Оскільки $\det C = \pm 1$, то $C \in GL(n, Z[\lambda])$. З формул (4) випливає рівність

$$C^{-1}MC = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де $A = M(1,...,1,t)$ і B – квадратні матриці порядку m .

Лему 2 доведено.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Нехай K – комутативне кільце з одиницею,* $t \in K$ *,* $n = 2m$ *– натуральне число, тоді матриця*

$$M(1,...,1,t,1,...,1,t),$$

подібна матриці вигляду

$$N = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

над кільцем K *, де* A *,* B *– квадратна матриця порядку m і є, зокрема, звідною.*

Доведення випливає з лем 1, 2 та існування гомоморфізму $f : Z[\lambda] \to K$ такого, що $f(1) = 1$, $f(\lambda) = t$. Теорему 1 доведено.

ВИСНОВКИ

Показано, що матриця $M(t,1,...,1,t,1,...,1,t)$ довільного парного порядку $n > 1$ над комутативним кільцем *K* з одиницею звідна для довільного $t \in K$.

Список використаних джерел

1. Бондаренко В.М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – Т.96, № 1. – С. 63–74.
2. Гудивок П.М., Тилищак О.А. Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 78–83.
3. Динис Р.Ф., Тилищак О.А. Про звідність матриць деякого вигляду над комутативними локальними кільцями головних ідеалів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23 №1. – С. 57–62.
4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
5. Шевченко В.Н. Сидоров С.В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
6. Avni N., Onn U., Prasad A. , Vaserstein L., Similarity classes of 3X3 matrices over a local principal ideal ring, Comm. Algebra 37 2009. – Vol.37, N8 –, pp. 2601–2615.
7. Pizarro A. . Similarity Classes of 3X3 Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – Vol. 54. – P. 29–51.
8. Prasad A., Singla P., and Spallone S. Similarity of matrices over local rings of length two. (2012). http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf.

Надійшла до редколегії 27.11.13

Р. Динис, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев,
О. Тилищак, канд.. физ.-мат. наук
ДВНЗ «Ужгородский национальний университет», Ужгород

О ПРИВОДИМОСТЕ НЕКОТОРЫХ МОНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Показано, что произведения подстановочной матрицы цикла четной длины и диагональной матрицы $\mathrm{diag}(1,...,1,t,1,...,1,t)$ ***порядка*** n ***над коммутативным кольцом*** K ***с единицей, где*** $t \in K$ ***, является приводимым.***

R. Dinis, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv,
A. Tylyshchak, PhD
State higher educational institution, "Uzhhorod National University", Uzhhorod

ON REDUCIBILITY OF SOME MONOMIAL MATRICES OVER COMMUTATIVE RINGS

There has been shown the reducibility of the product of the permutation matrix of the cycle of even length n ***and the diagonal matrix*** $\mathrm{diag}(1,...,1,t,1,...,1,t)$ ***of order*** n ***over a commutative ring*** K ***with identity, where*** $t \in K$ ***.***

УДК 519.21

А. Савченко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ВИПРАВЛЕНА *T(q)*-ВІРОГІДНА ОЦІНКА У КВАДРАТИЧНІЙ СТРУКТУРНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

Вивчається квадратична структурна модель регресії з похибками вимірювання. Дисперсія похибок у відгуку вважається невідомою. Побудовано виправлену T(q)-вірогідну оцінку коефіцієнтів регресії. Отримано достатню умову строгої консистентності оцінки в ситуації, коли q залежить від обсягу вибірки і прямує до 1 при необмеженому зростанні обсягу вибірки.

1. Вступ

У статті вивчається квадратична модель регресії з похибками у змінних. За невідомого розподілу прихованої змінної виправлена (CS, Corrected Score) оціночна процедура дає консистентну оцінку [8], [9]. Але відомо, що CS оцінка має нестійку поведінку при малих і середніх обсягах вибірки. У [3], [7] побудовано модифікацію CS оцінки, що стійкіша для малої й середньої вибірок і асимптотично еквівалентна CS оцінці, коли обсяг вибірки прямує до нескінченності. У даній статті розвинуто іншу ідею модифікувати CS оцінку для малих і середніх обсягів вибірки.

Існує низка статей, присвячених *T(q)*-вірогідній оцінці за відсутності похибок у змінних. У [5], [6] вивчаються властивості оцінки шляхом асимптотичного аналізу і комп'ютерних моделювань. Показано, що для малих і середніх обсягів вибірки вибором q можна змінювати зсув оцінки заради точності, що суттєво може зменшити середньоквадратичне відхилення. Встановлено необхідну і достатню умову асимптотичної нормальності й ефективності оцінки, якщо q прямує до 1, та обсяг вибірки великий.

Метою цієї статті є розгляд виправленої *T(q)*-вірогідної оцінки за наявності похибок вимірювання і невідомої дисперсії похибок у відгуку (ця дисперсія відповідає параметру розсіяння відповідної експоненційної сім'ї щільностей відгуку). Раніше розглядався випадок, коли параметр розсіяння відомий. Зокрема, у статті [1] представлено виправлену *T(q)*-вірогідну оцінку у випадку показникової структурної моделі регресії з похибками вимірювання.

Позначимо через **E** математичне сподівання випадкових величин, векторів або матриць, **D** означає дисперсію. Математичне сподівання $\mathbf{E}_b f$ береться за умови, що b – істинне значення параметра β. Верхній індекс T означає транспонування. В скінченновимірному просторі розглядається норма, що дорівнює сумі модулів координат.

