При цьому деякі питання вимагають більш детального вивчення. Так можна було б покращити умови щодо коефіцієнтів біфуркаційної системи. Наприклад природно було б очікувати, що для конвергентності цієї системи достатньо лише додатності функцій $\alpha_j(\tau), j=\overline{1,n}$, та рівномірної від'ємної визначеності симетричної частини $B(\tau)$.

Список використаних джерел

1. Аносова О. Д. Инвариантные многообразия и динамические бифуркации // Успіхи мат. наук. – 2005. – Т. 60, № 1. – С. 157-158.
2. Бибиков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. – Л., 1991.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немцький В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости – М., 1966.
4. Колесов А. Ю. Об одной бифуркации в релаксационных системах // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 1. – С. 63–72.
5. Лисяной В. Ф. О нормальной форме неавтономных систем // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, № 5. – С. 665–667.
6. Нейштадт А. И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи мат. наук. – 1985. – Т. 40 , № 5. – С. 190–191.
7. Нейштадт А. И. Затягивание потери устойчивости при динамических бифуркациях // Нелинейные волны'2006 / Под ред. Гапонов-Грехов А. В., Некоркин В. И. – Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2007. – С. 461–476.
8. Парасюк І. О., Перестюк М. О. Локальний аналіз нелінійних диференціальних рівнянь – Кам'янець-Подільський, 2013.
9. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 209, № 3.
10. Haragus M., Iooss G. Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite Dimensional Dynamical Systems. – EDP Sciences, 2011.
11. Lee DeVille R. E., Harkin A., Holzer M., Kaper T. J. Analysis of a renormalization group method and normal form theory for perturbed ordinary differential equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2008. – June. – Vol. 237, no. 8. – P. 1029-1052.
12. Lijun Yang, Xianwu Zeng. Stability of singular Hopf bifurcations // Journal of Differential Equations. – 2004. – Vol. 206, no. 1. – P. 30-54.
13. Lohmiller W., Slotine J.-J. E. On Contraction Analysis for Non-linear Systems // Automatica. – 1998. – Vol. 34, no. 6. – P. 683–696.
14. Rachinskii D., Schneider K. Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms // Journ. Differ.. Eq. – 2005. – Vol. 210, no. 1. – P. 65-86.

Надійшла до редколегії 11.11.13

Б. Репета, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛОГ БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА В СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

В этой статье описывается динамическая бифуркация, при которой положение равновесия дифференциальной системы в некоторый момент времени теряет устойчивость и устанавливается колебательный режим. Посредством метода нормальных форм получается бифуркационная система, исследуемая на свойства диссипативности и конвергентности. Конечным результатом является доказательство теоремы об асимптотическом представлении решений нормализованной системы.

B. Repeta, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

THE DYNAMIC COUNTERPART FOR THE BIFURCATION OF THE BIRTH OF INVARIANT TORUS IN SYSTEMS WITH SLOWLY CHANGING PARAMETERS

This paper describes the following dynamic bifurcation. The differential system has an equilibrium which loses stability at some point of time and as a result the oscillations occur. Using the normal forms method, we obtain the bifurcation system. The dissipativity and convergence of the latter are studied. The final result consists in proving the asymptotic representation theorem for solutions of the normalized system.

УДК 517.9

Ю. Самойленко, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, м.Київ

ДВОФАЗОВИЙ АСИМПТОТИЧНИЙ СОЛІТОНОПОДІБНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

Розглядається питання про побудову головного члена двофазового асимптотичного солітоноподібного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у загальному випадку. Описано множину початкових значень, при яких побудова такого асимптотичного розв'язку можлива.

Вступ

Рівняння Кортевега-де Фріза [6]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in R,\, t \in [0;T], \tag{1}$$

є фундаментальним рівнянням сучасної математичної і теоретичної фізики. Вперше це рівняння було отримано Д.Кортевегом і Дж. де Фрізом у 1895 році для опису руху відокремленої хвилі [8], які знайшли його розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = u_0 + \frac{a^2}{2} ch^{-2}\left(\frac{a(x-\varphi(t))}{2}\right), x \in R,\, t \in [0;T],$$

де $\varphi(t) = (a^2 + 6u_0)t$; $a > 0$, $u_0 > 0$ – довільні (фіксовані) дійсні сталі.

