Твердження 3. Нехай рівняння (1) є неправильно еліптичним, і відповідне йому характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = i$, а також кратний корінь $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$ причому виконано умови (12) і (13) на уявні частини цих коренів. Тоді ядро відповідної задачі Діріхле (1), (2) тривіальне.

Висновки

Досліджено питання про нетривіальну розв'язність задачі Діріхле для наступних класів неправильно еліптичних рівнянь четвертого порядку у випадках одночасного існування коренів $\pm i$, а також кратних коренів (що не дорівнюють $\pm i$) характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ \mathrm{Im}\lambda_2 = \mathrm{Im}\lambda_3 > 0,\ \mathrm{Im}\lambda_4 < 0,\ \lambda_j \neq \pm i, j = 2,3,4,$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ \mathrm{Im}\lambda_2 = \mathrm{Im}\lambda_3 > 0,\ \mathrm{Im}\lambda_4 > 0,\ \lambda_j \neq \pm i, j = 2,3,4,$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \mathrm{Im}\lambda_2 = \mathrm{Im}\lambda_3 = \mathrm{Im}\lambda_4 > 0,\ \lambda_j \neq \pm i, j = 2,3,4,$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \mathrm{Im}\lambda_2 = \mathrm{Im}\lambda_3 = \mathrm{Im}\lambda_4 < 0,\ \lambda_j \neq \pm i, j = 2,3,4.$$

Вивчено також питання про вимірність ядра відповідної задачі Діріхле в цих випадках.

Список використаних джерел

1. Бабаян А. Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в единичном круге // Известия НАН Армении, Математика. – 2003. – 38, № 6. – С. 39–48.
2. Бабаян А. О задаче Дирихле для неправильного эллиптического уравнения четвертого порядка // Неклассические уравнения математической физики. – 2007. – С. 56–68.
3. Бицадзе А. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Усп. матем. наук. – 1948. – 3, № 6. – С. 211–212.
4. Бурский В. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Матем. заметки. – 1990. – 48, № 3. – С. 32–36.
5. Бурский В., Буряченко Е. Нарушение единственности решения задачи Дирихле для бестипных дифференциальных уравнений произвольного четного порядка в круге // Український математичний вісник. – 2012. – Т. 9, № 4. – С. 477–514.
6. Бурский В., Буряченко Е. Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Матем. заметки. – 2005. – 74, № 4. – С. 1032–1043.
7. Буряченко Е. О единственности решений задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – 10. – С. 44–49.
8. Вишик М. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сборник. – 1951. – 29, вып. 3. – С. 615–677.
9. Лопатинский Я. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр.мат. журнал. – 1953. – 5, № 2. – С. 123–151.
10. Солдатов А. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. – 2003. – 39, № 5. – С. 674–786.
11. Товмасян Н. Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия АН Арм. ССР. Математика. – 1968. – 3, № 6. – С. 497–521.

Надійшла до редколегії 12.03.14

Е. Буряченко, канд. физ.-мат. наук, О. Логачева, канд. физ.-мат. наук
Донецкий государственный университет, Донецк

РАЗМЕРНОСТЬ ЯДРА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Исследован вопрос о размерности ядра задачи Дирихле в круге для эллиптических уравнений четвертого порядка с постоянными комплексными коэффициентами в вырожденных случаях. Особое внимание уделено неправильно эллиптическим уравнениям четвертого порядка, имеющим одновременно кратные характеристики, а также корни $\pm i$ соответствующего характеристического уравнения.

K. Buryachenko, Ph.D, O. Logachova, Ph.D
Donetsk National University, Donetsk

DIMENSION OF THE KERNEL OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER EQUATIONS IN SOME DEGENERATE CASES

It is investigated the question of kernel's dimension of the Dirichlet problem in a disk for the fourth order elliptic equations with constant complex coefficients in degenerate cases. A special role is given to the fourth order improperly elliptic equations with multiple characteristics and roots $\pm i$ of the corresponding characteristic equation.

