Висновки

Описано множину початкових умов, для яких задача Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами має асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок. Запропоновано поняття многовиду початкових значень для задачі Коші, при яких такий розв'язок існує. Доведено теорему про оцінку між точним і побудованим асимптотичним розв'язком згаданої вище задачі.

Список використаних джерел

1. Маслов В.П., Омельянов Г.А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), N. 2. – С. 63 – 124.
2. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Двофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 11. – С. 1515 – 1530.
3. Самойленко Ю.І. Існування в просторі швидко спадних функцій та властивості розв'язку рівняння з частинними похідними першого порядку з квадратичною нелінійністю // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 316 – 325.
4. Фаминский А.В. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1988. – Т. 13. – Р. 56 – 105.
5. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
6. Korteweg D.J., de Vries G. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
7. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: American Math. Society, 2001. – 243 p.
8. Scott-Russel J. Report on waves. In: Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London. John Murray. – 1834. – P. 311 – 390.

Надійшла до редколегії 14.15.14

Ю. Самойленко, канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ДВУХФАЗОВОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СОЛИТОНООБРАЗНОЕ РЕШЕНИЕ У РАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Рассматривается вопрос о построении главного члена двухфазового асимптотического солитонообразного решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами в общем случае. Описано множество начальных значений, при которых возможно построение такого асимптотического решения.

Yu. Samoylenko, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

TWO PHASE ASYMPTOTIC SOLITON-TYPE SOLUTION TO KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN GENERAL CASE

The paper deals with a problem of constructing main term of two phase soliton-type solution to Cauchy problem for singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients in general case. The set of initial values for the problem is described.

УДК 517.956

П. Самусенко, канд. фіз.-мат. наук, доц., М. Шкіль, д-р фіз.-мат. наук, проф.
НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

За допомогою методу збуреного характеристичного рівняння знайдено асимптотичні розв'язки лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратних коренів характеристичного рівняння. Отримані результати узагальнено для аналогічних систем з періодичними коефіцієнтами.

Вступ. Лінійні сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x,\ t\in[0;T], \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця n-го порядку з дійсними або комплекснозначними нескінченно диференційовними елементами, які на відрізку $[0;T]$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення $A(t,\varepsilon)=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t)$, ε – малий параметр, почали інтенсивно досліджуватись із середини XX століття. Згідно [21, 16, 6] асимптотичні розв'язки системи (1) у випадку простих коренів характеристичного рівняння

$$det(A_0(t)-\lambda E)=0, \tag{2}$$

де E – одинична матриця, можна знайти у вигляді формальних рядів за степенями параметра ε.

Випадок кратних коренів рівняння (2) довгий час залишався недослідженим. Важливим кроком у питанні побудови розв'язків системи (1) стали теореми про асимптотичне розщеплення, доведені у працях Хукухари [17], Й. Сибуйї [22], М. Івано [18 – 20], С.Ф. Фещенка [7, 8]. Таким чином, випадок, коли характеристичне рівняння має кілька коренів був зведений до більш простого випадку, коли це рівняння має лише один корінь. Сама ж проблема кратного кореня була розв'язана в працях М.І. Шкіля [11 – 13]. Він показав, що розв'язки системи (1) зображуються асимптотичними розвиненнями за дробовими степенями ε, показники яких залежать як від кратності коренів характеристичного рівняння та елементарних дільників, що їм відповідають, так і від поведінки збурюючих коефіцієнтів системи.

Об'єкт і методи досліджень. У даній роботі для побудови асимптотичних розв'язків системи (1) використовується метод збуреного характеристичного рівняння, запропонований М.І. Шкілем, за допомогою якого випадок кратних коренів характеристичного рівняння зводиться до випадку простих коренів [14, 15].

Метод збуреного характеристичного рівняння. Розглянемо систему (1). Згідно методу збуреного характеристичного рівняння вважаємо, що матриця $B_0(t,\varepsilon)=A_0(t)+\varepsilon A_1(t)$ має прості власні значення $w_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, для всіх $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0<<1$. Тоді існує така неособлива матриця $T(t,\varepsilon)$, $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, що

$$T^{-1}(t,\varepsilon)B_0(t,\varepsilon)T(t,\varepsilon)=W(t,\varepsilon)\equiv diag\{w_1(t,\varepsilon),w_2(t,\varepsilon),...,w_n(t,\varepsilon)\}.$$

Формальні розв'язки системи (1) шукаємо у вигляді

$$x_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{t}\lambda_i(t,\varepsilon)dt\right),\ i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

де $u_i(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ – скалярна функція, що мають такі формальні розвинення за степенями ε:

$$u_i(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}\varepsilon^s\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon),\ \lambda_i(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}\varepsilon^s\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

сталі a_i визначимо нижче.

