

4. Исрафилов Р.М., Савельева Е.В. К определению ядер наследственного уравнения насыщенной жидкостью пористой среды (Био) // XIV конф. им. Н.Кравчука. – 2012. – Т.1, С.194-197.
5. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Г., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. – М.:Наука, 1970. – 335 с.
6. Рушницкий Я.Я., Исрафилов Р.М. Волны в полупространстве из насыщенной жидкостью пористого материала. I. // Прикл. механика. – 2001. – 37, №4. – С. 104–111.
7. Трофимчук А.Н. Динамика пористых упругих и упругопластических грунтов, насыщенных жидкостью: Дис. д-ра техн. наук: 05.15.09 // НАН Украины. – К., 1999 – 411 л. – Библиогр.: л. 363–400.
8. Хорошун Л.П., Исрафилов Р.М. Напряженное состояние пористого цилиндра, находящегося в жидкой среде, при периодическом нагружении // Прикл. механика. – 1980. –16, №6. – С.3–8.
9. Шапиро Я.М., Мазинг Г.Ю., Прудников Н.Е. Основы проектирования ракет на твердом топливе. – М.: Военное изд-во, 1968. – 230 с.
10. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Low frequency range // J. Acoust.Soc.Am. – 1956. – 28. – P.168 – 178.
11. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – 28. – P. 179 – 191.
12. Pecke C., Deresiewicz H. Thermal effects on wave propagation in liquid-filled porous media.-Acta Mechanica.- XVI,-№1-2. – 1973.

Надійшла до редколегії 10.04.14

**Р.Исрафилов**, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр., Е. Савельева, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр.  
Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

## РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАСЫЩЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ ИЛИ ГАЗОМ ПОРИСТОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ

*Рассмотрен процесс деформирования насыщенного жидкостью или газом пористого стеклянного полого цилиндра вследствие импульсной нагрузки на его внутренней поверхности. Учены сжимаемость жидкости или газа. В качестве теоретической модели среды использована классическая линейная схема Био.*

**R.Israfilov**, PhD, K. Savelieva, PhD

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

## SOLUTION OF DYNAMIC PROBLEMS FOR SATURATED LIQUID OR GAS POROUS EMPTY CYLINDER UNDER THE INFLUENCE OF PULSE LOADING

*Theoretically studied the deformation of saturated liquid or gas porous hollow glass cylinder as a result of the impulse load on its inner surface. Taken into account the compressibility of the fluid or gas. The study conducted in the framework of the Biot theory.*

УДК 539.595

О. Лимарченко, д-р техн. наук, Р. Ткаченко, асп.  
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

## КОЛИВАННЯ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ НА РУХОМІЙ ПЛАТФОРМІ

*Побудовано математичну модель сумісного руху жорсткого циліндричного резервуару, заповненого рідиною з вільною поверхнею, приєднаного пружиною до рухомої платформи, і досліджено нелінійні коливання системи під дією прикладеної до рухомої платформи гармонічної сили.*

### 1. Вступ

Задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в резервуарах при різних закріпленнях продиктовані потребами сучасної техніки. Резервуари з рідиною, які знаходяться на рухомій платформі, використовуються в інженерних конструкціях в машинобудуванні, літакобудуванні, ракетній техніці, засобах транспортування та збереження рідинних вантажів [1, 3, 4, 5]. Аналітичні розв'язки цих нестаціонарних нелінійних крайових задач до теперішнього часу не одержані, тому застосовуються наближені методи, які базуються переважно на варіаційних алгоритмах.

Метою роботи є дослідження нелінійних коливань сумісного руху жорсткого циліндричного резервуара, заповненого рідиною з вільною поверхнею, приєднаного пружиною до платформи під дією прикладеної до платформи гармонічної сили.

### 2. Об'єкт дослідження

Дослідимо горизонтальний рух абсолютно твердого циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, приєднаного пружиною до рухомої платформи. Податливі пружини з малими жорсткостями не розглядалися, щоб збереглися малі переміщення резервуару. Для порівняння розглянуто жорстке закріплення. В початковий момент часу система платформа, резервуар з рідиною, що має вільну поверхню, знаходиться у стані спокою. До платформи прикладено гармонічну силу  $F = A \cos(\omega t)$ , де  $\omega = 3.8; 4.0, 4.14; 4.3; 5.2$ ,  $A = 662$  Н (частоти обиралися в околі частоти основного резонансу по першій гармоніці коливань рідини). Амплітуда сили  $A$  підбиралась в залежності від частоти і параметрів жорсткого закріплення. Загальну схему такої механічної системи зображено на рис. 1.