Саме завдяки інтенсивним дослідженням цього рівняння було створено метод оберненої задачі розсіювання, який успішно в подальшому було використано для побудови точних розв'язків спеціального вигляду для низки нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, для рівняння Кортевега-де Фріза (1) було отримано так званий двосолітонний (дублетний) розв'язок, який записується за допомогою формули вигляду

$$u(x,t) = 12\frac{4ch\,(2x-8t) + ch\,(4x-64t) + 3}{\left[3ch\,(x-28t) + ch\,(3x-36t)\right]^2}.$$

Проте, якщо для дослідження рівняння Кортевега-де Фріза зі сталими коефіцієнтами можна використовувати метод оберненої задачі розсіювання, то у випадку, коли це рівняння має змінні коефіцієнти, чи не єдиним підходом до його дослідження є асимптотичний аналіз.

У даній статті розглядається рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x \tag{2}$$

з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon) = f(x,\varepsilon)\,, \tag{3}$$

де

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)\varepsilon^k\,,\ b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,t)\varepsilon^k\,,$$

функції $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^\infty(R\times[0;T])$, $k \ge 0$, причому $a_0(x,t) \ne 0$, $b_0(x,t) \ne 0$ при всіх $(x,t) \in R\times[0;T]$.

Відомо, що наявність однофазового чи двофазового солітонного розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі сталими коефіцієнтами залежить від вигляду початкової умови. Цілком природно виникає питання, чи можна знайти множину початкових умов для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, щоб відповідна задача Коші (2), (3) мала асимптотичний розв'язок, який за своєю структурою в певному сенсі є близьким до двофазового солітонного розв'язку. Така множина описана в праці [2]. При цьому, в [2] суттєво використовується умова рівності коефіцієнтів рівняння на так званих кривих розриву. У даній статті запропоновано підхід, який дозволяє без умови рівності коефіцієнтів на кривих розриву знайти початкові умови для рівняння (2), для яких можна побудувати головний член асимптотичного розв'язку задачі (2), (3), який за своєю структурою є близьким до двохсолітонного.

Основні припущення і позначення

У подальшому використовується простір швидко спадних функцій $S = S(R)$, тобто простір таких нескінченно диференційовних на множині R функцій, що для довільних цілих чисел $m,n \ge 0$ виконується умова [5]

$$\sup_{x\in R}\left| x^m \frac{d^n}{dx^n}u(x)\right| < +\infty\,.$$

Через $C^\infty(0,T;S)$ позначимо простір нескінченно диференційовних на множині $R\times[0;T]$ функцій $u(x,t)$, для яких при довільних цілих $m,k > 0$ виконується умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(D_x^m D_t^k u\right)^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+x^2\right)^m \left(D_t^k u\right)^2 dx < \infty\,.$$

Аналогічно [1, 7] позначимо через $G_1 = G_1(R\times[0;T]\times R)$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in R\times[0;T]\times R$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset R\times[0;T]$ виконуються такі дві умови:

1^0. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t)\in K\,;$$

2^0. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r}\Big(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\Big) = 0, \quad (x,t)\in K\,.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(R\times[0;T]\times R) \subset G_1$ – простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau) \in G_1$, $(x,t,\tau) \in R\times[0;T]\times R$, що рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K \subset R\times[0;T]$ виконується умова

$$\lim_{\tau\to-\infty} f(x,t,\tau) = 0\,.$$

Позначимо за допомогою $G_2^0 = G_2^0(R\times[0;T]\times R\times R)$ лінійний простір нескінченно диференційованих функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(x,t,\tau_1,\tau_2) \in (R\times[0;T]\times R\times R)$, для яких існують такі функції $f_1^\pm = f_1^\pm(x,t,\tau_2)$, $f_2^\pm = f_2^\pm(x,t,\tau_1) \in$ $\in G_1^0(R\times[0;T]\times R)$, що для довільних невід'ємних цілих чисел α, q, p_1, p_2, β_1, β_2 мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\Big(f(x,t,\tau_1,\tau_2) - f_1^\pm(x,t,\tau_2)\Big) = 0, \quad (x,t)\in K\,;$$

$$\lim_{\tau_2\to\pm\infty} \tau_2^{p_2} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\Big(f(x,t,\tau_1,\tau_2) - f_2^\pm(x,t,\tau_1)\Big) = 0, \quad (x,t)\in K\,.$$