УДК 539.3

Р. Ісрафілов, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.,
К. Савельєва, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАСИЧЕНОГО ПОРИСТОГО ПІВПРОСТОРУ

Розв'язок просторово-двовимірної задачі отримано в рамках теоретичної лінійної схеми Біо шляхом застосування перетворення Лапласа за часом, комплексного перетворення Фур'є за просторовою координатою та методу послідовних наближень. Граничні умови відповідають дії на межі середовища джерела пружних переміщень. Перехід до оригіналу в отриманих розв'язках здійснено за допомогою методу Р.Шепері.

ВСТУП

Роботу присвячено розв'язанню просторово-двовимірної задачі для випадку дії на межі в'язкопружного пористого півпростору джерела пружних переміщень Точні розв'язки аналогічних одновимірних задач, граничні умови для пе-

© Ісрафілов Р., Савельєва К., 2014

реміщень в яких відповідають заданню на межі півпростору короткочасного, рівномірного за координатами, гармонічного із заданою частотою імпульсу, отримано в роботах [7,8].

Для розв'язання даної задачі застосовано перетворення Лапласа за часом і комплексне перетворення Фур'є за просторовою координатою *x*. Які теоретичну схему, що описує властивості середовища, обрано класичну лінійну схему Біо [3,4,7,10,11].

Постановка задачі та основні рівняння

Задача, згідно з прийнятою теоретичною схемою Біо, зводиться до розв'язання системи двох зв'язаних диференціальних рівнянь руху:
для скелета

$$\begin{gathered}(A+N)\frac{\partial e^{(s)}}{\partial x}+N\nabla^2 \mathrm{u}^{(s)}-\rho_{11}\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u^{(f)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial u^{(f)}}{\partial t}-Q\frac{\partial e^{(f)}}{\partial x},\\ (A+N)\frac{\partial e^{(s)}}{\partial y}+N\nabla^2 \mathrm{v}^{(s)}-\rho_{11}\frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial v^{(s)}}{\partial t}=\rho_{12}\frac{\partial^2 v^{(f)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial v^{(f)}}{\partial t}-Q\frac{\partial e^{(f)}}{\partial y};\end{gathered} \tag{1}$$

для рідини

$$\begin{gathered}mR\frac{\partial e^{(f)}}{\partial x}-\rho_{22}\frac{\partial^2 u^{(f)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial u^{(f)}}{\partial t}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}-mQ\frac{\partial e^{(s)}}{\partial x},\\ mR\frac{\partial e^{(f)}}{\partial y}-\rho_{22}\frac{\partial^2 v^{(f)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial v^{(f)}}{\partial t}=\rho_{12}\frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial v^{(s)}}{\partial t}-mQ\frac{\partial e^{(s)}}{\partial y};\end{gathered} \tag{2}$$

при заданих нульових початкових умовах

$$\mathrm{u}^{(s)}(x,y,0)=\mathrm{v}^{(s)}(x,y,0)=\frac{\partial \mathrm{u}^{(s)}(x,y,0)}{\partial t}=\frac{\partial \mathrm{v}^{(s)}(x,y,0)}{\partial t}=\mathrm{u}^{(f)}(x,y,0)=\mathrm{v}^{(f)}(x,y,0)=\frac{\partial \mathrm{u}^{(f)}(x,y,0)}{\partial t}=\frac{\partial \mathrm{v}^{(f)}(x,y,0)}{\partial t}=0 \tag{3}$$

та граничних умовах на координатній площині xOz

$$\mathrm{u}^{(s)}(x,0,t)=f_1^{(s)}(x,t),\ \mathrm{v}^{(s)}(x,0,t)=f_2^{(s)}(x,t),\ \mathrm{u}^{(f)}(x,0,t)=f_1^{(f)}(x,t),\ \mathrm{v}^{(f)}(x,0,t)=f_2^{(f)}(x,t). \tag{4}$$