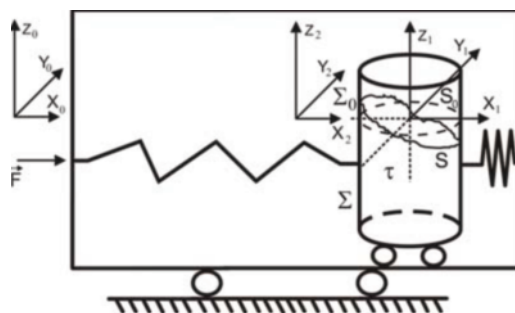


Рис.1. Схема механічної системи

Тут  $\tau$  – область, яку займає рідина в даний момент часу,  $S$  – збурена вільна поверхня рідини,  $S_0$  – незбурена вільна поверхня рідини,  $\Sigma_0$  і  $\Sigma$  – області контакту рідини зі стінками резервуару в незбуреному та збуреному станах.

## 2. Математична модель

Дослідження нелінійної динаміки сумісного руху резервуару з рідиною, що частково заповнює його, і рухомої платформи, до якої пружиною приєднано резервуар, здійснювалося на основі багатомодової моделі роботи [1]. Вважаємо, що рідина однорідна, нестислива, ідеальна. В початковий момент часу відсутні вихрові рухи рідини, впливом поверхневого натягу на коливання рідини нехтуємо. Рівняння вільної поверхні в збуреному стані  $z = \xi(x, y, t)$  невідоме. Аналіз здійснюємо на основі синтезу варіаційного формулювання задачі і розділення механічних рухів. Застосовуємо варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського і кінематичні граничні умови. На відміну від диференційної постановки динамічні граничні умови задовольняються варіаційним принципом як природні. До кінематичних умов відносяться: рівняння нерозривності рідини в циліндрі

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \text{де } \varphi = \varphi_0 + \dot{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{r},$$

умови неперетікання на межі контакту тіло-рідина і на вільній поверхні рідини

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\Sigma} = \vec{V}_0 \cdot \vec{n}, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = \vec{V}_0 \cdot \vec{n} + \frac{\partial\xi}{\partial t} / \sqrt{1 + (\vec{\nabla}\xi)^2},$$

де  $\vec{V}_0$  – вектор швидкості руху резервуара,  $\vec{r}$  – радіус-вектор точок області  $\tau$ ,  $\bar{\epsilon}$  – вектор поступального руху резервуара,  $\varphi$  – потенціал швидкості рідини. В початковий момент часу переміщення і швидкості всіх складових системи вважаються нульовими.

Динамічні граничні умови отримуємо із принципу Гамільтона–Остроградського як природні.

Кінетична і потенціальна енергії для кожного із елементів системи має вигляд:

$$T_l = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}\varphi + \dot{\bar{\epsilon}})^2 d\tau, \quad T_{res} = \frac{1}{2} M_{res} \dot{\bar{\epsilon}}^2, \quad T_{fr} = \frac{1}{2} M_{fr} (\dot{\bar{\epsilon}} + \dot{\bar{u}})^2, \quad (1)$$

$$\Pi_l = \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS, \quad \Pi_{res} = 0, \quad \Pi_f = F \epsilon_x, \quad \Pi_{spr} = \frac{1}{2} C \epsilon_x^2, \quad \Pi_{fr} = \frac{1}{2} c \bar{u}^2. \quad (2)$$

Тут  $T_l$  – кінетична енергія рідини,  $T_{res}$ ,  $T_{fr}$  – кінетична енергія резервуару і платформи,  $\Pi_l$ ,  $\Pi_{res}$ ,  $\Pi_{fr}$  – потенціальна енергія рідини, резервуару, платформи,  $\Pi_f$  – потенціальна енергія, обумовлена прикладеною силою (умовне представлення),  $\Pi_{spr}$  – потенціальна енергія, обумовлена пружними силами,  $\rho$  – густина рідини,  $M_{res}$  – маса резервуару,  $M_{fr}$  – маса платформи,  $C$  – коефіцієнт жорсткості пружини. На відміну від традиційних постановок такого типу задач тут використовується додаткова змінна  $u$ , яка характеризує деформацію пружини, що реалізує закріплення резервуару на платформі.