Означення 1. *Функція $u = u(x,t,\varepsilon)$ називається двофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа $N \ge 0$ вона зображається у вигляді:*

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N\left(x,t,\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\varepsilon\right) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right),$$

де

$$Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^{j+1}\big(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\big),\ \tau_1=\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\ \tau_2=\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon};$$

функції $S_k=S_k(x,t)\in C^\infty(R\times[0;T])$, *причому* $\left.\dfrac{\partial S_k}{\partial x}\right|_{\Gamma_k}\neq 0$, $\Gamma_k=\{(x,t)\in R\times[0;T],\ S_k(x,t)=0\}$, $k=1,2$; $u_j(x,t)$, $j=\overline{1,\ N}$, – *нескінченно диференційовні функції;* $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$, $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2$.

У подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення: запис $\Psi(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^N)$ при $\varepsilon\to 0$ означає, що існують такі величина $\varepsilon_0>0$ і стала $C>0$, яка залежить від числа N і від компакта $K\subset R\times[0;T]$, що $|\Psi(x,t,\varepsilon)|\le C_{N,K}\ \varepsilon^{N+1}$ для всіх $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ і всіх $(x,t)\in K$.

Побудова асимптотичного розв'язку задачі Коші (2), (3)

За допомогою заміни $u(x,t,\varepsilon)=\dfrac{v(x,t,\varepsilon)}{b(x,t,\varepsilon)}$ рівняння (2) зведемо до диференціального рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 v_{xxx}=a(x,t,\varepsilon)v_t+vv_x-3\varepsilon^2 b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v_{xx}-3\varepsilon^2 b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v_x-\varepsilon^2 b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v+$$
$$+b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v^2+a(x,t,\varepsilon)b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v,$$

асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок якого можна шукати у вигляді

$$v(x,t,\varepsilon)=Y_N(x,t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}), \tag{4}$$

де

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\big(u_j(x,t)+V_j(t,\tau_1,\tau_2)\big),\quad \tau_k=\frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon},\ k=\overline{1,2}.$$

Щодо функцій $\varphi_k(t)$, $t\in[0;T]$, $k=\overline{1,2}$, припускається, що ці функції є нескінченно диференційовними і задовольняють умову $\varphi_k(0)=0$, $k=\overline{1,2}$.

Функції $U_N(x,t,\varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$, $V_N(t,\tau_1,\tau_2)=\sum\limits_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j(t,\tau_1,\tau_2)$ називаються регулярною та сингулярною частинами асимптотики (4) відповідно. Очевидно, що при цьому виконується рівність $Y_N(x,t,\varepsilon)=U_N(x,t,\varepsilon)+V_N(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$.

Регулярна частина $U_N(x,t,\varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$ асимптотики (4) визначається із системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+a_0(x,t)b_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)u_0+b_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)u_0^2=0, \tag{5}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_j}{\partial x}+u_j\frac{\partial u_0}{\partial x}+b_0(x,t)\left(a_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)u_0\right)u_j=F_j(x,t),\quad j=\overline{1,\ N}, \tag{6}$$

де функції $F_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, знаходяться рекурентним чином за функціями $u_0(x,t)$, $u_1(x,t)$, …, $u_{j-1}(x,t)$.

Розв'язок квазілінійного рівняння (5) і лінійних рівнянь (6) можна знайти методом характеристик [3].

Сингулярна частина $V_N(t,\tau_1,\tau_2)=\sum\limits_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j(t,\tau_1,\tau_2)$ асимптотики (4) визначається із системи диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2^1}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_2^3}+\left[\varphi_1'(t)a_0(x,t)-u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\left[\varphi_2'(t)a_0(x,t)-u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}-V_0\left[\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right]=0,$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2^1}+3\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_2^3}+\left[\varphi_1'(t)a_0(x,t)-u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\left[\varphi_2'(t)a_0(x,t)-u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}-$$
$$-\left[V_j\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+V_j\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}+V_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+V_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right]=F_j(x,t,\tau_1,\tau_2),$$

де функції $F_j(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $V_1(x,t,\tau_1,\tau_2)$, …, $V_{j-1}(x,t,\tau_1,\tau_2)$.

