УДК 517.9

Ф. Асроров, канд. фіз.-мат. наук, наук. співроб.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

Досліджуються інтегральні множини систем диференціальних рівнянь, які зазнають імпульсного впливу у фіксовані моменти часу.

ВСТУП. Тематика роботи тісно пов'язана з двома напрямками теорії диференціальних рівнянь – теорією багаточастотних коливань [3, 5] та теорією диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями [4, 6, 8]. Вивчається питання про існування інтегральних множин для неоднорідних систем диференціальних рівнянь. Для відшукання інтегральної множини застосовується ітераційний процес, який полягає в тому, що множина шукається як границя послідовності множин, кожна з яких є інтегральною множиною системи рівнянь, а також досліджується поведінка розв'язків рівнянь в околі інтегральної множини.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Дослідимо питання про існування інтегральних множин нелінійних систем з імпульсним впливом. Розглянемо неоднорідну систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \\ &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi,x), \ t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi,x) \end{aligned} \tag{1}$$

де $t \in R$, $\varphi \in \Im_m$, $\Im_m$ – m-вимірний тор, $a(t,\varphi)$, $f(t,\varphi,x)$, $P(t,\varphi)$ – неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) стосовно t неперервні і 2π-періодичні стосовно φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, обмежені при всіх $t \in R$ векторні і матрична функції відповідно, функції $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпщиця стосовно $\varphi \in \Im_m$ рівномірно відносно $t \in R$. Функції $B_i(\varphi)$, $I_i(\varphi,x)$ – рівномірно обмежені по i, $\det(E + B_i) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \Im_m$. Припустимо також, що функції $f(t,\varphi,x)$, $I_i(\varphi,x)$ задовольняють умову Ліпшиця

$$\left\| f(t,\varphi',x') - f(t,\varphi'',x'')\right\| + \left\| I_i(\varphi',x') - I_i(\varphi'',x'')\right\| \leq L\left(\left\|\varphi' - \varphi''\right\| + \left\|x' - x''\right\|\right) \tag{2}$$

для всіх $t \in R, \varphi', \varphi'' \in \Im_m, x', x'' \in R^n$.

Крім того, вважаємо, що функції $f(t,\varphi,x)$, $I_i(\varphi,x)$ обмежені при $x = 0$, тобто

$$\sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\| f(t,\varphi,0)\right\| + \sup_{i\in Z} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\| I_i(\varphi,0)\right\| \leq M. \tag{3}$$

Встановимо умови існування інтегральних множин системи (1). Аналогічні системи рівнянь без імпульсних збурень та достатні умови існування інтегральних множин досліджено в [2], питання існування обмежених на всій осі розв'язків систем з імпульсними збуреннями досліджено в [1].

Розглянемо неавтономну систему диференціальних рівнянь, визначену на торі $\Im_m$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi). \tag{4}$$

Позначемо через $\varphi_t(\tau,\varphi)$ розв'язок цієї системи, який задовольняє початкову умову $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi$. В силу компактності фазового простору системи рівнянь (4) і припущень відносно функції $a(t,\varphi)$, кожен розв'язок $\varphi_t(\tau,\varphi)$, $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi$ існує при всіх $\tau \in R$ і $\varphi \in \Im_m$ і може бути продовжений по t на всю дійсну вісь R.

Розглянемо однорідну систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x, \ t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_t(\tau,\varphi))x \end{aligned} \tag{5}$$

залежну від $\tau \in R, \varphi \in \Im_m$ як від параметрів і позначимо через $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ матрицант цієї системи.

Лемма 1. Для будь-яких $t, s, \tau, \sigma \in R$ і $\varphi \in \Im_m$ справедливо $\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma,\varphi)) = \Omega_s^t(\sigma,\varphi)$.

Доведення. Так як $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ – матрицант системі рівнянь (5), то

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau,\varphi) = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\Omega_s^t(\tau,\varphi), \\ &\Delta\Omega_s^t(\tau,\varphi)\Big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))\Omega_s^{\tau_i}(\tau,\varphi)). \end{aligned}$$

Замінимо φ на $\varphi_\tau(\sigma,\varphi)$ і враховуючи властивість $\varphi_t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))=\varphi_t(\sigma,\varphi)$ розв'язків $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ системи (4), одержимо

$$\frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))=P(t,\varphi_t(\sigma,\varphi))\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$$
$$\Delta\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))\Big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi_{\tau_i}(\sigma,\varphi))\Omega_s^{\tau_i}(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)).$$

Остання рівність означає, що $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$ є фундаментальною матрицею системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=P(t,\varphi_t(\sigma,\varphi))x,\qquad \Delta x\Big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi_{\tau_i}(\sigma,\varphi)x,$$

яка при $t=s$ є одиничною матрицею. Але цю ж властивість має і матриця $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$. Тому ці матриці співпадають. Лему доведено.

