$. Останньою будемо мати задачу

$$U' = J(u_0, \tau)U + F(\tau, \varepsilon^m U, \varepsilon\Psi, \varepsilon), \quad U(0, \varepsilon) = 0,$$

$$\Psi' = G(\tau, \varepsilon^m U, \varepsilon\Psi, \varepsilon), \quad \Psi(0, \varepsilon) = 0\,.$$

Оскільки розв'язок $u_0(\tau)$ модельного рівняння фінально обмежений, то знайдуться такі числа $\delta > 0, \varepsilon_0 > 0$, що функції F та G будуть гладкими, обмеженими та 2π-періодичними за змінною φ на множині

$$\Delta = \mathbb{R} \times [-\delta, \delta]^n \times \mathbb{R}^n \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0].$$

Функції U, Ψ будемо шукати як нерухому точку оператора

$$A[U, \Psi] = \left(\int_{\tau_0}^{\tau} \Omega_\tau^s F(s, \varepsilon^m U, \varepsilon\Psi, \varepsilon)ds, \int_{\tau_0}^{\tau} G(s, \varepsilon^m U, \varepsilon\Psi, \varepsilon)ds\right),$$

визначеного на просторі

$$S = \left\{ \left(U(\cdot, \varepsilon), \Psi(\cdot, \varepsilon)\right) \in C\left([\tau_0, \infty) \to [-\sigma, \sigma]^n \times \mathbb{R}^n\right),\ \frac{\|\Psi(\tau, \varepsilon)\|}{\tau - \tau_0} \leq M \right\}.$$

Тут Ω_τ^s – фундаментальна матриця системи $u' = J(\tau, u_0)u$, для якої в силу експоненціальної стійкості розв'язку u_0 модельної системи справджується оцінка $\left\|\Omega_\tau^s\right\| \leq Ke^{-\gamma(\tau - s)}$, для деяких $K > 0, \gamma > 0$. Сталі σ, M визначаються наступним чином

$$\sigma = \frac{KM}{\gamma}, \quad M = \max\{\max_{\Delta}\|F\|, \max_{\Delta}\|G\|\}.$$

Оскільки для всіх $(U, \Psi) \in S$ та $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$

$$\left\|\int_{\tau_0}^{\tau} \Omega_\tau^s F(s, \varepsilon^m U, \varepsilon\Psi, \varepsilon)ds\right\| \leq \sigma, \quad \left\|\int_{\tau_0}^{\tau} G(s, \varepsilon^m U, \varepsilon\Psi, \varepsilon)ds\right\| \leq M(\tau - \tau_0),$$

то оператор A відображає простір S у себе. Крім того з гладкості функцій F, G випливає існування сталої Ліпшиця $L > 0$ такої, що

$$\|F(\tau, v_1, \phi_1, \varepsilon) - F(\tau, v_2, \phi_2, \varepsilon)\| \leq L\left(\|v_1 - v_2\| + \|\phi_1 - \phi_2\|\right),$$

$$\|G(\tau, v_1, \phi_1, \varepsilon) - G(\tau, v_2, \phi_2, \varepsilon)\| \leq L\left(\|v_1 - v_2\| + \|\phi_1 - \phi_2\|\right)$$

для всіх $(\tau, v_1, \phi_1, \varepsilon), (\tau, v_2, \phi_2, \varepsilon) \in \Delta$.

Введемо в просторі S метрику

$$d((v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2)) = \sup_{\tau \geq \tau_0}\left[e^{L(\tau_0 - \tau)}\left(\|v_1(\tau, \varepsilon) - v_2(\tau, \varepsilon)\| + \|\phi_1(\tau, \varepsilon) - \phi_2(\tau, \varepsilon)\|\right)\right].$$

Тоді для $\varepsilon < 1$

$$d\left(A[U_1, \Psi_1], A[U_2, \Psi_2]\right) \leq$$

$$\leq \sup_{\tau \geq \tau_0}\left\{e^{L(\tau_0 - \tau)}\left[\int_{\tau_0}^{\tau} KLe^{\gamma(s - \tau)}\left(\varepsilon^m\|U_1(s, \varepsilon) - U_2(s, \varepsilon)\| + \varepsilon\|\Psi_1(s, \varepsilon) - \Psi_2(s, \varepsilon)\|\right)ds + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{\tau_0}^{\tau} L\left(\varepsilon^m\|U_1(s, \varepsilon) - U_2(s, \varepsilon)\| + \varepsilon\|\Psi_1(s, \varepsilon) - \Psi_2(s, \varepsilon)\|\right)ds\right]\right\} \leq$$

$$\leq \varepsilon\sup_{\tau \geq \tau_0}\left\{e^{L(\tau_0 - \tau}\int_{\tau_0}^{\tau}(K+1)Le^{L(s - \tau_0)}ds\right\}d\left((U_1, \Psi_1), (U_2, \Psi_2)\right) \leq \varepsilon(K+1)d((U_1, \Psi_1), (U_2, \Psi_2)).$$

Якщо вибрати ε_0 так, щоб справджувалась нерівність $\varepsilon_0(K+1) < 1,$ то оператор A буде оператором стиску та матиме єдину нерухому точку.

Для завершення доведення залишилось покласти $C = \max\{N_1, ..., N_{m-1}, \sigma, M\}$.

