УДК:517.9

О. Лопотко, канд. фіз.-мат. наук
Національний лісотехнічний університет України, Львів

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ЯДЕР, ЩО ПОВ'ЯЗАНІ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВИРАЗОМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Одержано інтегральне зображення додатно визначених ядер двох змінних зв'язаних з виразом другого порядку еліптичного типу. Ця теорема узагальнює теорему про інтегральне зображення додатно визначених ядер зв'язаних з оператором Лапласа.

Вступ

У статті [3] М.Г.Крейн застосував метод спрямованих функціоналів для одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер. Згодом [1] Ю.М. Березанский запропонував метод одержання інтегральних зображень за допомогою власних функцій диференціальних операторів. У [2, с.749] одержано інтегральне зображення додатно визначених (д.в.) ядер, що пов'язані з виразом Лапласа

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} . \tag{1}$$

У даній статті розглядається інтегральне зображення ядер, що пов'язані з еліптичним виразом

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2\rho\varphi_1\left(x_1 x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\rho\varphi_2\left(x_1 x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} . \tag{2}$$

Тут (φ_1, φ_2 – деякі аналітичні функції, ρ – дійсне число)

Теорема. Нехай $K(x, y) \in C\left(R^2 \times R^2\right)$ – д.в. ядро; $\chi_\xi^{(0)}(x;\lambda)$ і $\chi_\xi^{(1)}(x;\lambda)$ – функціонали, які визначені над простором Z (цілих функцій, зі рівномірною збіжністю на кожній обмеженій множині). Для того, щоб при будь-яких $x, y \in R^2$ мало місце зображення

$$K(x;y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y,\lambda)\right), d\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda) , \tag{3}$$

необхідно і достатньо, щоб $K(x, y)$ задовольняла (у сенсі узагальнених функцій Л.Шварца) рівняння

$$L_x K = L_y K , \tag{4}$$

де $\sum(\lambda) = \left\|\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}\right\|_{\alpha,\beta=0}^{1}$ – аналітична міра, яка визначається неоднозначно.

Доведення. Достатність. Нехай ядро $K(x, y) \in C\left(R^2 \times R^2\right)$ додатно визначено і для нього виконується (4). Тоді, згідно з теоремою 3.1 [2, с. 653], маємо інтегральне зображення у вигляді абсолютно збіжного інтеграла

$$K(x;y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\Omega_\lambda(x;y)\,d\rho(\lambda) , \tag{5}$$

де $d\rho(\lambda)$ – деяка міра, $\Omega_\lambda(x;y)$ – родина елементарних д.в. ядер. Зведемо зображення (5) до зображення (4). Для цього знайдемо формулу для розв'язку рівняння $Lu = \lambda u$. Нехай $u(x_1, x_2)$ – розв'язок рівняння на всій площині

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\rho\varphi_1\left(x_1 x_2\right)\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2\rho\varphi_2\left(x_1 x_2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda u . \tag{6}$$

Так, як кожний розв'язок еліптичного рівняння з аналітичними коефіцієнтами є аналітичним, то існує ціла по кожній з комплексних змінних $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ функція $u(z_1, z_2)$, яка при $z_1 = x_1;\ z_2 = x_2$ співпадає з $u(x_1, x_2)$ і задовольняє (6).

Позначимо $v(x_1; x_2) = u(x_1, ix_2)$. Тоді рівність (6) набуде такого вигляду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\rho\varphi_1\left(x_1 x_2\right)\frac{\partial v}{\partial x_1} + 2\rho\varphi_2\left(x_1 x_2\right)\frac{\partial v}{\partial x_2} = \lambda v . \tag{7}$$

Розв'яжемо рівняння (7) методом Рімана. Для цього спочатку знайдемо функцію Рімана [5, с.135 –136]. .

Нехай $v = v(z)$, де $z = \sqrt{\left(x_1 - \xi\right)^2 - \left(x_2 - \eta\right)^2}$. Тоді ліву частину рівняння (7) вигляд можна записати у вигляді

$$v''(z)\left(z_{x_1}^2 - z_{x_2}^2\right) + v'(z)\left(z_{x_1 x_1} - z_{x_2 x_2}\right) + 2\rho v'(z) z_{x_1}\varphi_1(z) + 2\rho v'(z) z_{x_2}\varphi_2(z) .$$

Враховуючи рівності $z_{x_1}^2 - z_{x_2}^2$ =1, $z_{x_1x_1} - z_{x_2x_2}$ =1 і позначивши $\varphi_1(z) = \dfrac{1}{x_1 - \xi}$, $\varphi_2 = \dfrac{1}{i(x_2 - \eta)}$ з (7) отримаємо

$$v''(z) + \frac{1+2\rho}{z} v'(z) = \lambda v. \tag{8}$$

Рівняння (8) є рівняння Ейлера, яке має розв'язки [4].