Нехай $C(t,\varphi)$ – неперервна 2π-періодична по кожній компоненті $\varphi_\nu,\ \nu=\overline{1,m}$, кусково-неперервна по $t\in R$ з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$ матрична функція. Покладемо

$$G(t,s,\varphi)=\begin{cases}\Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(t,\varphi)), & s\le t,\\ -\Omega_s^t(t,\varphi)\left[E-C(s,\varphi_s(t,\varphi))\right], & s>t.\end{cases}$$

Назвемо $G(t,s,\varphi)$ функцією Гріна-Самойленко системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi),$$
$$\frac{dx}{dt}=P(t,\varphi)x,\quad t\ne\tau_i,$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi)x,$$

якщо

$$\left\|G(t,s,\varphi)\right\|\le Ke^{-\gamma|t-s|} \tag{6}$$

для всіх $t,s\in R$, $\varphi\in\mathfrak{I}_m$ і деяких $K\ge 1,\quad \gamma>0.$

Вкажемо найпростіші властивості функції Гріна-Самойленко $G(t,s,\varphi)$. З визначення цієї функції випливає, що $G(t,s,\varphi)$ неперервна при всіх $t,s\in R, t\ne s,\ \varphi\in\mathfrak{I}_m, 2\pi$-періодична стосовно $\varphi_\nu,\ \nu=\overline{1,m}$ причому $G(s+0,s,\varphi)-G(s-0,s,\varphi)=E.$

Беручи до уваги лему 1, маємо

$$G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))=\begin{cases}\Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(\tau,\varphi)), & s\le t,\\ -\Omega_s^t(t,\varphi)\left[E-C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))\right], & s>t.\end{cases} \tag{7}$$

При $s=\tau$ одержимо

$$G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))=\begin{cases}\Omega_\tau^t(t,\varphi)C(\tau,\varphi), & \tau\le t,\\ -\Omega_\tau^t(t,\varphi)\left[E-C(\tau,\varphi)\right], & \tau>t.\end{cases}$$

Як бачимо, матриця $G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))$ складається з розв'язків однорідної системи рівнянь (5), що розглядається при $t\ge\tau$ і $t<\tau$ відповідно.

Інтегральною множиною системи рівнянь (1) будемо називати таку множину $x=u(t,\varphi),\ t\in R,\ \varphi\in\mathfrak{I}_m,$ де $u(t,\varphi)$ – кусково-неперервна стосовно t з розривами першого роду в точках $t=\tau_i$, неперевна стосовно φ і 2π- періодична стосовно $\varphi_\nu,\ \nu=\overline{1,m}$ функція, яка для будь-якого розв'язку $\left(\varphi_t(\tau,\varphi),\ x_t(\tau,\varphi,x_0)\right)$ рівнянь (1), задовольняє при деякому $t=s$ рівняння $x_s(\tau,\varphi,x_0)=u(s,\varphi_s(\tau,\varphi))$ і виконується при всіх $t\in R$ співвідношення $x_t(\tau,\varphi,x_0)=u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)).$

Іншими словами, функція $x=u(t,\varphi)$ визначає інтегральну множину рівнянь (1), якщо для будь-якого розв'язку $\varphi_t(\tau,\varphi),\ \varphi_\tau(\tau,\varphi)=\varphi$ першого з рівнянь (1) справедливе співвідношення

$$\frac{dx_t(\tau,\varphi)}{dt}=\frac{d}{dt}u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))=P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))+f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))=P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x_t(\tau,\varphi)+f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$$

для всіх $\tau\in R,\varphi\in\mathfrak{I}_m$. При $t=\tau_j$ є $x_{\tau_j+0}(\tau,\varphi)-x_{\tau_j}(\tau,\varphi)=B_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))x_{\tau_j}(\tau,\varphi)+I_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))$ для всіх $\tau\in R,\ \varphi\in\mathfrak{I}_m$.

Для відшукання інтегральної множини $x = u(t,\varphi)$ рівнянь (1) застосуємо простий ітераційний процес, який полягає в тому, що інтегральна множина шукається як границя послідовності множин

$$u^{(0)}(t,\varphi), u^{(1)}(t,\varphi), \dots, u^{(j)}(t,\varphi), \dots \tag{8}$$

кожна з яких є інтегральною множиною системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \\ &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi,u^{(j-1)}(t,\varphi)),\ t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi,u^{(j-1)}(\tau_i,\varphi)). \end{aligned} \tag{9}$$

В якості початкової інтегральної множини беремо множину $x = 0,\ t \in R,\ \varphi \in \Im_m$.

