няння отриманих результатів для оболонок змінної товщини з частотами для циліндричних оболонок постійної товщини еквівалентної маси, показало :

✓ для форм коливань $m=1$, $n=4$ і $m=2$, $n=4$ при збільшенні товщини уздовж осі a резонансні частоти зростають і, навпаки, при збільшенні товщини уздовж осі b – резонансні частоти зменшуються;

✓ для інших розглянутих форм частота вільних коливань оболонки постійної товщини вища в порівнянні з частотами вільних коливань оболонок змінної товщини, причому із збільшенням n різниця цих частот зростає.

Запропонована методика дає можливість керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для виключення її динамічних характеристик з резонансного режиму за рахунок модуляції зміни товщини оболонки, що є однією з актуальних проблем дослідження міцності оболонкових конструкцій.

Для аналізу впливу характеристик матеріалу на динамічні характеристики розглянуто три матеріали (сталь, алюміній і мідь). Аналізуючи отримані дані, можна зробити висновок про те, що частоти вільних коливань при однакових геометричних параметрах оболонок із сталі і алюмінію мають незначну відмінність через невелику відмінность швидкості розповсюдження об'ємного розширення, яка залежить від модуля Юнга і густини матеріалу $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Частоти для оболонок з міді, при ідентичній геометрії, в 1,49 разів менші відповідних частот оболонок із сталі, що пояснюється відношенням відповідних швидкостей поздовжніх хвиль $\frac{c_{сталь}}{c_{медь}}=1{,}49$.

Список використаних джерел

1. Будак В.Д., Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов // Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла. – 2013. – 1. – С. 75-79.
2. Влайков Г. Г., Григоренко А. Я., Соколова Л. В. Свободные колебания анизотропных цилиндрических оболочек с переменными параметрами // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Том 3, № 12 – С. 13-16.
3. Григоренко А.Я., Пузырев С.В, Волчек Е.А. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощь метода сплайн-коллокации // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 60-69.
4. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.).
6. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища шк., 1983. – 286 с.
7. Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995. – 279 с.
8. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. – К. НТУУ "КПИ", 2011. – 317с.
9. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures. – McGraw-Hill Book Comp., 1975. – 634 p.
10. Hayek Sabih I., Boisvert Jeffrey E. Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory // J. Acoust. Soc. Amer. – 2010. – 128, No. 3. – P. 1063–1072.
11. Papadrakakis. Solving large-scale problems in mechanics,. – John Wiley & Sons Ltd., 1993.

Надійшла до редколегії 27.02.14

В. Будак, д-р техн. наук, проф., М. Борисенко, асп., Е. Бойчук, канд. физ.-мат. наук
ННУ им. В.О. Сухомлинского, Николаев,
А. Григоренко, д-р физ.-мат. наук, проф.
Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Исследуются свободные колебания тонких изотропных эллиптических оболочек переменной толщины одинаковой массы с помощью метода конечных элементов. Производится сравнительный анализ результатов с численными результатами, подтвержденными экспериментально, полученными для эллиптической оболочки постоянной толщины эквивалентной массы. Сравниваются частоты при одинаковых формах колебаний для оболочек одинаковой геометрии из трех разных материалов.

V. Budak, Full Doctor (eng), Professor., M. Borisenko, Post graduate student, O. Boychuk, Ph.D.
Mykolayiv State University named after Sukhomlynskyi, Mykolayiv,
A. Grigorenko, Full Doctor, Professor
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

NATURAL VIBRATIONS OF ELLIPTICAL SHELLS OF VARIABLE THICKNESS

Natural vibrations of thin isotropic elliptical shells of variable thickness equal weight are studied on the basis of finite element method. A comparative analysis of results with the numerical confirmed experimentally results obtained for elliptical shell of constant thickness equivalent weight. Frequencies vibrations in the same forms for the same geometry of shells of three different materials are compared.

УДК 517.946

К. Буряченко, канд. фіз.-мат. наук, О. Логачова, канд. фіз.-мат. наук
Донецький національний університет, Донецьк

ВИМІРНІСТЬ ЯДРА ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ У ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ВИПАДКАХ

Досліджено питання вимірності ядра задачі Діріхле в крузі для еліптичних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами у вироджених випадках. Особлива увага приділена неправильно еліптичним рівнянням четвертого порядку, які одночасно мають кратні характеристики, а також корені $\pm i$ ***відповідного характеристичного рівняння.***

Вступ.