В околі кожної з кривих $x = \varphi_k(t)$, $k = \overline{1,2}$, головний член сингулярної частини асимптотики можна знайти як розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2^1} + 3\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_2^3} + \left[\varphi_1'(t) a_0(\varphi_k, t) - u_0(\varphi_k, t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \left[\varphi_2'(t) a_0(\varphi_k, t) - u_0(\varphi_k, t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} - V_0\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] = 0, \;\; k = \overline{1,2}.$$

Враховуючи, що функція $V_0(t, \tau_1, \tau_2) \in G_2^0$, в якості функції, що визначає головний член сингулярної частини асимптотики, можна розглянути розв'язок $\overline{V}_0(t, \tau_1, \tau_2)$ (допоміжного) рівняння вигляду

$$\frac{\partial^3 \overline{V}_0}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 \overline{V}_0}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2^1} + 3\frac{\partial^3 \overline{V}_0}{\partial \tau_1^1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 \overline{V}_0}{\partial \tau_2^3} = \left[-\varphi_1'(t) a_0(\varphi_1, t) + u_0(\varphi_1, t)\right]\frac{\partial \overline{V}_0}{\partial \tau_1} + \left[-\varphi_2'(t) a_0(\varphi_2, t) - u_0(\varphi_2, t)\right]\frac{\partial \overline{V}_0}{\partial \tau_2} + \overline{V}_0\left[\frac{\partial \overline{V}_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \overline{V}_0}{\partial \tau_2}\right] = 0. \quad (7)$$

При цьому двосолітонний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$\overline{V}_0(t, \tau_1, \tau_2) = \overline{V}_0(\xi, \eta) = -2\left[2\kappa_1 c_1^2 e^{-2\kappa_1 \xi} + 2\kappa_2 c_2^2 e^{-2\kappa_2 \xi} - 2c_1^2 c_2^2 \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{\kappa_1 \kappa_2} e^{-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi} - \right. \quad (8)$$

$$\left. - \frac{c_1^4 c_2^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_2}{2\kappa_1^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{(-4\kappa_1 - 2\kappa_2)\xi} - \frac{c_1^2 c_2^4 (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_1}{2\kappa_2^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{(-2\kappa_1 - 4\kappa_2)\xi}\right] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{c_1^2}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 \xi} + \frac{c_2^2}{2\kappa_2} e^{-2\kappa_2 \xi} + \frac{c_1^2 c_2^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4\kappa_1 \kappa_2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi}\right]^{-2},$$

де

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\gamma_2(t)\tau_1 - \gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}, \;\; \eta = \frac{1}{6\sqrt{6}} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}. \quad (9)$$

Тут позначено $\kappa_k(t) = \sqrt{6\gamma_k(t)}$, $\gamma_k(t) = -\varphi_k'(t) a_0(\varphi_k(t), t) + u_0(\varphi_k(t), t)$, $k = \overline{1,2}$, $c_k(\eta) = c_k(0)\exp\left(\kappa_k^3(t)\eta\right)$, де $c_k(0)$, $k = \overline{1,2}$, – довільні додатні сталі, $\gamma_k(t) > 0$, $t \in [0;T]$, $k = \overline{1,2}$.

Величини $\kappa_k(t)$, $k = \overline{1,2}$, належать множині власних значень оператора Штурма-Ліувілля, що асоційований з рівнянням Кортевега-де Фріза. При цьому припускається, що $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$, $t \in [0;T]$.