Знайти інтегральну множину рівнянь (1) дозволяє наступне твердження.

Лемма 2. Якщо послідовність (8) інтегральних множин $x = u^{(j)}(t,\varphi),\quad t \in R,\quad \varphi \in \Im_m$ збігається

$$\lim_{j\to\infty} u^{(j)}(t,\varphi) = u(t,\varphi),$$

то гранична функція $u(t,\varphi)$ визначає інтегральну множину $x = u(t,\varphi),\ t \in R,\ \varphi \in \Im_m$, системи рівнянь (1).

Доведення леми 2 аналогічно доведенню леми 1 з [5].

Інтегральну множину $x = u^{(j+1)}(t,\varphi)$ рівнянь (9) шукатимемо, використовуючи функцію Гріна-Самойленка для задачі про обмежені на всій осі R розв'язки системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi),u^{(j-1)}(t,\varphi_t(\tau,\varphi))), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi),u^{(j)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))) \end{aligned} \tag{10}$$

де $\varphi_t(\tau,\varphi)$ – загальний розв'язок першого з рівнянь (1).

Визначимо функцію Гріна-Самойленко через $G(t,s,\varphi)$. Тоді сімейство функцій

$$x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi))f(s,\varphi_s(t,\varphi),0)))ds + \sum_{-\infty<\tau<\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi),0)$$

є сімейством обмежених при всіх $t \in R$ розв'язків системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi),0), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi),0), \end{aligned}$$

залежних від $\tau \in R, \varphi \in \Im_m$.

Це сімейство розв'язків покриває інтегральну множину:

$$x = u^{(1)}(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi),0)ds + \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi),0). \tag{11}$$

З урахуванням нерівності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t,s,\varphi)\|ds + \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} \|G(t,\tau_i+0,\varphi)\| \le K \tag{12}$$

функцію $u^{(1)}(t,\varphi)$ можно оцінити таким чином

$$\|u^{(1)}(t,\varphi)\| \le K\left[\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|f(t,\varphi,0)\| + \sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\|I_i(\varphi,0)\|\right] \tag{13}$$

Припустимо, що константа Ліпщиця L у нерівності (2) настільки мала, що,

$$2KL < 1 \tag{14}$$

і зафіксуємо додатнє число $h \ge 2KM,$ де M визначається згідно (3).

Побудувавши інтегральну множину $x = u^{(1)}(t,\varphi)$ можемо визначити $x = u^{(2)}(t,\varphi)$ як інтегральну множину системи рівнянь (10) при $j = 1$:

$$\begin{aligned} x = u^{(2)}(t,\varphi) = &\int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) \times f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(1)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ &+ \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} G(t,\tau_i+0,\ \varphi_t(\tau,\varphi)) \times I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(1)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))). \end{aligned} \tag{15}$$

З урахуванням нерівностей (12), (2) і (13) для функції $x = u^{(2)}(t,\varphi)$ отримуємо оцінку

$$\left\|u^{(2)}(t,\varphi)\right\| = \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))\| \times \Big[\left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(1)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi))) - f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\| + \left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\|\Big] ds +$$

$$+ \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} \|G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi))\| \times \left\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(1)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))) - I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi),0)\right\| +$$

$$+ \left\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi),0)\right\|\Big] \le KL \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| + KM,$$

яку остаточно можна записати у вигляді

$$\left\|u^{(2)}(t,\varphi)\right\| \le KL\cdot KM + KM \le 2KM \le h \tag{16}$$

Припустимо тепер, що нам вдалося побудувати інтегральну множину $x = u^{(\nu)}(t,\varphi), \quad \nu = \overline{1,j}$, і встановити для неї оцінки вигляду (16), тобто

$$\left\|u^{(\nu)}(t,\varphi)\right\| \le 2KM \le h, \quad \nu = \overline{1,j}\,, \tag{17}$$

для всіх $t \in R, \varphi \in \Im_m$.