Я. Б. Лопатинський [9] встановив, що однорідна задача Діріхле в обмеженій області з гладкою межею для правильно еліптичних рівнянь парного порядку зі сталими коефіцієнтами має скінчене число лінійно незалежних нетривіальних розв'язків, тобто, ядро оператора такої задачі скінченовимірне. У випадку сильно еліптичних рівнянь без молодших членів було встановлено, що ядро тривіальне [8].

У даній статті диференціальним рівнянням з виродженим символом будемо називати рівняння, корені відповідного характеристичного рівняння якого є кратними, а також можуть набувати значення $\pm i$. Зазначимо, що у випадку, коли усі корені характеристичного рівняння прості та не дорівнюють $\pm i$, відповідне диференціальне рівняння називатимемо рівнянням головного типу.

Ефект нескінченновимірності ядра задачі Діріхле для неправильно еліптичних рівнянь другого порядку було вперше виявлено А. В. Біцадзе,.який в [3] дав приклад рівняння, для якого однорідна задача Діріхле в крузі має злічену кількість лінійно незалежних розв'язків. Рівняння Біцадзе $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2}=0, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, які розглядалися у [3], є виродженими у використовуваної нами термінології (корені характеристичного рівняння кратні і дорівнюють i або $-i$), зокрема, вони є неправильно еліптичними.

В статті [4] отримано критерій нетривіальної розв'язності однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі для рівнянь другого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами і однорідним невиродженим символом у вигляді π-раціональності кута між різними комплексними характеристиками. При цьому ця умова гарантує неправильну еліптичність рівняння та нескінченновимірність ядра оператора задачі Діріхле. Також встановлено, що у випадку існування кратних коренів, а також коренів $\pm i$ характеристичного рівняння, ядро задачі Діріхле є тривіальним.

Питання існування та єдиності розв'язку граничних задач, які безпосередньо пов'язані з вимірністю ядра оператора відповідної задачі, для еліптичних рівнянь і систем другого порядку зі сталими коефіцієнтами було досліджено А. В. Біцадзе [3], А. П. Солдатовим [10], Н. Є. Товмасяном [11], а для рівнянь четвертого порядку – А. О. Бабаяном [1; 2] , К. О. Буряченко [7].

Таким чином, як було встановлено у зазначених вище працях, для рівнянь другого порядку не існує неправильно еліптичних рівнянь, для яких ядро відповідної задачі Діріхле було б скінченовимірним (але не тривіальним), тобто для таких рівнянь ядро або нескінченновимірне або тривіальне. Щодо рівнянь високого порядку (четвертого і вище), то для них можна виділити класи неправильно еліптичних рівнянь, ядро задачі Діріхле для яких є ненульовим і скінченовимірним. Використовуючи результати [5], у даній статті досліджено вимірність ядра задачі Діріхле для неправильно еліптичних рівнянь четвертого порядку, характеристичне рівняння яких має одночасно корені $\pm i$, а також кратні корені, які не дорівнюють $\pm i$.

1. Допоміжні означення та твердження

В одиничному крузі $K \subset R^2$ розглянемо задачу Діріхле для диференціального рівняння четвертого порядку з однорідним за порядком диференціювання символом (без молодших членів) зі сталими комплексними коефіцієнтами:

$$L(\partial_x)u = a_0\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3\partial x_2} + a_2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + a_3\frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2^3} + a_4\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\partial K} = 0, \quad u'_\nu|_{\partial K} = 0. \quad (2)$$

Тут $\vec{\nu}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі, $\partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right),\ a_k \in C,\ k = 0,1,...,4.$

Нехай $\lambda_j,\ j = 1,...,4$, – корені характеристичного рівняння $L(1,\lambda) = 0.$

Означення 1. Кутом φ_j нахилу характеристики, яка відповідає деякому кореню $\lambda_j \neq \pm i$ характеристичного рівняння $L(1,\lambda) = 0$, називається розв'язок рівняння $-tg\varphi_j = \lambda_j,\ j = 1,2,...,4.$