Враховуючи вирази (1), (2) знайдемо функцію Лагранжа для даної системи. Зауважимо, що представлення потенціалу роботи зовнішніх сил є умовним. Маємо:

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}\varphi + \dot{\bar{\epsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_p (\dot{\bar{\epsilon}})^2 + \frac{1}{2} M_{fr} (\dot{\bar{\epsilon}} + \dot{\bar{u}})^2 - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS - \frac{1}{2} C u^2 - \vec{F} \cdot (\bar{\epsilon} + \bar{u}).$$

Запишемо принцип Гамільтона–Остроградського

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Кінематичні граничні умови далі розглядаємо як механічні в'язі, які накладають обмеження на варіації в принципі Гамільтона–Остроградського

Таким чином для розв'язку нашої задачі побудовано математичну модель, яка включає варіаційний принцип, який природно задовольняє динамічні граничні умови як на стінці циліндра так і на вільній поверхні рідини, а задані кінематичні граничні умови є механічними в'язями, що накладають обмеження на варіації. Перед застосуванням варіаційного принципу необхідно спочатку виключити кінематичні граничні умови.

## 3. Побудова дискретної моделі системи

Нелінійну дискретну модель динаміки сумісного руху резервуара з рідиною, яка має вільну поверхню, приєднаного до рухомої платформи, побудовано на основі методу Канторовича, який застосовано до варіаційного формулювання задачі на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського [1]. Для величин  $\varphi$ ,  $\xi$  використовуємо розклад розв'язків по формах власних коливань лінійної задачі  $\psi_n$  про рух обмеженого об'єму рідини в рухомому резервуарі, які задовольняють кінематичним граничним умовам на твердих стінках і умовам на вільній поверхні рідини в лінеарізованому вигляді. Розв'язок нелінійної задачі шукаємо у вигляді

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\text{ch}\chi_n(z+H)}{\chi_n \text{sh}\chi_n H}, \quad \xi = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta), \quad (3)$$

де  $a_i$  – амплітудний параметр збудження форм власних коливань рідини [1]. Ці ж розклади використовуємо і для кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, які задовольняються наближено за допомогою метода Га-

льоркіна. Розклади (3) дають можливість перейти від континуальної системи до не вільної дискретної. Для ефективного застосування варіаційного принципу кінематичні граничні умови необхідно виключити з розв'язку варіаційної задачі. Виключивши кінематичні граничні умови [1], отримуємо функцію Лагранжа, яка відповідає вільній дискретній системі з кількістю незалежних параметрів, що дорівнює числу ступенів вільності системи (число форм вільних коливань). Так як безвихровий рух ідеальної, однорідної, нестисливої рідини повністю визначається рухом її меж, то збурення вільної поверхні рідини повністю характеризують рух рідини з вільною поверхнею. Амплітуди цих збурень  $a_n$  можна вяти якості незалежних змінних. Згідно [1] коефіцієнти  $b_n(t)$  залежать від параметрів  $a_n$  і їх похідних. Із варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського знаходимо систему рівнянь руху в амплітудних параметрах коливань рідини  $a_i$  і в параметрах поступального руху резервуару і платформи, яка є системою звичайних диференціальних рівнянь, лінійних відносно другої похідної від  $a_i$ ,  $\bar{\epsilon}$  і  $\bar{u}$ .

Модель сумісного руху системи, яка записується у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь, лінійних відносно других похідних невідомих величин, в загальному вигляді має форму

$$\sum_{n=1}^N p_{rn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t) \ddot{\epsilon}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn}(a_k, t) \ddot{u}_{n-N-3} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t), \quad r = \overline{1, N+7}.$$

Ця модель враховує взаємний вплив всіх компонент системи.

#### 4. Чисельні результати

Для чисельних розрахунків розглянуто модель, яка включає 12 форм коливань вільної поверхні рідини [2]. Проведено розрахунки вказаній для такої моделі та для моделі без пружини, де маса резервуару збільшена на масу, відповідну масі платформи попередньої моделі. Співвідношення мас рідини, резервуару, платформи в безрозмірному вигляді відповідно є  $M_{res} = 0,25 M_l$ ,  $M_{fr} = 5 M_l$ .