Підставимо (3) до системи (1):

$$B_0(t,\varepsilon)u_i(t,\varepsilon)+\sum_{s\ge2}\varepsilon^sA_s(t)u_i(t,\varepsilon)-u_i(t,\varepsilon)\lambda_i(t,\varepsilon)=\varepsilon u_i'(t,\varepsilon).$$

Зрівнюючи коефіцієнти при "однакових" степенях параметра ε, дістаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$(B_0(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)E)\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon)=0, \tag{5}$$

$$(B_0(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)E)\tilde{u}_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon)\tilde{\lambda}_i^{(1)}(t,\varepsilon)+(\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon))', \tag{6}$$

$$(B_0(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)E)\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s-1}\tilde{u}_i^{(k)}(t,\varepsilon)\tilde{\lambda}_i^{(s-k)}(t,\varepsilon)+(\tilde{u}_i^{(s-1)}(t,\varepsilon))'-\sum_{k=2}^{s}A_k(t)\tilde{u}_i^{(s-k)}(t,\varepsilon),\ s=2,3,..., \tag{7}$$

з якої і знаходимо $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, $s=0,1,...$

Справді, система (5) перетворюється в тотожність, якщо, наприклад,

$$\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon)=\varphi_i(t,\varepsilon),\ \tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)=w_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n},$$

де $\varphi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, – стовпці матриці $T(t,\varepsilon)$.

Нехай $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)=T(t,\varepsilon)q_i^{(s)}(t,\varepsilon),\ s=0,1,...$. За побудовою $q_i^{(0)}(t,\varepsilon)=e_i$, e_i – одиничний вектор, i-та компонента якого дорівнює 1, решта компонент – нулі.

Тоді система (6) набуде вигляду

$$(W(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon))q_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\tilde{\lambda}_i^{(1)}(t,\varepsilon)e_i+c_i^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{8}$$

де $c_i^{(1)}(t,\varepsilon)=T^{-1}(t,\varepsilon)T'(t,\varepsilon)e_i$.

Отже,

$$\tilde{\lambda}_i^{(1)}(t,\varepsilon)=-\{c_i^{(1)}(t,\varepsilon)\}_i,\ \ \{q_i^{(1)}(t,\varepsilon)\}_i=0,\ \ \{q_i^{(1)}(t,\varepsilon)\}_j=\frac{\{c_i^{(1)}(t,\varepsilon)\}_j}{w_j(t,\varepsilon)-w_i(t,\varepsilon)},\ i\ne j,\ i,j=\overline{1,n},$$

де $\{\}_i$ – i-та компонента відповідного вектора.

Аналогічно, записуючи систему (7) у вигляді

$$(W(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon))q_i^{(s)}(t,\varepsilon)=\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)e_i+c_i^{(s)}(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n},\ s=2,3,...,$$

де

$$c_i^{(s)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{s-1}q_i^{(k)}(t,\varepsilon)\tilde{\lambda}_i^{(s-k)}(t,\varepsilon)+T^{-1}(t,\varepsilon)T'(t,\varepsilon)q_i^{(s-1)}(t,\varepsilon)+(q_i^{(s-1)}(t,\varepsilon))'-\sum_{k=2}^{s}T^{-1}(t,\varepsilon)A_k(t)T(t,\varepsilon)q_i^{(s-k)}(t,\varepsilon),$$

доводимо її сумісність.

1. Випадок кратних елементарних дільників. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що матриця $A_0(t)$ має одне власне значення $a_0(t)$, якому відповідають два елементарні дільники кратності p, q, причому $q>p\ge2$, $p+q=n$.

Покладаючи в системі (1)

$$x(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a_0(t)dt\right)P(t)y(t,\varepsilon),$$

де $P(t)$ така неособлива матриця, що

$$P^{-1}(t)A_0(t)P(t)=\Omega(t)\equiv diag\{a_0(t)E_p+J_p,a_0(t)E_q+J_q\},$$

E_p, J_p, E_q, J_q – квадратні матриці порядку p та q відповідно, причому E_p, E_q – одиничні матриці, а J_p, J_q – матриці, елементи першої верхньої наддіагоналі яких дорівнюють 1, решта їх елементів дорівнюють 0, дістаємо

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = D(t,\varepsilon)y, \tag{9}$$

$$D(t,\varepsilon) = \sum_{s\ge 0}\varepsilon^s D_s(t),\ \ D_0(t) \equiv J = diag\{J_p, J_q\},\ D_1(t) = P^{-1}(t)(A_1(t)P(t) - P'(t)),\ D_s(t) = P^{-1}(t)A_s(t)P(t),\ s = 2,3,...\ .$$

Надалі вважаємо, що система (1) має вигляд (9).