Зазначимо, що умова $\lambda_j \neq \pm i,\ j = 1,2,...,4$, пов'язана з тим, що рівняння $tg(x) = \pm i$ не має розв'язків. Внаслідок однорідності символу $L(\xi)$ рівняння (1), його можна розвинути наступним чином:

$$L(\xi) = a_0\xi_1^4 + a_1\xi_1^3\xi_2 + a_2\xi_1^2\xi_2^2 + a_3\xi_1\xi_2^3 + a_4\xi_2^4 = <\xi, a^1><\xi, a^2><\xi, a^3><\xi, a^4>,$$

з деякими комплексними векторами a^j . Тут $<,>$ – скалярний добуток у двовимірному комплексному просторі. Отже, рівняння (1) переписуємо у вигляді

$$<\nabla, a^1><\nabla, a^2><\nabla, a^3><\nabla, a^4> u = 0. \quad (3)$$

Побудуємо ортогональні до a^j вектори $\tilde{a}^j,\ j = 1,2,...,4,$ які будуть використані далі в роботі.

Сформулюємо означення правильно еліптичного рівняння.

Означення 2. Нехай усі корені λ_j характеристичного рівняння $L(1,\lambda) = 0$ є комплексними, $\lambda_j \in C$, тобто рівняння є еліптичним. Будемо казати, що еліптичне рівняння парного порядку $2m$ є правильно еліптичним, якщо корені λ_j порівну розподілені у додатній та від'ємній уявній площині, тобто

$$\operatorname{Im}\lambda_j > 0,\ j = 1,2,...,m, \quad \operatorname{Im}\lambda_k < 0,\ k = m+1, m+2,...,2m.$$

Найпростішим прикладом правильно еліптичного рівняння другого порядку є рівняння Лапласа $\Delta u = 0,\ \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,$ а прикладом правильно еліптичного рівняння четвертого порядку є рівняння вигляду $\Delta^2 u = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -i.$

В [7] встановлено наступні результати, які є правильними для диференціальних рівнянь будь-якого типу.

Теорема 1 [7]. Нехай усі корені характеристичного рівняння не дорівнюють $\pm i$, λ_1 – корінь кратності $k>1$, а решта коренів прості. Тоді

1. Якщо $k=2$, то для нетривіальної розв'язності задачі Діріхле (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ необхідно і достатньо, щоб кути нахилу характеристик задовольняли наступну умову для деякого $n\in N,\ n>3$:

$$\det\begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cos(n-2)\varphi_1 & \sin(n-2)\varphi_1 \\ -n\sin n\varphi_1 & n\cos n\varphi_1 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_1 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_1 \\ \cos n\varphi_3 & \sin n\varphi_3 & \cos(n-2)\varphi_3 & \sin(n-2)\varphi_3 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix}=0. \tag{4}$$

При виконанні цієї умови існує поліноміальний розв'язок задачі, який можна побудувати за допомогою поліномів Чебишева $T_k(x,\tilde{a}^j)$ першого роду порядку $k=n,\ n-1, n-2$ та ортогональних до a^j (див. (3)) векторів $\tilde{a}^j$:

$$u_n(x)=\sum_{j=1,\,j\neq 2}^{4} C_j\left(\frac{1}{2n}T_n(x,\tilde{a}^j)-\frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(x,\tilde{a}^j)\right)+C_2<x,a^1>T_{n-1}(x,\tilde{a}^1). \tag{5}$$

2. Якщо $k=3$, то необхідною і достатньою умовою нетривіальної розв'язності задачі (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ є виконання наступної рівності для деякого $n\in N,\ n>3$:

$$\det\begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cos(n-2)\varphi_1 & \sin(n-2)\varphi_1 \\ -n\sin n\varphi_1 & n\cos n\varphi_1 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_1 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_1 \\ n^2\cos n\varphi_1 & n^2\sin n\varphi_1 & (n-2)^2\cos(n-2)\varphi_1 & (n-2)^2\sin(n-2)\varphi_1 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix}=0. \tag{6}$$

3. Якщо $k=4$, то задача (1), (2) має тільки нульовий розв'язок у просторі $C^4(\bar{K})$.