Покладемо: жорсткість пружини  $c=50000$  Н/м,  $100000$  Н/м,  $200000$  Н/м,  $500000$  Н/м,  $2000000$  Н/м. Суттєво податливі пружини не розглядаємо, щоб обмежити рух циліндра. На платформу діє сила  $F = A \cos(\omega t)$ , де в околі першого резонансу покладається  $\omega = 3.8; 4.0; 4.14; 4.3; 5.2$ ,  $A = 210$ Н,  $235$  Н,  $662$  Н. Рух розглядається на інтервалі до  $t = 125$  с (приблизно 80 періодів коливань по першій формі). Резонансну частоту системи визначаємо за формулою

$$\omega^2 = \frac{\chi}{R} g \operatorname{th} \left( \frac{\chi H}{R} \right)$$

У данному випадку  $\omega = 4,143368$ . Це частота коливань по першій гармоніці  $\psi_1$ . Відмітимо зауважимо що, в даному випадку масмо взаємодію трьох частот: зовнішньої сили, коливань резервуару на платформі і збурень вільної поверхні рідини. Розглянемо збурення вільної поверхні рідини на стінці циліндра в точках, рух яких співпадає з напрямком прикладеної сили  $\xi/R$ , в центрі циліндра (першої вісесиметричної форми, яка збурюється тільки на основі нелінійних механізмів)  $a_3/R$  та переміщення циліндра  $\epsilon/R$ . Радіус циліндра  $R=1$  м. Аналізується поведінка системи до резонансу, в околі резонансу і після резонансу. Чисельні розрахунки показують, що для даної системи притаманні основні властивості нелінійних коливань: модуляція, дрейф середнього значення, відсутність виходу на ustalений режим, горби хвиль вищі ніж впадини, що узгоджується з експериментами [5]. Для ілюстрації останньої властивості наведемо таблиці максимальних і мінімальних значення збурень вільної поверхні  $\xi/R$  на стінці циліндра в точках, які рухаються в напрямку прикладеної сили, з пружиною і без неї при різних значеннях жорсткості пружини і частот зовнішньої сили в дорезонансній і зарезонансній областях частот по першій гармоніці.

Таблиця 1. Максимальні значення збурень вільної поверхні  $\xi/R$

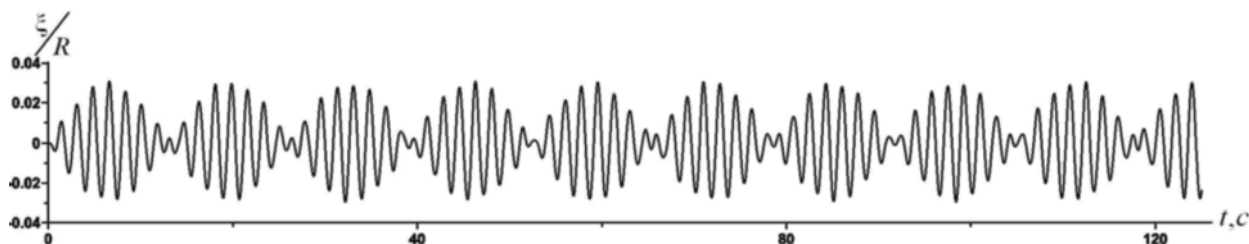
Max $\xi/R$ з пружиною	C=50 000 (F=662)	C=100 000 (F=210)	C=200 000 (F=662)	C=500 000 (F=535)	C=2 000 000 (F=662)
$\omega = 3.8$	0.03077	0.21508	0.05347	0.02764	0.02874
$\omega = 4.0$	0.02261	0.02991	0.29086	0.05305	0.04836
$\omega = 4.14$	0.01878	0.01609	0.19657	0.24094	0.10841
$\omega = 4.3$	0.01647	0.01071	0.06971	0.12856	0.26220
$\omega = 5.2$	0.01213	0.00411	0.01357	0.01005	0.01218
Max $\xi/R$ без пружини	C=50 000 (F=662)	C=100 000 (F=210)	C=200 000 (F=662)	C=500 000 (F=535)	C=2 000 000 (F=662)
$\omega = 3.8$	0.02745	0.00858	0.02745	0.02209	0.02745
$\omega = 4.0$	0.04531	0.01430	0.04531	0.03634	0.04531
$\omega = 4.14$	0.09068	0.02624	0.09067	0.07112	0.09068
$\omega = 4.3$	0.30541	0.18415	0.30542	0.27735	0.30541
$\omega = 5.2$	0.01209	0.00380	0.01209	0.00975	0.01209