Знайдемо умови, при виконанні яких матриця $B_0(t,\varepsilon)$ має прості власні значення. Для цього, використовуючи метод діаграм Ньютона, проаналізуємо збурене характеристичне рівняння

$$det(B_0(t,\varepsilon) - wE) = 0. \tag{10}$$

Запишемо рівняння (10) наступним чином:

$$w^n + \beta_1(t,\varepsilon)w^{n-1} + \beta_2(t,\varepsilon)w^{n-2} + ... + \beta_{n-1}(t,\varepsilon)w + \beta_n(t,\varepsilon) = 0.$$

За побудовою $\beta_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, – многочлени змінної ε. Нехай

$$a_{p1}^{(1)}(t)a_{p+q,p+1}^{(1)}(t) \neq 0,\ t \in [0;T], \tag{11}$$

де $a_{ij}^{(1)}(t)$ – відповідний елемент матриці $A_1(t)$.

Тоді

$$\beta_i(t,\varepsilon) = O(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0,\ i = \overline{1,q-1},\ \ \beta_q(t,\varepsilon) = -\varepsilon a_{p+q,p+1}^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,$$

$$\beta_i(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,\ i = \overline{q+1,n-1},\ \ \beta_n(t,\varepsilon) = \varepsilon^2 a_{p1}^{(1)}(t)a_{p+q,p+1}^{(1)}(t) + O(\varepsilon^3),\ \varepsilon \to 0.$$

Розглянемо прямокутну систему координат Oks, на осі абсцис якої відкладаємо показники степеня w, а на осі ординат – показники степеня ε, компонент кожного члену з найменшим показником ε рівняння (10).

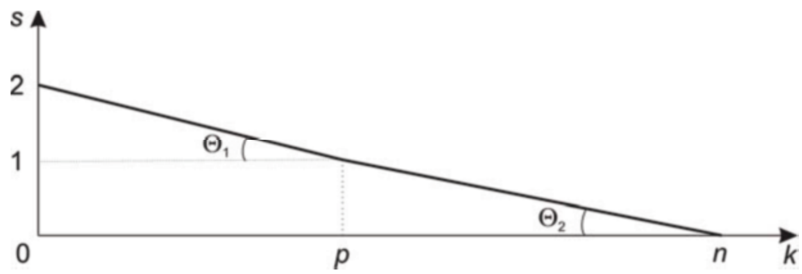

Рис. 1

Оскільки $\theta_1 = \dfrac{1}{p}, \theta_2 = \dfrac{1}{q},$ то рівняння (10) має дві групи розв'язків, показники степеня головних членів асимптотики за параметром ε яких відповідно дорівнюють $\dfrac{1}{p}$ та $\dfrac{1}{q}$. Записуючи визначальні рівняння [4] для кожної з ланок побудованої діаграми Ньютона

$$w_0^p - a_{p1}^{(1)}(t) = 0$$

та

$$w_0^q - a_{p+q,p+1}^{(1)}(t) = 0,$$

знаходимо коефіцієнти головних членів асимптотик:

$$w_0(t) = \sqrt[p]{a_{p1}^{(1)}(t)}$$

та

$$w_0(t) = \sqrt[q]{a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)}.$$

Таким чином, розв'язки рівняння (10) мають вигляд

$$w_i(t,\varepsilon) = \sqrt[p]{a_{p1}^{(1)}(t)}\varepsilon^{\frac{1}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{2}{p}}),\ i = \overline{1,p},\ \ w_i(t,\varepsilon) = \sqrt[q]{a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)}\varepsilon^{\frac{1}{q}} + O(\varepsilon^{\frac{2}{q}}),\ i = \overline{p+1,n}.$$

Оскільки

$$(B_0(t,\varepsilon) - w_i(t,\varepsilon)E)\varphi_i(t,\varepsilon) = 0,\ i = \overline{1,n},$$

то компонентами $\varphi_i(t,\varepsilon)$ можуть бути алгебраїчні доповнення елементів i-го рядка матриці $B_0(t,\varepsilon)-w_i(t,\varepsilon)E$. Кожен з векторів $\varphi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, визначається з точністю до скалярного множника. А тому вважаємо, що $T(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} T_1(t,\varepsilon) & T_2(t,\varepsilon) \\ T_3(t,\varepsilon) & T_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, де $T_1(t,\varepsilon)$ та $T_4(t,\varepsilon)$ – квадратні матриці p-го та q-го порядку відповідно, причому

$$T_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(1) & ... & O(1) \\ O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) & O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) & O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) \end{pmatrix}, T_2(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(\varepsilon^{\frac{q-p}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{q-p}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{q-p}{q}}) \\ O(\varepsilon^{\frac{q-p+1}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{q-p+1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{q-p+1}{q}}) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) \end{pmatrix},$$

$$T_3(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(1) & \dots & O(1) \\ O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) & O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) & \dots & O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) & O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) & \dots & O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \dots & O(\varepsilon) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \dots & O(\varepsilon) \end{pmatrix}, T_4(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(1) & ... & O(1) \\ O(\varepsilon^{\frac{1}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{1}{q}}) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) \end{pmatrix},$$

$t\in[0;T]$, $\varepsilon\to 0$.