Теорема 2 [7]. Нехай $\lambda_1=i$ – корінь характеристичного рівняння, який має кратність k, решта коренів – прості та не дорівнюють $-i$. Тоді

1. Якщо $k=1$, то для існування нетривіального ядра задачі Діріхле (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ необхідно і достатньо виконання наступної умови для деякого $n\in N,\ n>3$:

$$\Delta_n=\det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 & \cos(n-2)\varphi_2 & \sin(n-2)\varphi_2 \\ \cos n\varphi_3 & \sin n\varphi_3 & \cos(n-2)\varphi_3 & \sin(n-2)\varphi_3 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix}=0. \tag{7}$$

При цьому поліноміальний розв'язок задачі можна подати за допомогою поліномів Чебишева T_k першого роду порядку $k=n,n-2$:

$$u_n(x)=\frac{C_1}{2n}(x_1+ix_2)^n+\sum_{j=2}^{4} C_j\left(\frac{1}{2n}T_n(x,\tilde{a}^j)-\frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(x,\tilde{a}^j)\right).$$

2. Якщо $k=2$, то існує лише нульове ядро задачі Діріхле.

3. Якщо $k=3,4$, то ядро задачі Діріхле складається із зліченної кількості лінійно незалежних поліноміальних розв'язків:

$$u_n(z)=(1-z\bar{z})^2P_n(z),\ n=0,1,2,...,\ \text{при } k=3,$$

$$u_n(z)=(1-z\bar{z})^3P_n(z),\ n=0,1,2,...,\ \text{при } k=4.$$

Тут $P_n(z)$ – довільні поліноми ступеню n.

Для рівнянь четвертого порядку можна виділити два класи неправильно еліптичних рівнянь:

$$1)\ \operatorname{Im}\lambda_1>0,\ \operatorname{Im}\lambda_2>0,\ \operatorname{Im}\lambda_3>0,\ \operatorname{Im}\lambda_4<0, \tag{8}$$

$$2)\ \operatorname{Im}\lambda_1>0,\ \operatorname{Im}\lambda_2>0,\ \operatorname{Im}\lambda_3>0,\ \operatorname{Im}\lambda_4>0. \tag{9}$$

Тобто, чим вище порядок рівняння, тим більше таких класів можна виділити. Зокрема, для рівнянь довільного парного порядку $2m$ таких класів m.

2. Формулювання задачі

Розглянемо питання про нетривіальну розв'язність задачі Діріхле для наступних класів неправильно еліптичних рівнянь у випадках одночасного існування коренів $\pm i$ та кратних коренів (що не дорівнюють $\pm i$) характеристичного рівняння:

$$\lambda_1=i,\ \lambda_2=\lambda_3,\ \operatorname{Im}\lambda_2=\operatorname{Im}\lambda_3>0,\ \operatorname{Im}\lambda_4<0,\ \lambda_j\neq\pm i,\ j=2,3,4, \tag{10}$$

$$\lambda_1=i,\ \lambda_2=\lambda_3,\ \operatorname{Im}\lambda_2=\operatorname{Im}\lambda_3>0,\ \operatorname{Im}\lambda_4>0,\ \lambda_j\neq\pm i,\ j=2,3,4, \tag{11}$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \operatorname{Im}\lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda_3 = \operatorname{Im}\lambda_4 > 0,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4, \tag{12}$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \operatorname{Im}\lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda_3 = \operatorname{Im}\lambda_4 < 0,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4. \tag{13}$$

Зазначимо, що згідно п. 2 теореми 2 у випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = \lambda_4,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 3,4,$ ядро відповідної задачі Діріхле тривіальне.

3. Теореми існування нетривіального розв'язку задачі Діріхле у вироджених випадках

Сформулюємо спочатку теорему існування нетривіального розв'язку задачі Діріхле для рівнянь будь-якого типу у випадку

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 2,3,4. \tag{14}$$

Після цього дослідимо отриману умову для класів (10) і (11) неправильно еліптичних рівнянь.