Таблиця 2. Мінімальні значення збурень вільної поверхні  $\xi/R$ 

Max $\xi/R$ з пружиною	C=50 000 (F=662)	C=100 000 (F=210)	C=200 000 (F=662)	C=500 000 (F=535)	C=2 000 000 (F=662)
$\omega = 3.8$	-0.02952	-0.15784	-0.05116	-0.02664	-0.02787
$\omega = 4.0$	-0.02169	-0.02883	-0.19733	-0.05005	-0.04883
$\omega = 4.14$	-0.01850	-0.01606	-0.17304	-0.19977	-0.10064
$\omega = 4.3$	-0.01549	-0.01043	-0.06071	-0.09812	-0.15762
$\omega = 5.2$	-0.01184	-0.00419	-0.01368	-0.00996	-0.01194
Max $\xi/R$ без пружини	C=50 000 (F=662)	C=100 000 (F=210)	C=200 000 (F=662)	C=500 000 (F=535)	C=2 000 000 (F=662)
$\omega = 3.8$	-0.02642	-0.00851	-0.02642	-0.02145	-0.02642
$\omega = 4.0$	-0.04331	-0.01376	-0.04331	-0.03495	-0.04331
$\omega = 4.14$	-0.08377	-0.02551	-0.08381	-0.06624	-0.08377
$\omega = 4.3$	-0.16936	-0.13030	-0.16941	-0.16318	-0.16936
$\omega = 5.2$	-0.01171	-0.00374	-0.01171	-0.00949	-0.01171

Із таблиць 1 та 2 видно, що максимальні значення збурень вільної поверхні на стінці циліндра  $\xi/R$  при пружинному закріпленні досягаються в дорезонансній області. Вони змінюються зі зміною жорсткості пружини та частот зовнішньої сили. При менших жорсткостях вони досягаються в дорезонансній області, при  $C=500000$  Н/м – в області резонансу, а при більших жорсткостях – у зарезонансній області. При жорсткому закріпленні максимальні значення  $\xi/R$  маємо в зарезонансній області, найбільші з них є при  $\omega=4,3$ . Тільки в околі цієї точки пружина суттєво зменшує амплітуди збурень, причому відношення амплітуд  $\xi/R$  з пружинним закріпленням до відповідних амплітуд  $\xi/R$  з жорстким закріпленням зменшується зі збільшенням жорсткості пружини. В усіх випадках коливань горби більші ніж впадини, що узгоджується з даними експеримента [5].

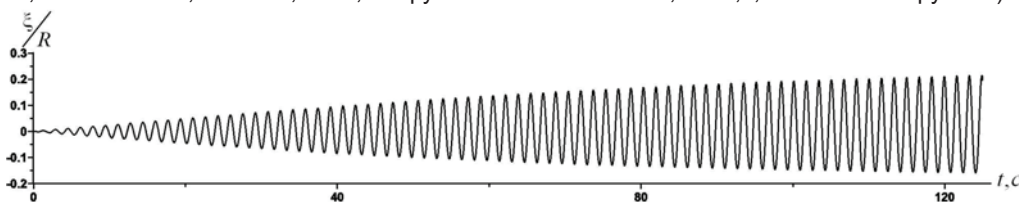
Характерною особливістю нелінійних коливань є їх модуляція. В системі модуляція коливань присутня практично у всіх випадках, але з різними періодами. Наведемо приклад модуляції без дрейфу середнього значення, що характерно для менших жорсткостей.

Рис.2. Значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини  $\xi/R$  при  $C=50000$  Н/м,  $A=662$  Н і  $\omega = 3.8$ .

На Рис 2 приведено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини  $\xi/R$  при жорсткості  $C=50000$  Н/м,  $\omega = 3.8$ ,  $A=662$ Н, де чітко видно модуляцію коливань без дрейфу середнього значення. Аналогічну картину маємо при відсутності пружини. При  $\omega=4,0$ ;  $4,14$  модуляція такого ж типу, але при наявності пружини зменшується період модуляції, більш виразні двогорбі піки, амплітуди коливань більші ніж при відсутності пружини, причому без пружини період модуляції суттєво збільшується, існують невеликі області, де коливання відбувається в околі нуля. В зарезонансній області маємо модуляцію з дрейфом середнього значення і з зсувом коливань в додатному напрямку.