Згідно структури матриці $B_0(t,\varepsilon)-w_i(t,\varepsilon)E$

$$detT_1(t,\varepsilon)\neq 0,\ detT_4(t,\varepsilon)\neq 0,\ t\in[0;T],\ \varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$$

і

$$detT_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{p-1}{2}}),\ detT_4(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{q-1}{2}}),\ t\in[0;T],\ \varepsilon\to 0.$$

Оскільки

$$\min_{0\le j\le p-1}\left(\frac{q-p}{q}+j\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}>0,$$

і

$$detT(t,\varepsilon)=detT_1(t,\varepsilon)det(T_4(t,\varepsilon)-T_3(t,\varepsilon)T_1^{-1}(t,\varepsilon)T_2(t,\varepsilon))$$

то

$$detT(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{p+q-2}{2}}),\ t\in[0;T],\ \varepsilon\to 0,$$

[1].

Таким чином $T^{-1}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} V_1(t,\varepsilon) & V_2(t,\varepsilon) \\ V_3(t,\varepsilon) & V_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, де $V_1(t,\varepsilon)$ та $V_4(t,\varepsilon)$ – квадратні матриці p-го та q-го порядку відповідно, причому

$$V_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \\ . & . & . & . \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \end{pmatrix}, V_2(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})\begin{pmatrix} O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \\ . & . & . & . \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \end{pmatrix},$$

$$V_3(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \\ . & . & . & . \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \end{pmatrix}, V_4(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \\ . & . & . & . \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \end{pmatrix},$$

$t\in[0;T]$, $\varepsilon\to 0$.

Оцінимо $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$ та $\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, $s=0,1,...$. За побудовою

$$\|\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon)\|=O(1),\ |\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)|=O(\varepsilon^{\frac{1}{q}}),\ t\in[0;T],\ \varepsilon\to 0.$$

Оскільки $\|c_i^{(1)}(t,\varepsilon)\|=O(1)$, $t\in[0;T]$, $\varepsilon\to 0$, то

$$\|\tilde{u}_i^{(1)}(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}), |\tilde{\lambda}_i^{(1)}(t,\varepsilon)|=O(1), t\in[0;T], \varepsilon\to 0.$$

Аналогічно оцінюємо $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, $s=2,3...$ При цьому

$$\|\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{-\left[\frac{s}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{s+1}{2}\right]\frac{1}{p}}), |\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)|=O(\varepsilon^{-\left[\frac{s}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{s-1}{2}\right]\frac{1}{p}}), t\in[0;T], \varepsilon\to 0,$$

де $[a]$ – ціла частина числа a.

Тоді

$$\|\varepsilon^s\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{s-\left[\frac{s}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{s+1}{2}\right]\frac{1}{p}}), |\varepsilon^s\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)|=O(\varepsilon^{s-\left[\frac{s}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{s+1}{2}\right]\frac{1}{p}}), t\in[0;T], \varepsilon\to 0,\ s\in N.$$

Покажемо, що побудовані формальні розв'язки (3) системи (1) мають асимптотичний характер. Для цього позначимо через

$$x_i^{(m)}(t,\varepsilon)=u_i^{(m)}(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{t}\lambda_i^{(m)}(t,\varepsilon)dt\right), i=\overline{1,n}, \tag{12}$$

m-наближення, які утворюються з (3) шляхом обривання розвинень (4) на m-му члені:

$$u_i^{(m)}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon), \lambda_i^{(m)}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}.$$

За побудовою $\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)\neq 0$, $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$.

Нехай

$$a_i=\begin{cases}0, \operatorname{Re}\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)\le 0,\\ T, \operatorname{Re}\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)>0, t\in[0;T], \varepsilon\in(0;\varepsilon_0].\end{cases}$$

Тоді вектор-функція (12) задовольняє систему (1) з точністю $O(\varepsilon^{\alpha(m)})$, де

$$\alpha(m)=m+1-\left[\frac{m}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{m+1}{2}\right]\frac{1}{p}.$$

У системі (1) покладемо $x_i(t,\varepsilon)=y_i(t,\varepsilon)+x_i^{(m)}(t,\varepsilon),$ де $y_i(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Маємо

$$\varepsilon\frac{dy_i}{dt}=A(t,\varepsilon)y_i+O(\varepsilon^{\alpha(m)}). \tag{13}$$

Нехай $y_i(t,\varepsilon)=T(t,\varepsilon)z_i(t,\varepsilon)$. Тоді система (13) набуде вигляду

$$\varepsilon\frac{dz_i}{dt}=(W(t,\varepsilon)+\varepsilon F(t,\varepsilon))z_i+O(\varepsilon^{\alpha(m)-1+\frac{1}{q}}), \tag{14}$$

де $F(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge 2}\varepsilon^{s-1}T^{-1}(t,\varepsilon)A_s(t)T(t,\varepsilon)-T^{-1}(t,\varepsilon)T'(t,\varepsilon)$. При цьому $\|F(t,\varepsilon)\|=O(1)$, $t\in[0;T]$, $\varepsilon\to 0$.