Для задачі про побудову головного члена асимптотики (4) задачі Коші (2), (3) формули (8), (9) дозволяють отримати достатні умови для функції в початковій умові (3) задачі Коші (2), (3). Дійсно, поклавши $t = 0$, $\tau_1 = \frac{x}{\varepsilon}$, $\tau_2 = \frac{x}{\varepsilon}$ в (8), отримаємо, що функція $u(x, 0, \varepsilon) = f(x, \varepsilon)$ має належати множині

$$M^0_{\varphi_1, \varphi_2}(\varepsilon) = \left\{ \frac{-2}{b_0(x,0)} \left[2\kappa_1^0 C_1 e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt{6}}\frac{x}{\varepsilon}} + 2\kappa_2^0 C_2 e^{-2\frac{\kappa_2^0}{\sqrt{6}}\frac{x}{\varepsilon}} - 2C_1 C_2 \frac{\left(\kappa_1^0 - \kappa_2^0\right)^2}{\kappa_1^0 \kappa_2^0} e^{-\frac{2\left(\kappa_1^0 + \kappa_2^0\right)}{\sqrt{6}}\frac{x}{\varepsilon}} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{C_1^2 C_2 \left(\kappa_1^0 - \kappa_2^0\right)^2 \kappa_2^0}{2\left(\kappa_1^0\right)^2 \left(\kappa_1^0 + \kappa_2^0\right)^2} e^{-\frac{4\kappa_1^0 + 2\kappa_2^0}{\sqrt{6}}\frac{x}{\varepsilon}} - \frac{C_1 C_2^2 \left(\kappa_1^0 - \kappa_2^0\right)^2 \kappa_1^0}{2\left(\kappa_2^0\right)^2 \left(\kappa_1^0 + \kappa_2^0\right)^2} e^{-\frac{2\kappa_1^0 + 4\kappa_2^0}{\sqrt{6}}\frac{x}{\varepsilon}} \right] \times$$

$$\left. \times \left[1 + \frac{C_1}{2\kappa_1^0} e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt{6}}\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{C_2}{2\kappa_2^0} e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt{6}}\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{C_1 C_2 (\kappa_1^0 - \kappa_2^0)^2}{4\kappa_1^0 \kappa_2^0 (\kappa_1^0 + \kappa_2^0)^2} e^{-2\frac{\left(\kappa_1^0 + \kappa_2^0\right)}{\sqrt{6}}\frac{x}{\varepsilon}}\right]^{-2}, C_1, C_2 > 0, C_1 \neq C_2 \right\},$$

де $\kappa_k^0 = \kappa_k(0)$, $k = \overline{1,2}$.

Множина $M^0_{\varphi_1, \varphi_2}(\varepsilon)$ називається многовидом початкових умов [2] для задачі про побудову головного члена асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (2), (3).

Викладені вище міркування та метод побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (2), (3) дозволяють довести наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1. *функції* $a_0(x,t)$, $b_0(x,t) \in C^\infty(R \times [0;T])$ *і такі, що* $a_0(x,t) \neq 0$, $b_0(x,t) \neq 0$ *для всіх* $(x,t) \in R \times [0;T]$;
2. *існують такі функції* $x = \varphi_k(t) \in C^\infty([0;T])$, $k = \overline{1,2}$, *що* $\varphi_k(0) = 0$, $k = \overline{1,2}$, *і для них виконуються умови*

$$\gamma_k(t) = -a_0(\varphi_k(t), t)\varphi_k'(t) + u_0(\varphi_k(t), t) > 0, \; t \in [0;T];$$

3. *задача Коші для квазілінійного рівняння (8) з початковою умовою* $u_0(x,0) = g_0(x)$, $x \in R$, *де функція* $g_0(x) \in C^\infty(R \times [0;T])$, *має в просторі* $C^\infty(R \times [0;T])$ *розв'язок;*

4. в умові (4) початкова функція має вигляд $f(x,\varepsilon)=g_0(x)+f_0(x,\varepsilon)$*, де* $f_0(x,\varepsilon)\in M^0_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$.