Особливий випадок маємо при  $\omega=4,3$ , де амплітуда коливань вільної поверхні рідини при пружинному закріпленні суттєво менша ніж при жорсткому. Наприклад, при  $C=200000$  Н/м,  $A=662$  Н амплітуда  $\xi/R$  при відсутності пружини в 4,3 раз більша ніж при пружинному закріпленні. Це характерно для всіх жорсткостей. При  $C$  більших  $100000$  Н/м вплив пружини зменшується зі збільшенням жорсткості пружини і амплітуди зовнішньої сили. При  $C=2000000$  Н/м,  $A=662$ , амплітуда  $\xi/R$  при відсутності пружини в 1,6 раз більша ніж при пружинному закріпленні. При відсутності пружини модуляція відбувається з дрейфом середнього значення і зсувом його в додатний бік.

Вихід на усталений режим в загальному випадку в системі не спостерігається, що узгоджується з даними експерименту для нелінійних коливань [5, 6]. Але існують випадки, коли відбувається вихід на впорядкований режим ( $C=50000$  Н/м,  $\omega = 3.8$ ,  $A=210$  Н,  $c=200000$  Н/м,  $A=662$  Н,  $\omega=4,0$  з пружиною і  $c=100000$  Н/м,  $\omega=4,3$ ,  $A=210$  Н без пружини).

Рис.3. Значення амплітуд збурень вільної поверхні  $\xi/R$  при  $C=100000$  Н/м,  $\omega=3.8$ ,  $A=210$  Н з пружиною

На рис.3 зображено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини  $\xi/R$  при жорсткості  $C=100000$  Н/м,  $\omega=3,8$ ,  $A=210$  Н при пружинному закріпленні, що підтверджує вихід на впорядкований режим. Коли пружина відсутня, то маємо модуляцію без дрейфу середнього значення аналогічно тому, що зображено на рис.2. При  $\omega=4,3$  графік коливань з пружиною повторює графік коливань без пружини, а графік без пружини повторює графік з пружиною для випадку  $\omega=3,8$ .

Ще одною характерною рисою нелінійних коливань є вплив вищих гармонік.

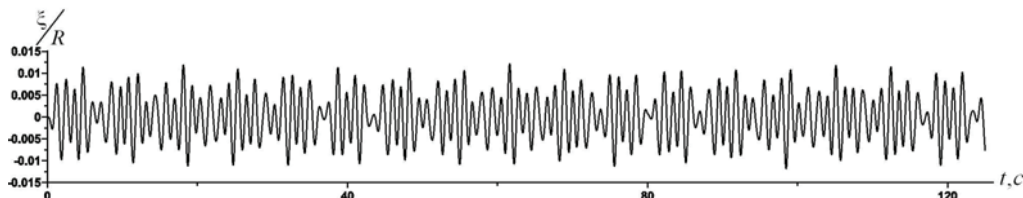


Рис.4. Значення амплітуд збурень вільної поверхні  $\xi/R$  при  $C=50000$  Н/м,  $A=662$  Н і  $\omega=5.2$  з пружиною

На рис.4 зображено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини  $\xi/R$  при  $C=50000$  Н/м,  $A=662$  Н і  $\omega=5.2$  з пружиною, що вказує на те, що вплив вищих гармонік найбільш суттєвий при  $\omega=5.2$  (в околі резонансної частоти по другій гармоніці  $\psi_2$ ) для всіх жорсткостей. При цьому яскраво виражена модуляція з 4 – 5 періодами першої форми з різними амплітудами. Присутні двогорбі піки.

Розглянемо збурення рідини в центрі циліндра  $a_3/R$  (першої вісесиметричної форми). Відомо, що ця форма коливань збурюється тільки на основі нелінійних механізмів [1]. Майже для всіх випадків проявляється модуляція з різними періодами. Різко виражено зміщення середнього значення коливань в додатному напрямку. Висота горба хвилі суттєво більша глибини впадин.