При такому припущенні ми можемо побудувати інтегральну множину $x = u^{(j+1)}(t,\varphi)$ системи рівнянь (10). Для функції, що визначає цю множину справедливе зображення

$$\begin{aligned} x = u^{(j+1)}(t,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) \times f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ &+ \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi)) \times I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))), \end{aligned} \tag{18}$$

з якого отримуємо

$$\begin{aligned} \left\|u^{(j+1)}(t,\varphi)\right\| &\le \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t,s,\varphi)\| \times \Big[\left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi))) - f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\| + \\ &+ \left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\|\Big] ds + \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} \|G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi))\| \times \\ &\times \Big[\left\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))) - I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi),0)\right\| + \left\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\|\Big] \le \\ &\le KL \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\|u^{(j)}(t,\varphi)\right\| + KM. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що з огляду на нерівності (14) і (16) маємо

$$\left\|u^{(2)}(t,\varphi)\right\| \le KL\cdot KM + KM \le 2KM \le h \tag{19}$$

На підставі методу повної математичної індукції можемо стверджувати, що для будь-якого натурального числа j можна побудувати множину $x = u^{(j+1)}(t,\varphi), \ t \in R, \varphi \in \Im_m$, причому функція $u^{(j+1)}(t,\varphi)$, визначена співвідношенням (18), допускає оцінку (19).

Оцінимо тепер різницю функцій $u^{(j+1)}(t,\varphi)$ і $u^{(j)}(t,\varphi)$. Маємо

$$\begin{aligned} &\left\|u^{(j+1)}(t,\varphi) - u^{(j)}(t,\varphi)\right\| \le \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t,s,\varphi)\| \times \Big[\left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi))) - f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j-1)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi)))\right\| ds \\ &+ \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} \|G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi))\| \Big[\left\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))) - I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi), u^{(j-1)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)))\right\|\Big] \le \\ &\le KL \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\|u^{(j)}(t,\varphi) - u^{(j-1)}(t,\varphi)\right\| \end{aligned}$$

для всіх $t \in R, \varphi \in \Im_m$.

З цієї оцінки випливає, що для будь-якого натурального j і всіх $t \in R, \varphi \in \Im_m$ виконується нерівність

$$\left\|u^{(j+1)}(t,\varphi) - u^{(j)}(t,\varphi)\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^j KM \tag{20}$$

Цієї нерівності достатньо, щоб стверджувати, що послідовність функцій $u^{(j)}(t,\varphi),\ j=1,2,\dots$, рівномірна відносно $t\in R,\ \varphi\in\Im_m$ сходиться. Покладемо

$$u(t,\varphi)=\lim_{j\to\infty}u^{(j)}(t,\varphi). \qquad (21)$$

З властивостей дограничних функцій $u^{(j)}(t,\varphi)$ випливає, що гранична функція є кусково-неперервною стосовно t з розривами першого роду при $t=\tau_i$, 2π - періодична стосовно φ_ν, $\nu=\overline{1,m}$ і задовольняє оцінку

$$\|u(t,\varphi)\|\le 2KM\le h \qquad (22)$$

На підставі леми робимо висновок, що функція $u(t,\varphi)$ визначає інтегральну множину $x=u(t,\varphi),\ t\in R,\ \varphi\in\Im_m$ системи рівнянь (1).

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. Нехай система рівнянь (1) така, що виконується співвідношення (2) і при всіх $t\in R,\ \varphi\in\Im_m$, $\|x'\|\le h,\|x''\|\le h$ виконується нерівність (3). Припустимо, що відповідна їй система рівнянь

$$\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi),\\&\frac{dx}{dt}=P(t,\varphi)x,\ \ t\ne\tau_i,\\&\Delta x\Big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi)x\end{aligned} \qquad (23)$$

має функцію Гріна-Самойленко $G(t,s,\varphi)$, яка задовольняє нерівності (12). Тоді можна вказати таке додатнє число $L_0\le\frac{1}{2K}$, що якщо $h\ge 2KM$, то для будь-якого $L\le L_0$ система рівнянь (1) має інтегральну множину $x=u(t,\varphi),\ t\in R,\ \varphi\in\Im_m$ і при цьому функція $u(t,\varphi)$ задовольняє нерівності (22) і може бути обчислена як границя (21).

Розглянемо окремий випадок системи рівнянь (1).

Теорема 2. Нехай найбільше з власних чисел симетричної матриці $\tilde P(t,j)=\frac{1}{2}\left(P(t,j)+P^T(t,j)\right)$, задовольняє нерівності $\sup\limits_{t\in R}\max\limits_{\varphi\in\Im_m}\operatorname{Re}\lambda_i(P)\le\alpha$, а найбільше з власних чисел матриці $\sup\limits_{i\in Z}\max\limits_{\varphi\in\Im_m}\lambda_i(E+B_i(\varphi))(E+B_i^T(\varphi))\le\beta^2$. Тоді за умови $\alpha+p\ln\beta<0$ функція Гріна-Самойленка, яка задовольняє умові (12), існує і інтегральна множина рівнянь (1) у цьому випадку буде асимптотично стійкою.