$$\frac{J_\rho\left(\sqrt{-\lambda} z\right)}{\left(\sqrt{-\lambda} z\right)^\rho}; \frac{Y_\rho\left(\sqrt{-\lambda} z\right)}{\left(\sqrt{-\lambda} z\right)^\rho},$$

де J_ρ, Y_ρ – функції Беселя I і II роду. Розглянемо тепер парний розв'язок рівняння(8), тобто $\dfrac{J_\rho\left(\sqrt{-\lambda} z\right)}{\left(\sqrt{-\lambda} z\right)^\rho}$,

Якщо тепер ввести позначення

$$J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda} z\right) = \frac{2^\rho \Gamma(\rho+1) J_\rho\left(\sqrt{-\lambda} z\right)}{\left(\sqrt{-\lambda} z\right)^\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+K+1) K!} (-\lambda)^K \left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

$$\left(J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda} z\right)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+K+1) K!} (-\lambda)^K 2k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1},$$

то одержимо розв'язок (8), який задовольняє умови $J_\rho^-(0) = 1, J_\rho^{-'}(0) = 0$.

Тоді розв'язок рівняння (8), можна записати через початкові умови наступним чином

$$\begin{aligned} v(x_1 x_2) = {} & \frac{1}{2}\left[v(x_1 - x_2, 0) + v(x_1 + x_2, 0)\right] - \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda} x_2 \int_{x_1 - x_2}^{x_1 + x_2} J_\rho^{-'}\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) v(\xi, 0)\, d\xi + \\ & + \frac{1}{2}\int_{x_1 - x_2}^{x_1 + x_2} J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) v'(\xi, 0)\, d\xi. \end{aligned} \tag{9}$$

Функцію $v(z_1, z_2)$ визначено для довільних z_1, z_2 і є цілою за кожною змінною, зокрема є цілою функція $v(z_1, 0)$ та її похідна $v'(z_1, 0)$. Звідси випливає, що кожний додаток у правій частині (9) можна продовжити за x_2 у комплексну площину z_2. Поклавши $z_2 = -ix_2$ і враховуючи, що $v(x_1; -ix_2) = u(x_1; x_2)$, одержуємо такий розв'язок рівняння (6)

$$\begin{aligned} u(x_1 x_2) = {} & \frac{1}{2}\left[u(x_1 - ix_2, 0) + u(x_1 + ix_2, 0)\right] - \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda} x_2 \int_{x_1 - ix_2}^{x_1 + ix_2} J_\rho^{-'}\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) u(\xi, 0)\, d\xi + \\ & + \frac{1}{2}\int_{x_1 - ix_2}^{x_1 + ix_2} J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) u'(\xi, 0)\, d\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

Тут інтегрування виконується по будь-якій спрямляючій дузі комплексної площини, яка з'єднує точки $x_1 + ix_2$ і $x_1 - ix_2$.

Запишемо формулу (10) у скороченому вигляді. Позначимо через *Z* – простір цілих функцій $\varphi(\xi)$ однієї комплексної змінної ξ з рівномірною збіжністю на кожній обмеженій множині. Тоді рівності

$$\begin{aligned} \left(X_\xi^{(0)}(x, \lambda); \varphi(\xi)\right) &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x_1 + ix_2) + \varphi(x_1 - ix_2)\right] - \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda} x_2 \int_{x_1 + ix_2}^{x_1 - ix_2} J_\rho^{-'}\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) \varphi(\xi)\, d\xi \\ \left(X_\xi^{(1)}(x, \lambda); \varphi(\xi)\right) &= \frac{1}{2}\int_{x_1 + ix_2}^{x_1 - ix_2} J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) \varphi(\xi)\, d\xi; \quad \left(x = \left(x_1, x_2 \in R^2; \varphi \in Z\right)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

визначають лінійні неперервні функціонали $\chi^{(0)}(x; \lambda)$ і $\chi^{(1)}(x; \lambda)$ у просторі *Z*. Використовуючи (11), формулу (10) вигляду можна записати у вигляді

$$u(x) = u(x_1; x_2) = \left(\chi_\xi^{(0)}(x; \lambda); u(\xi; 0)\right) + \left(\chi_\xi^{(1)}(x; \lambda); u'_\eta\ (\xi; 0)\right),\ \left(x = (x_1; x_2) \in E_2\right). \tag{12}$$

Функції $\chi^{(0)}(x; \lambda)$ і $\chi^{(1)}(x; \lambda)$ утворюють у деякому сенсі фундаментальну систему розв'язків (6). За допомогою цих розв'язків запишемо елементарні ядра. Для цього введемо простір $Z \otimes Z$, який складається із функцій

$\varphi(\xi;\eta)$ двох комплексних змінних ξ,η, які є цілими за кожною змінній. Збіжність в $Z\otimes Z$ є рівномірною у кожній обмеженій у просторі $((\xi;\eta)\in C_2)$ множині.