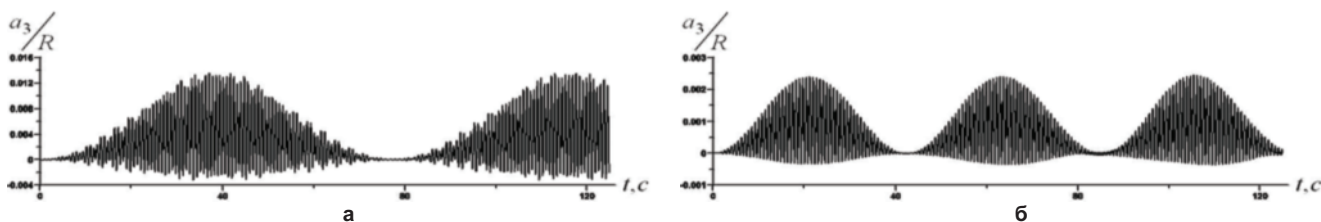


Рис. 5. Значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини в центрі циліндра  $a_3/R$  при  $C=200000$  Н/м,  $A=662$  Н,  $\omega=4,14$  (а) з пружиною б) без пружини)

На рис. 5 зображено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини в центрі циліндра  $a_3/R$  при жорсткості  $C=200000$  Н/м,  $A=662$  Н і  $\omega=4,14$  ( а – з пружиною; б – без пружини), звідки видно, що відбувається дрейф середнього значення, коливання практично відбуваються в додатній області. Амплітуда коливань незначна. При цьому горби більші від впадин, існують невеликі проміжки, де відбувається коливання в околі нуля. При інших значеннях частот до  $\omega=5.2$  маємо подібні картини, але з різним періодом модуляції. При  $\omega=5.2$  більш суттєво видно вплив більш високих гармонік спектру.

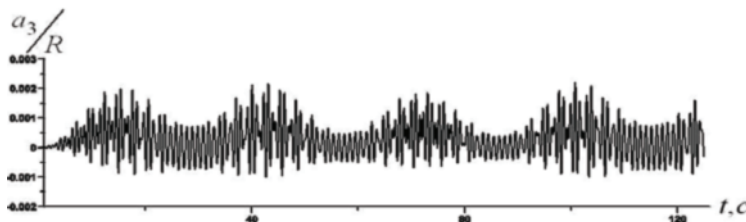


Рис.6. Амплітуди збурень вільної поверхні  $a_3/R$  при  $C=200000$  Н/м,  $\omega=4,3$ ,  $A=662$  Н з пружиною

На Рис.6 зображено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини  $a_3/R$  при  $C=200000$  Н/м,  $\omega=4,3$ ,  $A=662$  Н з пружиною. Видно зміщення в додатній бік, особливо суттєве зміщення буде при відсутності пружини.

Відмітимо випадки, при яких збурення в центрі циліндра подібні по модуляції до збурень на стінці циліндра, але з меншими амплітудами і різко зміщеними в додатній бік середніми значеннями: без пружини – при всіх жорсткостях на частоті  $\omega=4.3$ ; з пружиною –  $C=200000$ ,  $A=662$ ,  $\omega=4.0$ ;  $C=500000$ ,  $A=535$ ,  $\omega=4.14$ . Вихід на усталений режим не відбувається для обох типів закріплень.

Колівання в центрі циліндра при  $C=100000$ Н/м,  $A=210$ Н,  $\omega=3,8$  майже повторюють форму їх на стінці циліндра, але з меншою амплітудою.

Проаналізуємо тепер поступальний рух резервуара. В дорезонансних областях і при  $\omega=4.3$  без пружини для  $\varepsilon_x/R$  відбувається повторення характеру руху  $\xi/R$ , але з меншими амплітудами. При відсутності пружини рух зміщено в додатню область. Відмінним є рух в резонансному випадку  $\omega=4.14$ , де при жорсткому закріпленні коливання відбуваються повністю в додатній зоні з виходом на усталений режим при будь-якому значенні жорсткості пружини.