Теорема 3. Нехай $\lambda_1 = i$ – простий корінь характеристичного рівняння, $\lambda_2 = \lambda_3,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 2,3,4,$ тобто виконано умови (14). Тоді для нетривіальної розв'язності відповідної задачі Діріхле (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ необхідно і достатньо виконання наступної умови для деякого $n \in N,\ n > 3$:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 & \cos(n-2)\varphi_2 & \sin(n-2)\varphi_2 \\ -n\sin n\varphi_2 & n\cos n\varphi_2 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_2 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_2 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{15}$$

При цьому поліноміальний розв'язок задачі має вигляд:

$$u_n(x) = \frac{C_1}{2n}(x_1 + ix_2)^n + \sum_{j=2,4} C_j\left(\frac{1}{2n}T_n(x,\tilde{a}^j) - \frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(x,\tilde{a}^j)\right) + C_3 < x, a^2 > T_{n-1}(x,\tilde{a}^2).$$

Доведення теореми 3 є наслідком об'єднання п.1 теореми 1 і п.1 теореми 2 (див. також [5; 7]).

Аналогічно, для рівнянь будь-якого типу за умов

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 2,3,4, \tag{16}$$

встановлюємо:

Теорема 4. Нехай $\lambda_1 = i$ – простий корінь характеристичного рівняння, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 2,3,4,$ тобто виконано умови (16). Тоді для нетривіальної розв'язності відповідної задачі Діріхле (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ необхідно і достатньо виконання наступної умови для деякого $n \in N,\ n > 3$:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 & \cos(n-2)\varphi_2 & \sin(n-2)\varphi_2 \\ -n\sin n\varphi_2 & n\cos n\varphi_2 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_2 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_2 \\ n^2\cos n\varphi_2 & n^2\sin n\varphi_2 & (n-2)^2\cos(n-2)\varphi_2 & (n-2)^2\sin(n-2)\varphi_2 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{17}$$

Доведення цього результату також можна отримати з п. 2 теореми 1 і п. 1 теореми 2 (див. також [5; 7]).

4. Дослідження вимірності ядра задачі Діріхле для класів (10) та (11) неправильно еліптичних рівнянь.

Дослідимо умову (15) теореми 3 для двох класів неправильно еліптичних рівнянь (10) та (11). Нехай спочатку виконано умови (10). Розглянемо

$$\mu_2 = \mu_3 = -\frac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i},\ \mu_4 = -\frac{\lambda_4 + i}{\lambda_4 - i}. \tag{18}$$

Тоді з формул (18) і означення 1 кутів нахилу характеристик, $\lambda_j = -tg\varphi_j$, отримуємо $\mu_2 = \mu_3 = e^{2i\varphi_2}$, $\mu_4 = e^{-2i\varphi_4}$.

Перепишемо визначник з умови (15) у термінах μ_k. Маємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} \mu_2 & (n-2)\,\mu_2 & \mu_4^{n-1} \\ \mu_2^{n-1} & -(n-2)\,\mu_2^{n-1} & \mu_4 \\ \mu_2^n & -n\,\mu_2^n & 1 \end{pmatrix},\ \ n > 3. \tag{19}$$

Нехай $|\mu_2| > |\mu_4|$, $\gamma = \mu_4\mu_2$. Тоді внаслідок (10) і (18) знаходимо $|\gamma| < 1$. Дослідимо асимптотику визначника (19) при достатньо великих n. Маємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & n-2 & \gamma^{n-1} \\ 1 & -(n-2) & \gamma \\ 1 & -n & 1 \end{pmatrix} = \gamma^{n-1} - (n-1)\gamma + (n-2) \neq 0,$$

при $|\gamma| < 1$. Таким чином, доведено

Твердження 1. Нехай рівняння (1) є неправильно еліптичним, і відповідне йому характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = i$, а також кратний корінь $\lambda_2 = \lambda_3,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$ причому виконано умови (10) на уявні частини цих коренів. Тоді ядро задачі Діріхле (1), (2) тривіальне.

Розглянемо неправильно еліптичні рівняння, які задовольняють умовам (11). Покладемо

$$\mu_2 = \mu_3 = -\frac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i},\ \mu_4 = -\frac{\lambda_4 - i}{\lambda_4 + i}. \tag{20}$$

Тоді з формул (20) і означення 1 кутів нахилу характеристик, $\lambda_j = -tg\varphi_j$, отримуємо $\mu_2 = \mu_3 = e^{2i\varphi_2}$, $\mu_4 = e^{2i\varphi_4}$. Перепишемо визначник з умови (15) у термінах μ_k. Маємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} \mu_2 & (n-2)\,\mu_2 & \mu_4 \\ \mu_2^{n-1} & -(n-2)\,\mu_2^{n-1} & \mu_4^{n-1} \\ \mu_2^n & -n\,\mu_2^n & \mu_4^n \end{pmatrix},\ \ n > 3. \tag{21}$$