Тоді функція

$$Y_0(x,t,\varepsilon)=\frac{u_0(x,t)}{b_0(x,t)}+\frac{1}{b_0(x,t)}\overline{V}_0\left(t,\frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon},\frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon}\right)$$

є головним членом асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (2), (3) і задовольняє (при $\varepsilon\to 0$*) задачу Коші (2), (3) з точністю* $O(1)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1. справджуються умови 1, 2, 4 теореми 1;

2. функція $a(x,t,\varepsilon)$ *має вигляд* $a(x,t,\varepsilon)=a(x,\varepsilon)$, $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$*, і задовольняє умову* $c_1\le a(x,\varepsilon)\le c_2$, $x\in R$*, де сталі* c_1 *та* c_2 *такі, що* $c_1c_2>0$ *0;*

3. існує розв'язок $u=u(x,t,\varepsilon)$ *задачі Коші (2), (3), що належить простору* $C^\infty(0,T;S)$*, і який для деякої сталої* C*, що не залежить від* ε*, задовольняє нерівність* $|||\,u(x,t,\varepsilon)-Y_0(x,t,\varepsilon)\,|||\big|_{t=0}\le C\varepsilon$*, де норму* $|||\cdot|||$ *визначено згідно формули [4]:*

$$|||\,f\,|||=\sqrt{\|\,f\,\|^2+\varepsilon^4\,\|\,f_{xx}\,\|^2}\,,\quad \|\,f\,\|=\left(\int_R f^2(x,t,\varepsilon)\,dx\right)^{\frac{1}{2}};$$

4. розв'язок задачі Коші для рівняння (5) з початковою умовою $u_0(x,0)=g_0(x)$, $x\in R$*, де функція* $g_0(x)\in S(R)$*, належить простору* $C^\infty(0,T;S)$.

Тоді для точного та наближеного розв'язків задачі Коші (2), (3) має місце оцінка вигляду

$$|||\,u(x,t,\varepsilon)-Y_0(x,t,\varepsilon)\,|||\le C_0\varepsilon^{3/2},\quad t\in[0;\varepsilon^2T],$$

де C_0 *– деяка стала, що не залежить від* ε*,* T *– деяке додатне число.*

Приклад. Розглянемо рівняння (2) для випадку $a(x,t,\varepsilon)=1$, $b(x,t,\varepsilon)=ch^{-1}x$ з початковою умовою вигляду

$$f(x,\varepsilon)=ch^{-1}x-2ch\,x\left[2\kappa_1^0C_1e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}+2\kappa_2^0C_2e^{-2\frac{\kappa_2^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}-2C_1C_2\frac{\left(\kappa_1^0-\kappa_2^0\right)^2}{\kappa_1^0\kappa_2^0}e^{-\frac{2\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}-\right.$$

$$\left.-\frac{C_1^2C_2\left(\kappa_1^0-\kappa_2^0\right)^2\kappa_2^0}{2\left(\kappa_1^0\right)^2\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)^2}e^{-\frac{4\kappa_1^0+2\kappa_2^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}-\frac{C_1C_2^2\left(\kappa_1^0-\kappa_2^0\right)^2\kappa_1^0}{2\left(\kappa_2^0\right)^2\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)^2}e^{-\frac{2\kappa_1^0+4\kappa_2^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{C_1}{2\kappa_1^0}e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{C_2}{2\kappa_2^0}e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{C_1C_2(\kappa_1^0-\kappa_2^0)^2}{4\kappa_1^0\kappa_2^0(\kappa_1^0+\kappa_2^0)^2}e^{-2\frac{\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}\right]^{-2},$$

де C_1, C_2 – деякі фіксовані додатні сталі, $\kappa_k^0=\kappa_k(0)$, $k=\overline{1,2}$, $\kappa_k^2(t)=\sqrt6\left(k+ch^{-1}(kt)\right)$, $\gamma_k(t)=k+ch^{-1}(kt)$, $k=\overline{1,2}$. Тоді головний член асимптотичного розв'язку задачі (2), (3) у цьому випадку має вигляд

$$Y_0(x,t,\varepsilon)=1-2ch^{-1}x\left[2\kappa_1C_1\exp\left(-2\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)+2\kappa_2C_2\exp\left(-2\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)-\right.$$

$$-2C_1C_2\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{\kappa_1\kappa_2}\exp\left(-2\left(\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}+\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)\right)-$$

$$-2C_1^2C_2\frac{\kappa_2(\kappa_1-\kappa_2)^2}{2\kappa_1^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}\exp\left(-\left(4\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}+2\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)\right)-$$

$$\left.-2C_1C_2^2\frac{\kappa_1(\kappa_1-\kappa_2)^2}{2\kappa_2^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}\exp\left(-\left(2\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}+4\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)\right)\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{C_1}{2\kappa_1}\exp\left(-2\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)+\frac{C_2}{2\kappa_2}\exp\left(-2\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)+\right.$$

$$\left.+2C_1C_2\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{4\kappa_1\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)^2}\exp\left(-2\left(\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}+\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)\right)\right]^{-2},$$