У виразах (1) – (4) використано стандартні для теорії Біо та для теорії пружності [5] позначення. Тут $\mathrm{u}^{(s)}, \mathrm{u}^{(f)}$ та $\mathrm{v}^{(s)}, \mathrm{u}^{(f)}$ – переміщення скелета і рідини в напрямках x та y, відповідно; $\mathrm{e}^{(s)}$, $\mathrm{e}^{(f)}$ – їхні об'ємні деформації; $f_1^{(s)}$, $f_2^{(s)}$, $f_1^{(f)}$, $f_2^{(f)}$ – функції, що задають переміщення на межі середовища.

У просторі зображень, з урахуванням (3), співвідношення (1) – (4) набувають вигляду

$$(A+N)\frac{\partial \overline{e}^{(s)}}{\partial x}+N\nabla^2\overline{u}^{(s)}-p(\rho_{11}p+b)\overline{u}^{(s)}=p(\rho_{12}p-b)\overline{u}^{(f)}-Q\frac{\partial \overline{e}^{(f)}}{\partial x}; \tag{5}$$

$$(A+N)\frac{\partial \overline{e}^{(s)}}{\partial x}+N\nabla^2\overline{v}^{(s)}-p(\rho_{11}p+b)\overline{v}^{(s)}=p(\rho_{12}p-b)\overline{v}^{(f)}-Q\frac{\partial \overline{e}^{(f)}}{\partial x}; \tag{6}$$

$$mR\frac{\partial \overline{e}^{(f)}}{\partial y}-p(\rho_{22}p+b)\overline{u}^{(f)}=p(\rho_{12}p-b)\,\overline{u}^{(s)}-mQ\frac{\partial \overline{e}^{(s)}}{\partial x}; \tag{7}$$

$$mR\frac{\partial \overline{e}^{(f)}}{\partial y}-p(\rho_{22}p+b)\overline{v}^{(f)}=p(\rho_{12}p-b)\,\overline{v}^{(s)}-mQ\frac{\partial \overline{e}^{(s)}}{\partial y}; \tag{8}$$

$$\tilde{u}^{(s)}(x)=\tilde{f}_1^{(s)}(x),\ \tilde{v}^{(s)}(x)=\tilde{f}_2^{(s)}(x),\ \tilde{u}^{(f)}(x)=\tilde{f}_1^{(f)}(x),\ \tilde{v}^{(f)}(x)=\tilde{f}_2^{(f)}(x), \tag{9}$$

(p – параметр Лапласа).

Розв'язання в просторі зображень. Метод послідовних наближень

Один з найбільш часто використовуваних в класичній теорії пружності способів розв'язання задач динаміки пов'язаний з введенням потенціалу пружних переміщень (представлення типу Ламе). З метою отримання такого представлення для пористого середовища, яке насичене рідиною, переміщення для скелета і рідини записують таким чином

$$\tilde{u}^{(s)}(x)=\left(\frac{A+N}{N}\right)\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(s)}}{\partial x\partial y},\ \tilde{v}^{(s)}=\left(\frac{A+2N}{N}\right)\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(s)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(s)}}{\partial y^2}-\frac{p}{N}(\rho_{11}p+b)\tilde{\Phi}^{(s)}, \tag{10}$$

$$\tilde{u}^{(f)}(x)=-mR\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(f)}}{\partial x\partial y},\ \tilde{v}^{(f)}=-p(\rho_{22}p+b)\tilde{\Phi}^{(f)}+mR\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(f)}}{\partial x^2}. \tag{11}$$