Висновки

Ми розглянули $2n$-вимірну диференціальну систему з повільно змінними параметрами, яка має стійке до певного моменту часу положення рівноваги. В наслідок втрати останнім властивості стійкості ми можемо спостерігати динамічну біфуркацію, що є неавтономним аналогом біфуркації народження інваріантного тора. Так в нашому випадку розв'язки вихідної системи прямують до глобально експоненційно стійкого розв'язку модельної системи, коли біфуркаційний параметр $\varepsilon \to 0+$, що означає встановлення з часом певного багаточастотного коливного режиму.

При цьому деякі питання вимагають більш детального вивчення. Так можна було б покращити умови щодо коефіцієнтів біфуркаційної системи. Наприклад природно було б очікувати, що для конвергентності цієї системи достатньо лише додатності функцій $\alpha_j(\tau),\ j=\overline{1,n}$, та рівномірної від'ємної визначеності симетричної частини $B(\tau)$.

Список використаних джерел

1. Аносова О. Д. Инвариантные многообразия и динамические бифуркации // Успіхи мат. наук. – 2005. – Т. 60, № 1. – С. 157-158.
2. Бибиков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. – Л., 1991.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немцький В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости – М., 1966.
4. Колесов А. Ю. Об одной бифуркации в релаксационных системах // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 1. – С. 63–72.
5. Лисяной В. Ф. О нормальной форме неавтономных систем // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, № 5. – С. 665–667.
6. Нейштадт А. И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи мат. наук. – 1985. – Т. 40 , № 5. – С. 190–191.
7. Нейштадт А. И. Затягивание потери устойчивости при динамических бифуркациях // Нелинейные волны'2006 / Под ред. Гапонов-Грехов А. В., Некоркин В. И. – Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2007. – С. 461–476.
8. Парасюк І. О., Перестюк М. О. Локальний аналіз нелінійних диференціальних рівнянь – Кам'янець-Подільський, 2013.
9. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 209, № 3.
10. Haragus M., Iooss G. Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite Dimensional Dynamical Systems. – EDP Sciences, 2011.
11. Lee DeVille R. E., Harkin A., Holzer M., Kaper T. J. Analysis of a renormalization group method and normal form theory for perturbed ordinary differential equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2008. – June. – Vol. 237, no. 8. – P. 1029-1052.
12. Lijun Yang, Xianwu Zeng. Stability of singular Hopf bifurcations // Journal of Differential Equations. – 2004. – Vol. 206, no. 1. – P. 30-54.
13. Lohmiller W., Slotine J.-J. E. On Contraction Analysis for Non-linear Systems // Automatica. – 1998. – Vol. 34, no. 6. – P. 683–696.
14. Rachinskii D., Schneider K. Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms // Journ. Differ.. Eq. – 2005. – Vol. 210, no. 1. – P. 65-86.

Надійшла до редколегії 11.11.13

Б. Репета, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛОГ БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА В СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

В этой статье описывается динамическая бифуркация, при которой положение равновесия дифференциальной системы в некоторый момент времени теряет устойчивость и устанавливается колебательный режим. Посредством метода нормальных форм получается бифуркационная система, исследуемая на свойства диссипативности и конвергентности. Конечным результатом является доказательство теоремы об асимптотическом представлении решений нормализованной системы.

B. Repeta, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

THE DYNAMIC COUNTERPART FOR THE BIFURCATION OF THE BIRTH OF INVARIANT TORUS IN SYSTEMS WITH SLOWLY CHANGING PARAMETERS

This paper describes the following dynamic bifurcation. The differential system has an equilibrium which loses stability at some point of time and as a result the oscillations occur. Using the normal forms method, we obtain the bifurcation system. The dissipativity and convergence of the latter are studied. The final result consists in proving the asymptotic representation theorem for solutions of the normalized system.

УДК 517.9

Ю. Самойленко, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, м.Київ

ДВОФАЗОВИЙ АСИМПТОТИЧНИЙ СОЛІТОНОПОДІБНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

Розглядається питання про побудову головного члена двофазового асимптотичного солітоноподібного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у загальному випадку. Описано множину початкових значень, при яких побудова такого асимптотичного розв'язку можлива.

Вступ

Рівняння Кортевега-де Фріза [6]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in R,\ t \in [0;T], \tag{1}$$

є фундаментальним рівнянням сучасної математичної і теоретичної фізики. Вперше це рівняння було отримано Д.Кортевегом і Дж. де Фрізом у 1895 році для опису руху відокремленої хвилі [8], які знайшли його розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = u_0 + \frac{a^2}{2} ch^{-2}\left(\frac{a(x-\varphi(t))}{2}\right),\ x \in R,\ t \in [0;T],$$

де $\varphi(t) = (a^2 + 6u_0)t$; $a > 0$, $u_0 > 0$ – довільні (фіксовані) дійсні сталі.

Саме завдяки інтенсивним дослідженням цього рівняння було створено метод оберненої задачі розсіювання, який успішно в подальшому було використано для побудови точних розв'язків спеціального вигляду для низки нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, для рівняння Кортевега-де Фріза (1) було отримано так званий двосолітонний (дублетний) розв'язок, який записується за допомогою формули вигляду

$$u(x,t) = 12\frac{4ch\,(2x-8t) + ch\,(4x-64t) + 3}{\left[3ch\,(x-28t) + ch\,(3x-36t)\right]^2}.$$