де $\kappa_k^2(t)=\sqrt6\left(k+ch^{-1}(kt)\right)$, $\gamma_k(t)=k+ch^{-1}(kt)$, $k=\overline{1,2}$.

Висновки

Описано множину початкових умов, для яких задача Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами має асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок. Запропоновано поняття многовиду початкових значень для задачі Коші, при яких такий розв'язок існує. Доведено теорему про оцінку між точним і побудованим асимптотичним розв'язком згаданої вище задачі.

Список використаних джерел

1. Маслов В.П., Омельянов Г.А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), N. 2. – С. 63 – 124.
2. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Двофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 11. – С. 1515 – 1530.
3. Самойленко Ю.І. Існування в просторі швидко спадних функцій та властивості розв'язку рівняння з частинними похідними першого порядку з квадратичною нелінійністю // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 316 – 325.
4. Фаминский А.В. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1988. – Т. 13. – Р. 56 – 105.
5. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
6. Korteweg D.J., de Vries G. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
7. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: American Math. Society, 2001. – 243 p.
8. Scott-Russel J. Report on waves. In: Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London. John Murray. – 1834. – P. 311 – 390.

Надійшла до редколегії 14.15.14

Ю. Самойленко, канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ДВУХФАЗОВОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СОЛИТОНООБРАЗНОЕ РЕШЕНИЕ У РАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Рассматривается вопрос о построении главного члена двухфазового асимптотического солитонообразного решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами в общем случае. Описано множество начальных значений, при которых возможно построение такого асимптотического решения.

Yu. Samoylenko, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

TWO PHASE ASYMPTOTIC SOLITON-TYPE SOLUTION TO KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN GENERAL CASE

The paper deals with a problem of constructing main term of two phase soliton-type solution to Cauchy problem for singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients in general case. The set of initial values for the problem is described.

УДК 517.956

П. Самусенко, канд. фіз.-мат. наук, доц., М. Шкіль, д-р фіз.-мат. наук, проф.
НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

За допомогою методу збуреного характеристичного рівняння знайдено асимптотичні розв'язки лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратних коренів характеристичного рівняння. Отримані результати узагальнено для аналогічних систем з періодичними коефіцієнтами.

Вступ. Лінійні сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x,\, t\in[0;T], \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця n-го порядку з дійсними або комплекснозначними нескінченно диференційовними елементами, які на відрізку $[0;T]$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення $A(t,\varepsilon)=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t)$, ε – малий параметр, почали інтенсивно досліджуватись із середини XX століття. Згідно [21, 16, 6] асимптотичні розв'язки системи (1) у випадку простих коренів характеристичного рівняння

$$det(A_0(t)-\lambda E)=0, \tag{2}$$

де E – одинична матриця, можна знайти у вигляді формальних рядів за степенями параметра ε.

Випадок кратних коренів рівняння (2) довгий час залишався недослідженим. Важливим кроком у питанні побудови розв'язків системи (1) стали теореми про асимптотичне розщеплення, доведені у працях Хукухари [17], Й. Сибуйї [22], М. Івано [18 – 20], С.Ф. Фещенка [7, 8]. Таким чином, випадок, коли характеристичне рівняння має кілька коренів був зведений до більш простого випадку, коли це рівняння має лише один корінь. Сама ж проблема кратного кореня була розв'язана в працях М.І. Шкіля [11 – 13]. Він показав, що розв'язки системи (1) зображуються асимптотичними розвиненнями за дробовими степенями ε, показники яких залежать як від кратності коренів характеристичного рівняння та елементарних дільників, що їм відповідають, так і від поведінки збурюючих коефіцієнтів системи.