При підстановці виразів (10), (11) в рівняння (5) – (8) і заміні правих частин в рівняннях (6), (8), з урахуванням правих частин рівнянь (5), (7), тобто з урахуванням рівностей

$$p(\rho_{11}p-b)\overline{v}^{(f)}-Q\frac{\partial \overline{e}^{(f)}}{\partial y}=p(\rho_{11}p-b)\overline{v}^{(f)}-Q\frac{\partial^2\overline{v}^{(f)}}{\partial y^2}-\frac{Q^2}{p(\rho_{12}p-b)}\frac{\partial^3\overline{e}^{(f)}}{\partial x^2\partial y}, \tag{12}$$

$$p\left(\rho_{12}p-b\right)\bar{v}^{(s)}-mQ\frac{\partial\bar{e}^{(s)}}{\partial y}=p\left(\rho_{12}p-b\right)\bar{v}^{(s)}-mQ\left(\frac{\partial^2\bar{v}^{(s)}}{\partial y^2}-\frac{m^2Q^2}{p\left(\rho_{12}p-b\right)}\frac{\partial^3\bar{e}^{(s)}}{\partial x^2\partial y}\right), \tag{13}$$

рівняння (5), (7) тотожно задовольняються.

Рівняння (6), (8) розв'язувалися методом послідовних наближень, при цьому в якості першого наближення беруться розв'язки однорідних рівнянь, що відповідають (6), (8). З урахуванням (11), перші однорідні рівняння з (1), (2) (з нульовими правими частинами), тотожно задовольняються, а другі записуються через $\bar{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)$, $\tilde{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)$, як допоміжні рівняння, які за допомогою перетворення Фур'є

$$\bar{\Phi}_1^{(s)}\left(\alpha,y,p\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\bar{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)dx\ ,\ \bar{\Phi}_1^{(s)}\left(\alpha,y,p\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\bar{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)dx$$

набувають вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2-p^2D_1^{(s,f)}\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2-p^2D_2^{(s,f)}\right)\bar{\Phi}_1^{(s,f)}\left(\alpha,y,P\right)=0\,, \tag{14}$$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2-p^2D_1^{(f)}\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)\bar{\Phi}_1^{(f)}\left(\alpha,y,P\right)=0\,, \tag{15}$$

де α – параметр перетворення Фур'є; $D_1^{(s)}=\rho_{11}/\left(A+2N\right)$, $D_2^{(s)}=\rho_{11}/N$, $D_1^{(f)}=\rho_{11}/A$, $D_2^{(f)}=0$.

Обмежені на нескінченності розв'язки рівнянь (10), (11) мають вигляд:

$$\Phi_1^{(s)}\left(\alpha,y,P\right)=B_1^{(s)}\exp(-y\sqrt{\alpha^2+D_1^{(s)}}+B_2^{(s)}\exp(-y\sqrt{\alpha^2+D_2^{(s)}}\ , \tag{16}$$

$$\Phi_1^{(f)}\left(\alpha,y,p\right)=B_1^{(f)}\exp(-y\sqrt{\alpha^2+D_1^{(f)}}+B_2^{(f)}\exp(-y\sqrt{\alpha^2+D_2^{(f)}}\ . \tag{17}$$

Відповідно до формул звернення для перетворення Фур'є маємо

$$\tilde{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\left[B_1^{(s)}\left(\alpha,p\right)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2D_1^{(s)}}\right)+B_{21}^{(s)}\left(\alpha,p\right)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2D_2^{(s)}}\right)\right]d\alpha\ , \tag{18}$$

$$\tilde{\Phi}^{(f)}\left(x,y,p\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\left[B_1^{(s)}\left(\alpha,p\right)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2D_1^{(s)}}\right)+B_{21}^{(s)}\left(\alpha,p\right)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2D_2^{(s)}}\right)\right]d\alpha\ , \tag{19}$$

де $B_1^{(s)}\left(\alpha,p\right)$, $B_2^{(s)}\left(\alpha,p\right)$ і $B_1^{(s)}\left(\alpha,p\right)$, $B_2^{(s)}\left(\alpha,p\right)$ визначаються з образу граничних умов (4) для переміщень скелета і рідини.