Доведемо існування розв'язку системи (14), що задовольняє умову

$$z_i(a_i,\varepsilon)=0. \tag{15}$$

Не обмежуючи загальності вважаємо, що $W(t,\varepsilon)=diag\{W_1(t,\varepsilon),W_2(t,\varepsilon)\}$, де $W_1(t,\varepsilon)$ та $W_2(t,\varepsilon)$ – матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $W(t,\varepsilon)$ відповідно з недодатними та додатними дійсними частинами. Для визначеності припустимо, що $\operatorname{Re}w_i(t,\varepsilon)\le 0$, $t\in[0;T]$, $i=\overline{1,k}$, і $\operatorname{Re}w_i(t,\varepsilon)>0$, $t\in[0;T]$, $i=\overline{k+1,n}$.

Тоді із системи (14) отримаємо

$$\varepsilon\frac{dz_{i1}}{dt}=W_1(t,\varepsilon)z_{i1}+\varepsilon(F_1(t,\varepsilon)z_{i1}+F_2(t,\varepsilon)z_{i2})+O(\varepsilon^{\alpha(m)-1+\frac{1}{q}}),$$

$$\varepsilon\frac{dz_{i2}}{dt}=W_2(t,\varepsilon)z_{i2}+\varepsilon(F_3(t,\varepsilon)z_{i1}+F_4(t,\varepsilon)z_{i2})+O(\varepsilon^{\alpha(m)-1+\frac{1}{q}}),$$

де $F(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}F_1(t,\varepsilon) & F_2(t,\varepsilon)\\ F_3(t,\varepsilon) & F_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, $F_1(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця k-го порядку; z_{i1} – вектор, що містить k перших компонент вектора z_i, z_{i2} – вектор, що містить решту компонент z_i.

Запишемо еквіваленті системи інтегральних рівнянь:

$$z_{i1}(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t Z_1(t,\tau,\varepsilon)\left(F_1(\tau,\varepsilon)z_{i1}+F_2(\tau,\varepsilon)z_{i2}+O(\varepsilon^{\alpha(m)-2+\frac{1}{q}})\right)d\tau, \tag{16}$$

$$z_{i2}(t,\varepsilon)=-\int\limits_t^T Z_2(t,\tau,\varepsilon)\left(F_3(\tau,\varepsilon)z_{i1}+F_4(\tau,\varepsilon)z_{i2}+O(\varepsilon^{\alpha(m)-2+\frac{1}{q}})\right)d\tau, \tag{17}$$

де $Z_j(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t W_j(t,\varepsilon)dt\right)$, $j=1,2$, – фундаментальні матриці однорідних систем

$$\varepsilon\frac{dz_{i1}}{dt}=W_1(t,\varepsilon)z_{i1},\ Z_1(\tau,\tau,\varepsilon)=E_k, \text{ та } \varepsilon\frac{dz_{i2}}{dt}=W_2(t,\varepsilon)z_{i1},\ Z_2(\tau,\tau,\varepsilon)=E_{n-k}.$$

Використовуючи метод послідовних наближень, доводимо існування та єдиність розв'язку $z=z_i(t,\varepsilon)$ системи (16), (17) [5]. При цьому має місце оцінка

$$\| z_i(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{\alpha(m)-2+\frac{1}{q}}),\ t\in[0;T],\ \varepsilon\to 0.$$

Таким чином справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай $A_s(t)\in C^{m+1}[0;T]$, $s\ge 0$, матриця $A_0(t)$ має одне власне значення, якому відповідають два елементарні дільники кратності p, q, причому $q>p\ge 2$, $p+q=n$ і виконується умова (11). Тоді існує таке ε_1, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що система (1) на відрізку $[0;T]$ має n розв'язків $x_i=x_i(t,\varepsilon)$, для яких

$$\| x_i(t,\varepsilon)-x_i^{(m)}(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{\alpha(m)-2+\frac{1}{q}}),\ \varepsilon\to 0.$$

Зауваження 1. Якщо $a_{p1}^{(1)}(t)a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)\equiv 0,\ t\in[0;T]$, то враховуючи, що $\beta_n(t,\varepsilon)=\varepsilon^2 a_{p1}^{(1)}(t)a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)+O(\varepsilon^3)$ для визначення степенів параметра ε, за якими будуються розвинення функцій $w_i(t,\varepsilon)$, слід накласти умову про відмінність від нуля на відрізку $[0;T]$ коефіцієнта при ε^3 виразу $\beta_n(t,\varepsilon)$.