Нехай $|\mu_2| > |\mu_4|$, $\delta = \dfrac{\mu_4}{\mu_2}$. Тоді з (10) та (20) знаходимо, що $|\delta| < 1$. З (21) отримуємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & n-2 & \delta \\ 1 & -(n-2) & \delta^{n-1} \\ 1 & -n & \delta^n \end{pmatrix} = (n-2)\delta^{n-1} - (n-1)\delta^{n-2} + 1 = 0,$$

при деякому $|\delta| < 1,\ n > 3$. Наприклад, при $n = 4,\ \Delta_4 = 2\delta^3 - 3\delta^2 + 1 = 0$, якщо $\delta = 1,\ \delta = -\dfrac{1}{2}$. Тобто умова (15) для класу (11) неправильно еліптичних рівнянь виконується для скінченого числа номерів n, отже, ядро відповідної задачі Діріхле у цьому випадку нетривіальне і скінченовимірне . Таким чином, доведено

Твердження 2. Нехай рівняння (1) є неправильно еліптичним, і відповідне йому характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = i$, а також кратний корінь $\lambda_2 = \lambda_3,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$ причому виконано умови (11) на уявні частини цих коренів. Тоді ядро відповідної задачі Діріхле (1), (2) скінченовимірне і складається з

$$0 \neq d = \sum_{n=4}^{\infty} (4 - rank\ A_n) < \infty \tag{22}$$

лінійно незалежних поліноміальних елементів вигляду:

$$u_n(z,\bar{z}) = \frac{C_1}{2n} z^n + \sum_{j=2,4} C_j \left(\frac{1}{2n} T_n(\mu_k z + \bar{z}) - \frac{1}{2(n-2)} T_{n-2}(\mu_k z + \bar{z}) \right) + C_3 (z - \mu_2 \bar{z}) T_{n-1}(\mu_2 z + \bar{z}),\ z = x_1 + i x_2.$$

Тут

$$A_n = \det\begin{pmatrix} \mu_2 & (n-2)\mu_2 & \mu_4 \\ \mu_2^{n-1} & -(n-2)\mu_2^{n-1} & \mu_4^{n-1} \\ \mu_2^n & -n\mu_2^n & \mu_4^n \end{pmatrix},\ \ n > 3,$$

а числа μ_j пов'язані з коренями $\lambda_j,\ j = 2,3,4,$ характеристичного рівняння за допомогою співвідношень (20).

5. Вимірність ядра задачі Діріхле для класів (12) та (13) неправильно еліптичних рівнянь

Розглянемо умову (17) теореми 4 для двох класів неправильно еліптичних рівнянь, коли корені характеристичного рівняння задовольняють умову (12) або (13). У випадку (12) покладемо

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = -\frac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i}. \tag{23}$$

Тоді $\lambda_j = -tg\varphi_j$ і $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = e^{-2i\varphi_4}$. Перепишемо визначник з умови (17) у термінах μ_k. Маємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} \mu_2 & (n-2)\mu_2 & (n-2)^2\mu_4 \\ \mu_2^{n-1} & -(n-2)\mu_2^{n-1} & (n-2)^2\mu_4^{n-1} \\ \mu_2^n & -n\mu_2^n & n^2\mu_2^n \end{pmatrix},\ \ n > 3, \tag{24}$$

або

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & n-2 & (n-2)^2 \\ 1 & -(n-2) & (n-2)^2 \\ 1 & -n & n^n \end{pmatrix} = -2(n-2)(4n-4) = 0,$$

остання рівність виконується при $n = 1,2$ (бо $n > 3$). Таким чином, умова (17) для класу (12) неправильно еліптичних рівнянь не виконується, тобто задача Діріхле у цьому випадку має лише тривіальне ядро. Аналогічна ситуація має місце і для класу (13) неправильно еліптичних рівнянь. Отже, місце встановлено такий результат

Твердження 3. Нехай рівняння (1) є неправильно еліптичним, і відповідне йому характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = i$, а також кратний корінь $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$ причому виконано умови (12) і (13) на уявні частини цих коренів. Тоді ядро відповідної задачі Діріхле (1), (2) тривіальне.