Для другого наближення загальний розв'язок однорідних рівнянь будуємо аналогічним чином, а частинні розв'язки неоднорідних рівнянь (5) – (8) знаходимо за допомогою відомих результатів (17), (18) методом невизначених коефіцієнтів. Нові константи, що виникають при цьому, визначаються також з формул (9). Подібним чином можна знайти і наступні наближення. Враховуючи, однак, вплив взаємопов'язаності процесів фільтрації і деформації скелета, з практичної точки зору, досить обмежитися другим наближенням.

Про процедуру обертання перетворення лапласа

Перехід до оригіналу в отриманих розв'язках є математично складною задачею. Для багатьох інженерних застосувань наближений розв'язок цієї задачі, за певних умов, можна отримати за допомогою методу Р.Шепері [11], який запропонований автором для розв'язання квазістатичних задач. Суть цього наближеного методу обернення перетворення Лапласа полягає в тому, що для функції $f\left(t\right)$ (або $p\tilde{f}\left(p\right)$), лінійно залежної від $\ln t$ (або від $\ln p$), апроксимація

$$f\left(t\right)\approx\left(p\tilde{f}\left(p\right)\right)=e^{\frac{w_0}{t}}\ , \tag{20}$$

де $p=e^{\frac{w_o}{t}}$, дає точний результат, причому значення параметра w_0 залежить від числа Ейлера γ ($w_0=-\gamma$). Для обертання отриманих розв'язків формулу (20) узагальнено (з додаванням наступних наближень) для випадку нестаціонарних динамічних задач. При цьому параметр визначаємо із співвідношення

$$\frac{\pi^2}{6}+\gamma\left(\gamma+2\right)+w_0\left(w_0+2\gamma-2\right)+p\left(\frac{\pi^2}{6}+w_0\left(w_0+2\gamma\right)\right)=0\,. \tag{21}$$

Після підстановки розв'язку рівняння (21) в формулу $p=e^{w_o/t}$ отримуємо вираз

$$p=\frac{1}{t}\exp\left(-\gamma+\frac{1}{1+p}\left(1-\sqrt{\left(p+0,675\right)\left(p+3,345\right)}\right)\right). \tag{22}$$

Висновки

Розв'язок просторово-двовимірної задачі отримано в рамках теоретичної лінійної схеми Біо шляхом застосування перетворення Лапласа за часом, комплексного перетворення Фур'є за просторовою координатою та методу послідовних наближень. Граничні умови відповідають дії на межі середовища джерела пружних переміщень. Перехід до оригіналу в отриманих розв'язках отримано за допомогою методу Р.Шепері.

Побудований розв'язок відповідає заданню переміщення в загальному вигляді. Розв'язок задачі для конкретно заданих граничних умов буде предметом наступних публікацій.

Список використаних джерел

1. Био М.А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды // Механика, сборник переводов. – 1956. – 35, №1. – С. 140-146.
2. Гомилко А.М., Гуржий А.А., Трофимчук А.М. Гармонические колебания пористо-упругого насыщенного жидкостью слоя на жестком основании // Акуст. вістник. – 1999. – 2, №3. – С.33-41.
3. Городецкая Н.С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // Акуст.вістник. – 2007. – 10, №2. – С.43-63.
4. Исрафилов Р.М., Савельева Е.В. Двумерное волновое движение в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела, Том 1. – Донецкий национальный.университет, 2013. – С. 253 –257.
5. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. – М.:Наука, 1972. – 328 с.
6. Рущицкий Я.Я., Исрафилов Р.М. Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. І. // Прикл. механика. – 2001. – 37, №4. – С. 104–111.
7. Рущицкий Я.Я., Исрафилов Р.М. Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. ІІ. // Прикл. механика. – 2001. – 37, №5. – С. 115–125.
8. Снеддон И.Н. Преобразование Фурье. – М.: ИЛ, 1956. – 220 с.
9. Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. – К.: Наук. думка, 2003. – 230 с.
10. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Low frequency range // J. Acoust.Soc.Am. –1956. – 28. – P.168 – 178.
11. Biot M.A.Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. : II. – Higher frequency range // J.Acoust.Soc.Amer, 1956. – 28. – P. 179-191.
12. Shapery R.A. Approximate method of transform Inversion for viscoelastic stress analysis // Processing of the Fourth U.S.Nat. Congress of App. Mech.. vol.2, ASME. – 1962. – P. 1075.