Зауваження 2. Зазначимо, що коли матриця $A_0(t)$ має декілька попарно різних власних значень, то використовуючи теореми про асимптотичне розщеплення, замість системи (1) можна досліджувати системи, характеристичні рівняння яких мають лише один корінь відповідної кратності [9, 22].

2. Системи з періодичними коефіцієнтами. У даному пункті вважатимемо, що компоненти матриці $A(t,\varepsilon)$ – періодичні функції за змінною t з періодом T.

Нехай, як і в п. 1, матриця $A_0(t)$ має одне нульове власне значення, якому відповідають два елементарні дільники кратності p, q, причому $q>p\ge 2$, $p+q=n$.

Періодичний розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=R_m(t,\varepsilon)y, \tag{18}$$

де $R_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^m \varepsilon^s\tilde R^{(s)}(t,\varepsilon)$, а $y(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція.

Підставляючи (18) до системи (1), маємо

$$\varepsilon R_m(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt}=(A(t,\varepsilon)R_m(t,\varepsilon)-\varepsilon R_m'(t,\varepsilon))y. \tag{19}$$

Матрицю $R_m(t,\varepsilon)$ знаходимо з тотожності

$$A(t,\varepsilon)R_m(t,\varepsilon)-\varepsilon R_m'(t,\varepsilon)=R_m(t,\varepsilon)(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}S_m(t,\varepsilon)), \tag{20}$$

де $\Lambda_m(t,\varepsilon)$ – діагональна матриця вигляду $\Lambda_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^m\varepsilon^s\Lambda^{(s)}(t,\varepsilon)$, а $S_m(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця n-го порядку, яка також підлягає визначенню.

Зрівнюючи коефіцієнти при "однакових" степенях параметра ε, дістаємо

$$B_0(t,\varepsilon)\tilde R^{(0)}(t,\varepsilon)-\tilde R^{(0)}(t,\varepsilon)\tilde\Lambda^{(0)}(t,\varepsilon)=0, \tag{21}$$

$$B_0(t,\varepsilon)\tilde R^{(1)}(t,\varepsilon)-\tilde R^{(1)}(t,\varepsilon)\tilde\Lambda^{(0)}(t,\varepsilon)=\tilde R^{(0)}(t,\varepsilon)\tilde\Lambda^{(1)}(t,\varepsilon)+(\tilde R^{(0)}(t,\varepsilon))', \tag{22}$$

$$B_0(t,\varepsilon)\tilde R^{(s)}(t,\varepsilon)-\tilde R^{(s)}(t,\varepsilon)\tilde\Lambda^{(0)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s-1}\tilde R^{(k)}(t,\varepsilon)\tilde\Lambda^{(s-k)}(t,\varepsilon)+(\tilde R^{(s-1)}(t,\varepsilon))'-\sum_{k=2}^{s}A_k(t)\tilde R^{(s-k)}(t,\varepsilon),\ s=\overline{2,m}, \tag{23}$$

$$R_m(t,\varepsilon)S_m(t,\varepsilon)=G(t,\varepsilon), \tag{24}$$

де

$$G(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge 0}\varepsilon^s\sum_{k=2}^{s+2}A_k(t)\tilde R^{(m+1+s-k)}(t,\varepsilon)-(\tilde R^{(m)}(t,\varepsilon))'-\sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^s\sum_{k=s+1}^{m}\tilde R^{(k)}(t,\varepsilon)\tilde\Lambda^{(m+1+s-k)}(t,\varepsilon),\ \ \tilde R^{(s)}(t,\varepsilon)\equiv 0,\ t\in[0;T],\ s>m.$$

Зрівнюючи у рівностях (21) – (23) відповідні стовпці, маємо систему аналогічну (5) – (7). А тому й оцінки компонент $\tilde{R}^{(s)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{\Lambda}^{(s)}(t,\varepsilon)$, $s=\overline{0,m}$, будуть такими ж, як і оцінки $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$ в п. 1.

Якщо стовпці матриці $\tilde{R}^{(s)}(t,\varepsilon)$ позначити через $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, то

$$R_m(t,\varepsilon)=T(t,\varepsilon)(E+\varepsilon\tilde{Q}^{(1)}(t,\varepsilon)+...+\varepsilon^m\tilde{Q}^{(m)}(t,\varepsilon)),$$

де $\tilde{Q}^{(s)}(t,\varepsilon)$, $s=\overline{1,m}$, – квадратна матриця n-го порядку зі стовцями $q_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$.