Рис. 7. Амплітуди коливань циліндра  $\varepsilon_x/R$  при  $C=500000$  Н/м,  $\omega=4.14$ ,  $A=662$  Н без пружини

На рис.7 зображено значення амплітуд коливань циліндра  $\varepsilon_x/R$  при жорсткому закріпленні  $C=500000$  Н/м,  $\omega=4.14$ ,  $A=662$  Н без пружини, що характеризує усталений режим. При наявності пружини маємо коливання зі слабкою модуляцією. Суттєво відрізняється рух при  $\omega=5.2$ , який відбувається практично в додатній області з малими амплітудами. Тобто, в основному, коливання резервуара в дорезонансній області по формі подібні до коливань вільної поверхні рідини на стінці циліндра. При частотах  $\omega=4.14$  і вище коливання циліндра по формі відрізняються від коливань вільної поверхні рідини. Маємо дрейф середнього значення, більшу частоту модуляції. В околі значень частоти  $\omega=4.3$  пружина ефективна і зменшує амплітуди коливань. В околі  $\omega=5.2$  найбільш суттєво видно вплив більш високих гармонік спектру, наявні двогорбі піки, при русі в центрі резервуара переважно спостерігається опускання рівня вільної поверхні. Відбувається дрейф середнього значення.

## 5. Висновки

Побудовано математичну модель нелінійних коливань сумісного руху жорсткого циліндричного резервуара з рідиною з вільною поверхнею, пружно закріпленого на рухомій платформі.

Показано, що пружинне закріплення зменшує амплітуди коливань вільної поверхні рідини на стінці і в центрі циліндра тільки в невеликому діапазоні частот зовнішньої сили в околі  $\omega=4.3$ . В інших випадках наявність пружини збільшує амплітуди коливань вільної поверхні.

При коливаннях вільної поверхні на стінці циліндра суттєво проявляються нелінійні ефекти: модуляція коливань, дрейф середнього значення, вплив вищих гармонік. Найбільший вплив вищих гармонік спостерігається в околі частоти  $\omega=5.2$  як при жорсткому так і при пружинному закріпленні. Наявність пружини підсилює ці ефекти, за виключенням невеликої зони в околі частоти  $\omega=4.3$ .

Вихід на усталений режим коливань вільної поверхні рідини протягом 80 періодів, в основному, не спостерігається. Але для випадків  $C=50000$  Н/м,  $\omega=3.8$ ,  $A=210$  Н;  $C=200000$  Н/м,  $A=662$  Н,  $\omega=4.0$  з пружиною і  $C=100000$  Н/м,  $\omega=4.3$ ,  $A=210$  Н без пружини відбувається вихід на упорядкований режим.

В дорезонансній зоні коливання резервуара на платформі по формі подібні до коливань вільної поверхні рідини на стінці циліндра. В зоні резонансу з пружиною маємо модуляцію з дрейфом середнього значення зі зсувом в додатному напрямку. А при жорсткому закріпленні циліндр коливається в усталеному режимі в додатній області. При  $\omega=4.3$  пружина зменшує амплітуди коливань циліндра.

### Список використаних джерел

1. Лимарченко О.С., Матараццо Дж., Ясинский В.В. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. – К.: ГНОЗІС, 2002. – 304 с.
2. Лимарченко О.С. Исследование эффективности дискретных моделей при решении задачи об импульсном возбуждении резервуара с жидкостью // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1985. – 4. – С.44-48.
3. Мишишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
4. Limarchenko O. Nonlinear properties for dynamic behavior of liquid with a free surface in a rigid moving tank // Int. J. Nonlinear Sci. and Numer. Simul. – 2000. – Vol. 1, № 1. – P. 105–118.
5. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / International Journal of Recent Trends in Engineering, 2009, Vol. 1, No. 6, P. 1-5.

Надійшла до редколегії 23.05.14

О. Лимарченко, д-р техн. наук, Р.Ткаченко, асп.  
КНУ імени Тараса Шевченка, Київ

## КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ

*В работе построена математическая модель совместного движения жесткого цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью со свободной поверхностью, присоединенного пружинной к подвижной платформе, и исследованы нелинейные колебания системы под действием приложенной к подвижной платформе гармонической силы.*

O. Limarchenko, Full Doctor (eng), R.Tkachenko, Post Graduate student  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

## OSCILLATIONS OF LIQUID FREE SURFACE IN CYLINDRICAL RESERVOIR ON MOVABLE PLATFORM

*Mathematical model of combined motion of rigid cylindrical reservoir, filled by liquid with a free surface, and fixed by spring to movable platform is considered. Nonlinear oscillations of the system under action of harmonic external force applied to the platform were studied.*