Далі побудуємо $\chi_\xi^{(\alpha)}\otimes\chi_\eta^{(1)}$, де $\alpha,\beta=0,1$. Нехай $\alpha=0;\ \beta=1$. Тоді маємо

$$\left(X_\xi^{(0)}(x,\lambda)\otimes X_\eta^{(1)}(y,\lambda);\right)=\frac{1}{4}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}\left[\varphi(x_1+ix_2,\eta)+\varphi(x_1-ix_2,\eta)\right]J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(y_1-\eta)^2+y_2^2}\right)d\eta-$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{-\lambda}x_2\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}J_\rho^{-\prime}\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(y_1-\eta)^2+y_2^2}\right)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\,,$$

$$\left(x=(x_1,x_2),\,y=(y_1,y_2)\in R^2\right).$$

Нехай тепер $\Omega_\lambda(x,y)$ – множина елементарних д.в. ядер з (5) для ядра $K(x,y)$. За змінними x, y функція $\Omega_\lambda(x,y)$ задовольняє рівняння (6), тому ця функція є цілою за x_1,y_1,x_2,y_2. Тоді для всіх ξ маємо, що $\Omega_\lambda((\xi,0),y)$ і $\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}((\xi;0),y)$ також задовольняють за змінною y рівняння (6), а тому до ядра $\Omega_\lambda(x,y)$ можна застосувати спочатку перетворення (12) (за x), а потім за y. У результаті одержимо

$$\Omega_\lambda(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda),\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))\right),\tag{13}$$

де

$$\Omega_\lambda^{(0,0)}((\xi,0),(\eta,0))=\Omega_\lambda((\xi,0),(\eta,0)),\quad \Omega_\lambda^{(1,0)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}((\xi,0),(\eta,0)),$$

$$\Omega_\lambda^{(0,1)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial y_2}((\xi,0),(\eta,0)).\quad \Omega_\lambda^{(1,1)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial^2\Omega_\lambda}{\partial x_2\partial y_2}((\xi,0),(\eta,0)).$$

Підставивши (13) у (5) одержимо (3), якщо покласти $\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta)=\int\limits_\Delta\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))\,d\rho(\lambda)$.

Інтеграл (3) розуміємо, як $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum\limits_{\alpha,\beta}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x,\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda),\,d\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)\right)=\lim\sum\limits_{N=1}^{N}\sum\limits_{\alpha,\beta}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x,\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(\lambda_v),\,\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta_v)\right)$, де $\Delta_1,...\Delta_N$ – розбиття осі $(-\infty,+\infty)$ на проміжку $\lambda_v\in\Delta_v$, а границя береться по продовженню розбиття. Якщо $\chi_\xi^{(\alpha)}(\lambda)$ достатньо малі, а λ – достатньо велике, то ця границя існує і не залежить від способу розбиття і вибору точок $\lambda_v\in\Delta_v$.

Тепер доведемо аналітичність міри $\sum(\Delta)$. Для цього розглянемо матрицю $\sum(\lambda)=\left\|\sigma_{\xi,n}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)\right\|_{\alpha,\beta=0}^{1}$, елементам якої є функції $\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$.Ці функції є цілими за ξ,η і мають обмежену варіацію за λ. Покажемо, що ця матриця є аналітичною мірою, тобто, $\sum(\Delta)=\sum(b)-\sum(a)$ $(\Delta=(a,b))$ додатно визначеною у такому сенсі: для довільних функціоналів $t_\xi^{(0)},\,t_\xi^{(1)}$, які визначені над простором Z, виконується нерівність

$$\sum_{\alpha,\beta}^{1}\left(\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta),\,t_\xi^{(\alpha)}\otimes t_\eta^{(\beta)}\right)>0\,.$$

Для цього спочатку виберемо пару точок $x_\alpha\in R^1$ $(\alpha=0,1)$ таким чином щоб матриця $\left\|\chi_\xi^\alpha(x_\alpha)\right\|_{\alpha=0}^{1}$ була невираженою, а кожний функціонал представимо в вигляді $t_\xi^{(\alpha)}=\sum\limits_{k=0}^{1}C_k\chi_\xi^{(\alpha)}(x_k;\lambda)(\alpha=0,1)$. Тоді