Оскільки для $q_i^{(s)}(t,\varepsilon)$ структурно мають місце такі ж оцінки, що й для $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, то існує таке ε_1, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що для всіх $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$ $\det R_m(t,\varepsilon)\ne 0$, причому $\| R_m^{-1}(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{-1+\frac{1}{q}}),\ \varepsilon\to 0$ [3]. А тому з рівності (24) знаходимо $S_m(t,\varepsilon)=R_m^{-1}(t,\varepsilon)G(t,\varepsilon).$

За побудовою

$$\|\varepsilon^{m+1}S_m(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{\alpha(m)-1+\frac{1}{q}}),\ \varepsilon\to 0.$$

Таким чином, система (19) набуде вигляду

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}S_m(t,\varepsilon))y. \tag{25}$$

Як відомо ([10]), періодичний розв'язок $y=y(y,\varepsilon)$ системи (25) має задовольняти рівняння

$$y(t,\varepsilon)=\varepsilon^m\int_t^{t+T}\left(\Psi_m(s,\varepsilon)\left(\Psi_m^{-1}(T,\varepsilon)-E\right)\Psi_m^{-1}(t,\varepsilon)\right)^{-1}S_m(s,\varepsilon)y(s,\varepsilon)ds, \tag{26}$$

де $\Psi_m(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)$ – фундаментальна матриця однорідної системи $\varepsilon\frac{dy}{dt}=\Lambda_m(t,\varepsilon)y,\ \Psi_m(0,\varepsilon)=E.$

Нехай $\Lambda_m(t,\varepsilon)=diag\{\lambda_{m1}(t,\varepsilon),\lambda_{m2}(t,\varepsilon),...,\lambda_{mn}(t,\varepsilon)\}$. Надалі припускаємо, що

$$\operatorname{Re}\lambda_{mi}(t,\varepsilon)\ne 0,\ t\in[0;T],\ i=\overline{1,n}. \tag{27}$$

Як і раніше, вважаємо, що $\Lambda_m(t,\varepsilon)=diag\{\Lambda_{m1}(t,\varepsilon),\Lambda_{m2}(t,\varepsilon)\}$, де $\Lambda_{m1}(t,\varepsilon)$ та $\Lambda_{m2}(t,\varepsilon)$ – матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $\Lambda(t,\varepsilon)$ відповідно з від'ємними та додатними дійсними частинами.

Тоді систему (26) можна записати наступним чином

$$y_1(t,\varepsilon)=\varepsilon^m\left(E_1-\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\Lambda_{m1}(t,\varepsilon)dt\right)\right)^{-1}\int_0^T\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t+s-T}^t\Lambda_{m1}(t,\varepsilon)dt\right)(S_{m1}(t+s,\varepsilon)y_1(s,\varepsilon)+S_{m2}(t+s,\varepsilon)y_2(t+s,\varepsilon))ds, \tag{28}$$

$$y_2(t,\varepsilon)=\varepsilon^m\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\Lambda_{m2}(t,\varepsilon)dt\right)-E_2\right)^{-1}\int_0^T\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t+s}^t\Lambda_{m2}(t,\varepsilon)dt\right)(S_{m3}(t+s,\varepsilon)y_1(s,\varepsilon)+S_{m4}(t+s,\varepsilon)y_2(t+s,\varepsilon))ds, \tag{29}$$

де $y(t,\varepsilon)=colon(y_1(t,\varepsilon),y_2(t,\varepsilon))$, $S_m(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}S_{m1}(t,\varepsilon) & S_{m2}(t,\varepsilon)\\ S_{m3}(t,\varepsilon) & S_{m4}(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$ причому розмірності векторів $y_1(t,\varepsilon)$ та $y_2(t,\varepsilon)$ дорівнюють відповідно порядку матриць $\Lambda_{m1}(t)$, $S_{m1}(t,\varepsilon)$ та $\Lambda_{m2}(t)$, $S_{m4}(t,\varepsilon)$; E_1 та E_2 – одиничні матриці відповідного порядку.

Оператор, визначений за допомогою (28), (29), відображає множину P, $P=\{y(t,\varepsilon)\in C[0;T]:u(t+T,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)\}$, в себе і є оператором стиску. А тому система (28), (29) на множині P має єдиний розв'язок [2].

Таким чином справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай $A_s(t)\in C^{m+1}[0;T]$, $s\ge 0$, матриця $A_0(t)$ має одне власне значення, якому відповідають два елементарні дільники кратності p, q, причому $q>p\ge 2$, $p+q=n$ і виконуються умови (11), (27). Тоді існує таке ε_1, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що система (1) на відрізку $[0;T]$ для всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$ має єдиний T-періодичний розв'язок (18).

Результати та їх обговорення. Результати статті обговорювались на Міжнародній конференції "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", присвяченій 110-річчю з дня народження І.Г. Петровського (30 травня – 4 червня 2011 р., м. Москва) та на Міжнародній науковій конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", присвяченій 80-річчю з дня народження М.І. Шкіля (13, 14 грудня 2012 р., м. Київ).