Доведення. Справді, при виконанні нерівності $\alpha+p\ln\beta<0$ будь-який розв'язок (5) допускає оцінку вигляду

$$\|x(t,x_0)\|\le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|x_0\|,\ \ t\ge t_0,$$

де в якості γ можна взяти будь-яке додатнє число, яке задовольняє нерівності $0<\gamma<|\alpha+p\ln\beta|$. Отже, і матрицант $\Omega_\tau^t(t_0,\tau)$ рівнянь (1) можна оцінити таким же чином, тобто інтегральна множина рівнянь (1) є асимптотично стійкою.

ВИСНОВКИ. Встановлюються достатні умови збіжності послідовності інтегральних множин $x=u^{(j)}(t,\varphi),\ t\in R,\varphi\in\Im_m$, до граничної множини, що є інтегральною множиною системи рівнянь (1), а також досліджується поведінка розв'язку системи рівнянь (1) в околі інтегральної множини.

Список використаних джерел

1. Асроров Ф.А., Фекета П.В. Обмежені розв'язки лінійних неоднорідних систем з імпульсною дією // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2010. – Вип.20. – С. 4-12.
2. Асроров Ф.А., Перестюк Н.А. Функция Грина-Самойленко и существование интегральних множеств линейных расширений неавтономных систем // Укр. мат. журн. 1994. т. 46, №8. – С. 1067-1071.
3. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
4. Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – К.: ИМ НАН Украины, 2007.
5. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
7. Фекета П.В., Асроров Ф.А. Інтегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип.23. – С. 125-132.
8. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

Надійшла до редколегії 24.04.14

Ф. Асроров, канд. физ.-мат. наук, научн. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Исследуются интегральные множества систем дифференциальных уравнений, подвергающиеся импульсному воздействию в фиксированные моменты времени.

F. Asrorov, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

NONLINEAR SYSTEMS WITH IMPULSIVE ACTIONS

The paper deals with the properties of integral set of system of differential equations that undergo impulsive actions at fixed moments of time.

УДК 517.947

А. Громик, канд. тех. наук
Подільський державний аграрно-технічний університет, Кам'янець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В ОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПРОСТОРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Методом головних розв'язків (функцій впливу та функції Гріна) у поєднанні з методом інтегральних перетворень побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру гіперболічної крайової задачі математичної фізики в обмеженому кусково-однорідному просторовому середовищі.

ВСТУП

Теорія крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки та техніки [2, 5, 19, 25, 26].

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [7, 18, 20, 21, 24,].

Зокрема, вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для гіперболічних рівнянь одержано у працях Ж. Адамара [1], Л. Гордінга [6], Ю. Митропольського, Г. Хоми, М. Громяка [27], А. Самойленка, Б. Ткача [29], М. Смирнова [31], В. Чернятика [33] та ін.

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими.

Деякі класи подібних крайових і мішаних задач розглядалися в працях Б. Болі, Дж. Уейнера [3], В. Дейнеки, І. Сергієнка, В. Скопецького [9, 30], Ю. Коляно [11], Я. Підстригача, В. Ломакіна, Ю.М.Коляно [28], Г.Ф.Шиліна [34], в яких досліджувалися низка важливих математичних моделей механіки суцільного середовища, механіки деформівного твердого тіла, термомеханіки, тощо. При цьому використовувалися методи чисельного аналізу або ж метод зведення задач в кусково-однорідному середовищі до відповідних задач для диференціальних рівнянь з коефіцієнтами у вигляді узагальнених функцій (δ -функції та її похідних) в однорідному середовищі, точний розв'язок яких побудувати неможливо.

Окрім методу відокремлення змінних та його узагальнень [32, 10] одним з важливих і ефективних методів вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших лінійних крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод **гібридних інтегральних перетворень**, які породженні гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду але з різними наборами коефіцієнтів [8, 15-17, 23].

У цій статті ми пропонуємо побудований методом інтегральних перетворень розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики в обмеженому за аплікатною змінною кусково-однорідному просторовому середовищі, яке описується декартовою системою координат.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \left\{ (t,x,y,z);\, t>0;\, (x,y)\in\Omega_2 = \langle a;b\rangle \times \langle c;d\rangle;\ z\in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathrm{I}_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} \left(l_{j-1};l_j\right),\, l_0\ge 0;\, l_{j-1}<l_j;\, l_{n+1}=l<+\infty \right\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу [32]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j\left(t,x,y,z\right);\, z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{1}$$