Надійшла до редколегії 10.04.14

Р. Исрафилов, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр., Е. Савельева, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр.
Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАСЫЩЕННОГО ПОРИСТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Решение пространственно-двухмерной задачи получено в рамках теоретической линейной схемы Био путем приме-нения преобразования Лапласа по времени, комплексного преобразования Фурье по пространственной координате и метода последовательных приближений. Граничные условия соответствуют действию на границе среды источника упругих перемещений. Переход к оригиналу в полученных решениях получен с помощью метода Р.Шепери.

R. Israfilov, PhD, K. Savelieva, PhD
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL DYNAMIC PROBLEM FOR SATURATED POROUS HALF-SPACE

Solution of spatially two-dimensional problem is obtained in the framework of the theoretical classical linear scheme Bio by the Laplace transform, the complex Fourier transform, and the method of successive approximations. Boundary conditions correspond to the action of the source of elastic displacements on the medium boundary. Original of the solutions is obtained by the method of R.Sheperi.

УДК 539.3

Р. Ісрафілов, канд. фіз.-мат. наук, старш.наук.співроб.,
К. Савельєва, канд. фіз.-мат. наук, старш.наук.співроб.
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАСИЧЕНОГО РІДИНОЮ АБО ГАЗОМ ПОРИСТОГО ПОРОЖНЬОГО ЦИЛІНДРА ПІД ВПЛИВОМ ІМПУЛЬСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розглянуто процес деформування насиченого рідиною або газом пористого скляного порожнього циліндра внаслідок імпульсного навантаження на його внутрішній поверхні. Враховано стисливість рідини чи газу. В якості теоретичної моделі середовища використано класичну лінійну схему Біо.

Вступ

Теоретичні результати механіки насичених пористих середовищ знаходять широке практичне застосування [1-11]. Зокрема, в хімічній і нафтопереробній промисловості для очищення рідин і газів від забруднення і агресивних домішок використовуються фільтрувальні елементи з пористих металів [1]. В авіації один з методів боротьби з утворенням криги полягає в подачі підігрітого повітря або рідини, що випаровується, через пористі корозійностійкі матеріали передніх кромок крил літаків [4]. У механіці гірських порід велика увага приділяється зміні фільтраційних і механічних процесів у масиві, що є пористим насиченим рідиною або газом середовищем. Таким чином, пористі матеріали в процесі експлуатації зазвичай контактують з деяким газоподібним чи рідким середовищем, внаслідок чого можуть виникнути особливості фільтрації в порах, зміни напружено-деформованого стану та міцнісних властивостей скелета. З цього випливає необхідність теоретичного описання поведінки таких матеріалів, що послідовно враховує фізико-механічні властивості і структуру їхніх окремих фаз. Запропоноване дослідження проводилося в рамках теорії Біо [5], яка докладно описує поведінку середовища.

Постановка задачі. Основні співвідношення

Розглядається процес деформування насиченого рідиною або газом досить довгого пористого скляного порожнього циліндра внаслідок миттєво виниклого рівномірно розподіленого імпульсного навантаження на його внутрішній поверхні з урахуванням стисливості рідини чи газу. Протягом проміжку часу $0 \le t \le t_0$ навантаження в порожнині зростає до Q_1, а при $t \ge t_0$ зберігається сталим (атмосферний тиск $Q_0 < Q_1$ ($Q_0 < P_0 < Q_1$)).

© Ісрафілов Р., Савельєва К., 2014