Висновки. У статті побудовано формальну фундаментальну матрицю лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь. При цьому, використовуючи метод збуреного характеристичного рівняння, випадок кратних коренів характеристичного рівняння зведено до випадку простих коренів. Наведений спосіб побудови асимптотичних розв'язків узагальнено для аналогічних систем з періодичними коефіцієнтами.

Список використаних джерел

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1988.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., 1977.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1976. 4. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К., 2000.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1953.
6. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Пг., 1917.
7. Фещенко С.Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. – 1955. – Том 7, № 2. – С. 167 – 179.
8. Фещенко С.Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. – 1955. – Том 7, № 4. – С. 252 – 243.
9. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К., 1966.
10. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. – М., 1966.
11. Шкиль Н.И. Асимптотическое поведение решений линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения // Укр. матем. журн. – 1962. – Том 16, № 4. – С. 383 – 392.
12. Шкиль Н.И. Построение общего асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 1. – С. 163 – 169.
13. Шкиль Н.И. О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами: дис. ... докт. физ.-мат. наук. – К., 1968.
14. Шкиль Н.И. О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка // Arch. Math. (Brno). – 1987. – 23, № 1. – P. 53 – 62.
15. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К., 1989.
16. Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – Vol. 9. – P. 219 – 231.
17. Hukuhara M. Sur les proprietes asymptotiques des solutions d'un systeme d'equations differentielles lineaires contenant un parametre // Mem Fac. Engin. Kyusyu UniVol. – 1937. – Vol. 8. – P. 249 – 280.
18. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I // Funkcialaj Ekvacioj. – 1963. – Vol. 5. – P. 71 – 134.
19. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II // Funkcialaj Ekvacioj. – 1964. – Vol. 6. – P. 89 – 141.
20. Iwano M., Sibuya Y. Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter // Kodai Math. Semi. Rep. – 1963. – Vol. 15. – P. 1 – 28.
21. Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losunger linearer Differential systeme als Functionen eines Parameteres // Math. Anal. – 1907. – Vol. 63. – S. 277 – 300.
22. Sibuya Y. Sur reduction analitique d'un systeme d'equation differentielles ordinair lineaires contenant un parameter // Journ. Fac. Sci. UniVol. Tokyo. – 1958. – Vol. 7, № 5. – P. 527 – 540.

Надійшла до редколегії 11.12.13

П. Самусенко, канд. фіз.-мат. наук, доц., М. Шкіль, д-р фіз.-мат. наук, проф.
НПУ имени М.П. Драгоманова, Киев

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С помощью метода возмущенного характеристического уравнения построены асимптотические решения линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения. Полученные результаты обобщены для аналогичных систем с периодическими коэффициентами.

P. Samusenko, PhD, M. Shkil, Full Doctor
National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv

ASYMPTOTICAL INTEGRATION OF LINEAR SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Using the perturbed characteristic equation method, the asymptotic solutions of the linear singularly perturbed system of differential equations in the case of multiples roots of the characteristic equation is constructed. The results generalized for similar systems with periodic coefficients.

УДК 517.9

Т. Тищук, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

КЛАСИФІКАЦІЯ ПЕРІОДИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ НЕПЕРЕРВНИХ УНІМОДАЛЬНИХ ОПУКЛИХ ВГОРУ ВІДОБРАЖЕНЬ ВІДРІЗКА В СЕБЕ

Розглядається задача про класифікацію циклів неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе за взаємним розміщенням точок циклу. Запропоновано поняття опуклої вгору (опуклої вниз) циклічної перестановки, підозрілого на типовий вектора, типового вектора опуклої вгору циклічної перестановки. Сформульовано означення ваги опуклої вгору циклічної перестановки, за допомогою якого визначається відношення лінійного порядку на просторі опуклих вгору циклічних перестановок. Дано леми про структуру типового вектора, єдиність типу циклу та відношення лінійного порядку на множині опуклих вгору циклічних перестановок.

ВСТУП. Теорія одновимірних динамічних систем посідає особливе місце в загальній теорії динамічних систем у зв'язку з тим, що такі системи допускають достатньо повний опис і при цьому демонструють складні нелінійні ефекти. Прикладом такої динамічної системи є динамічна система, що визначається за допомогою ітерацій неперервного відображення відрізка в себе. Навіть у випадку, коли розглядуване неперервне відображення є унімодальним, тобто в деякому сенсі найпростішим нелінійним відображенням відрізка в себе, відповідна динамічна система, яку воно породжує, демонструє складну поведінку та співіснування періодичних траєкторій довільного періоду [4].

В теорії одновимірних динамічних систем отримано цілу низку глибоких результатів, які знайшли своє застосування, зокрема, у теорії різницевих та диференціально-різницевих рівнянь і теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними [5].