Висновки

Досліджено питання про нетривіальну розв'язність задачі Діріхле для наступних класів неправильно еліптичних рівнянь четвертого порядку у випадках одночасного існування коренів $\pm i$, а також кратних коренів (що не дорівнюють $\pm i$) характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ \operatorname{Im}\lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda_3 > 0,\ \operatorname{Im}\lambda_4 < 0,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ \operatorname{Im}\lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda_3 > 0,\ \operatorname{Im}\lambda_4 > 0,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \operatorname{Im}\lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda_3 = \operatorname{Im}\lambda_4 > 0,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \operatorname{Im}\lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda_3 = \operatorname{Im}\lambda_4 < 0,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4.$$

Вивчено також питання про вимірність ядра відповідної задачі Діріхле в цих випадках.

Список використаних джерел

1. Бабаян А. Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в единичном круге // Известия НАН Армении, Математика. – 2003. – 38, № 6. – С. 39–48.
2. Бабаян А. О задаче Дирихле для неправильного эллиптического уравнения четвертого порядка // Неклассические уравнения математической физики. – 2007. – С. 56–68.
3. Бицадзе А. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Усп. матем. наук. – 1948. – 3, № 6. – С. 211–212.
4. Бурский В. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Матем. заметки. – 1990. – 48, № 3. – С. 32–36.
5. Бурский В., Буряченко Е. Нарушение единственности решения задачи Дирихле для бестипных дифференциальных уравнений произвольного четного порядка в круге // Український математичний вісник. – 2012. – Т. 9, № 4. – С. 477–514.
6. Бурский В., Буряченко Е. Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Матем. заметки. – 2005. – 74, № 4. – С. 1032–1043.
7. Буряченко Е. О единственности решений задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – 10. – С. 44–49.
8. Вишик М. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сборник. – 1951. – 29, вып. 3. – С. 615–677.
9. Лопатинский Я. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр.мат. журнал. – 1953. – 5, № 2. – С. 123–151.
10. Солдатов А. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. – 2003. – 39, № 5. – С. 674–786.
11. Товмасян Н. Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия АН Арм. ССР. Математика. – 1968. – 3, № 6. – С. 497–521.

Надійшла до редколегії 12.03.14

Е. Буряченко, канд. физ.-мат. наук, О. Логачева, канд. физ.-мат. наук
Донецкий государственный университет, Донецк

РАЗМЕРНОСТЬ ЯДРА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Исследован вопрос о размерности ядра задачи Дирихле в круге для эллиптических уравнений четвертого порядка с постоянными комплексными коэффициентами в вырожденных случаях. Особое внимание уделено неправильно эллиптическим уравнениям четвертого порядка, имеющим одновременно кратные характеристики, а также корни $\pm i$ соответствующего характеристического уравнения.

K. Buryachenko, Ph.D, O. Logachova, Ph.D
Donetsk National University, Donetsk

DIMENSION OF THE KERNEL OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER EQUATIONS IN SOME DEGENERATE CASES

It is investigated the question of kernel's dimension of the Dirichlet problem in a disk for the fourth order elliptic equations with constant complex coefficients in degenerate cases. A special role is given to the fourth order improperly elliptic equations with multiple characteristics and roots $\pm i$ of the corresponding characteristic equation.

УДК 539.3

Р. Ісрафілов, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.,
К. Савельєва, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАСИЧЕНОГО ПОРИСТОГО ПІВПРОСТОРУ

Розв'язок просторово-двовимірної задачі отримано в рамках теоретичної лінійної схеми Біо шляхом застосування перетворення Лапласа за часом, комплексного перетворення Фур'є за просторовою координатою та методу послідовних наближень. Граничні умови відповідають дії на межі середовища джерела пружних переміщень. Перехід до оригіналу в отриманих розв'язках здійснено за допомогою методу Р.Шепері.

ВСТУП

Роботу присвячено розв'язанню просторово-двовимірної задачі для випадку дії на межі в'язкопружного пористого півпростору джерела пружних переміщень Точні розв'язки аналогічних одновимірних задач, граничні умови для пе-