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta),\,t_\xi^{(\alpha)}\otimes t_\eta^{(\beta)}\right)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\int\limits_\Delta\left(\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))\cdot t_\xi^{(\alpha)}\otimes t_\eta^{(\beta)}\right)d\rho(\lambda)=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\int\limits_\Delta\left(\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}C_j\overline{C}_k\chi_\xi^{(\alpha)}(x_j;\lambda)\otimes\chi_\xi^{(\beta)}(x_\eta;\lambda)\right)\cdot d\rho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_\Delta\sum_{j,k}^{1}\Omega_\lambda\left((\xi,x_j),(\eta,\chi_k)\right)C_j\overline{C}_k\,d\rho(\lambda)\ge 0.$$

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай маємо інтегральне зображення (3). Потрібно довести рівність (4). Так, як ядро $\Omega_\lambda(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda)\right)$ сумовано за $(x,y,\lambda)\in\Im\times\Im\times R^2$ ($\Im\in R^2$ і обмежена) відносно міри $dxdyd\rho(\lambda)$, тому отримаємо:

$$\left\langle L^+u,v\right\rangle=\int_\Im\int_\Im\left\{\int_{R^2}\Omega_\lambda(x;y)d\rho(\lambda)\right\}\left(L^+u\right)(y)\overline{v(x)}dxdy=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\Omega_\lambda(x;y)\left(L^+u\right)(y)\overline{v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)=$$

$$=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\left(\overline{L_y^+}\Omega_\lambda\right)(x;y)u(y)\overline{v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\left(L_x^+\Omega_\lambda\right)(x;y)u(y)\overline{v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)= \tag{14}$$

$$=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\Omega_\lambda(x;y)u(y)\overline{L^+v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)=\left\langle u;L^+v\right\rangle$$

Тут L^+ – звуження на $u,v\in C_0^\infty(\Im)$.

Із (14) випливає (4).

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо у (2) p=0 одержимо зображення (6.14) із [2, с.752]

Висновки

Доведена теорема стверджує що зображення (3.7) з [2, с. 652] для додатно визначеного ядра через сукупність додатно визначених елементарних ядер $\Omega_\lambda(x,y)$ можна одержати не тільки для рівняння

$\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}=\lambda u$ але і для більш складного рівняння $\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+2\rho\varphi_1(x_1x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+2\rho\varphi_2(x_1x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}=\lambda u$,

де (φ_1,φ_2 – деякі аналітичні функції, ρ – дійсне число).

Список використаних джерел

1. Березанский Ю.М. Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям диференцциальних операторов // Докл. АН. СССР. – 1956. – 108, №3. – С.893–896.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 798 с.
3. Крейн М.Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на елементарные произведения // Докл. АН. СССР. – 1946. – 53, №1. – С.3–6.
4. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М: Из-во "Физ.-мат.литература", 2001 – 300 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953. – 724 с.

Надійшла до редколегії 10.03.14

О. Лопотко, канд. физ.-мат. наук
Национальний лесотехнический университет Украини, Львов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЯДЕР, СВЯЗАННЫХ С ВЫРАЖЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЕЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Получено интегральное представление положительно определенных ядер двух переменных связанных с выражением второго порядка елиптического типа. Эта теорема обобщает теорему об интегральном представлении положительно определенных ядер связанных с оператором Лапласа.

O. Lopotko, PhD
National Forestry and Wood-Technology University of Ukraine, Lviv

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF POSITIVE DEFINITE KERNELS ASSOCIATED WITH THE EXPRESSION OF SECOND ORDER OF ELLIPTIC TYPE

An integral representation of positive definite kernels of the two variables associated with the expression of second order of elliptic type. The result is generalization of the theorem about integral representation of positively definite kernels associated with operator Laplace.

УДК 512.643.8

Р. Динис, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
О. Тилищак, канд. фіз.-мат. наук, доц.
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

ПРО ЗВІДНІСТЬ ДЕЯКИХ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Показано звідність добутку підстановочної матриці циклу парної довжини n та діагональної матриці $\mathrm{diag}(1,...,1,t,1,...,1,t)$ порядку n над комутативним кільцем K з одиницею, де $t\in K$.

ВСТУП

Проблема класифікації всіх квадратних матриць, з точністю до подібності, яка повністю розв'язана над полем (див., наприклад, [4]), при переході до довільного комутативного кільця з одиницею сильно ускладнюється. В більшості випадків, як над кільцем класів лишків [1], вона включає в себе класичну нерозв'язну задачу про "пару мат-