Стаття влаштована наступним чином. У розділі 2 описується загальна модель спостережень. Розділ 3 представляє виправлену *T(q)*-вірогідну оцінку параметрів регресії. Розділ 4 містить висновки.

2. Модель спостережень

Квадратична структурна модель з похибками вимірювання має вигляд

$$y=\beta_0+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2+\varepsilon,\ \ x=\xi+\delta,$$

де $\xi,\ \varepsilon,\ \delta$ – незалежні випадкові величини, $\delta\sim N\left(0,\sigma_\delta^2\right)$, $\varepsilon\sim N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$, дисперсія σ_δ^2 вважається відомою, σ_ε^2 – невідомою.

Припустимо, що $\sigma_\varepsilon^2\in[\varphi_1;\varphi_2]$, де $\varphi_1>0,\ \ \varphi_2>0$ – відомі, ξ – випадковий скалярний регресор з невідомим розподілом, причому $|\xi|\le const$ майже напевно, $\beta=(\beta_0;\beta_1;\beta_2)^T$ – невипадковий ненульовий вектор параметрів регресії, який треба оцінити. Крім того, оцінюється і σ_ε^2, тобто загалом потрібно оцінити $\theta=\left(\beta^T;\sigma_\varepsilon^2\right)^T$.

Спостерігаються незалежні копії моделі $z_i=\left(y_i,x_i\right),\ i=\overline{1,n}$. Позначимо

$$\rho=\left(1;\xi;\xi^2\right)^T,\ \ f(y,\xi,\beta)=f\left(y/\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}}\exp\left(-\frac{\left(y-\rho^T\beta\right)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right).$$

Справедливі формули $\mathbf{E}\left(y/\xi\right)=\rho^T\beta=\beta_0+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2$, $\mathbf{D}\left(y/\xi\right)=\sigma_\varepsilon^2$, де параметри регресії вважаються істинними.

Для $u>0,\ q>0$ введемо перетворення Бокса – Кокса

$$T(q,u)=\begin{cases}\dfrac{u^{1-q}-1}{1-q},q\ne 1,\\ \ln u,q=1.\end{cases}$$

T(q)-вірогідна оціночна функція визначається як

$$S^{(q)}(y,\xi,\beta)=2\sigma_\varepsilon^2\sqrt{\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{1-q}}\,\frac{\partial}{\partial\beta}T(q,f(y,\xi,\beta))=2\sigma_\varepsilon^2\sqrt{\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{1-q}}\,f^{-q}(y,\xi,\beta)\frac{\partial f(y,\xi,\beta)}{\partial\beta}=$$

$$=2\sigma_\varepsilon^2\sqrt{\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{1-q}}\,f^{1-q}(y,\xi,\beta)(y-\rho^T\beta)\rho.$$

Для $q=1$ функція $S^{(q)}$ співпадає з оціночною функцією методу максимальної вірогідності. За відсутності похибки вимірювання $S^{(q)}$ розглядалась у [5], [6]. Якщо параметр $q=q_n$ залежить від n та $\sqrt{n}\left(q_n-1\right)\to 0$ при $n\to\infty$, то *T(q)*-вірогідна оціночна функція дає консистентну оцінку β з тою ж ефективністю, що і оцінка максимальної вірогідності (ОМВ), але з кращою поведінкою для малих вибірок. За відсутності похибки вимірювання ОМВ, позначена як $\widehat{\beta}_n$, задається рівністю

$$\widehat{\beta}_n=\arg\max\nolimits_{\beta\in\Theta_1}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(f(y_i,\xi_i,\beta)\right),$$

де параметрична множина $\Theta_1\subset R^3$.

3. Виправлена *T(q)*-вірогідна оцінка та її консистентність

Розкладемо оціночну функцію $S^{(q)}(y,\xi,\beta)$ в ряд за степенями $(1-q)$:

$$S^{(q)}(y,\xi,\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-q)^m}{m!}\left(-\frac{\left(y-\rho^T\beta\right)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)^m(y-\rho^T\beta)\rho=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-q)^m(-1)^m}{m!\left(2\sigma_\varepsilon^2\right)^m}\left(y-\rho^T\beta\right)^{2m+1}\rho\ .$$

Нижче буде вказано умови, що гарантують збіжність цього степеневого ряду.

Нехай $\beta=\left(\beta_0;\beta_1;\beta_2\right)^T$, $b=\left(b_0;b_1;b_2\right)^T$ є істинним значенням β, φ_0 є істинним значенням σ_ε^2, Θ – компактна множина в R^4, $\theta=\left(b^T;\varphi_0\right)^T$, $s=\left(\beta^T;\sigma_\varepsilon^2\right)^T$, $\theta,s\in\Theta$. Адаптуємо оціночну функцію $S^{(q)}$ до похибок вимірювання, побудувавши виправлену оціночну функцію $S_C^{(q)}$, для якої майже напевно для всіх β виконується рівність

$$\mathbf{E}_b\left(S_C^{(q)}(y,x,\beta)\big/y,\xi\right)=S^{(q)}(y,\xi,\beta). \tag{1}$$

Ця задача при $k\ge 0$ зводиться до розв'язання базових рівнянь

$$\mathbf{E}\left(f_k^{(q)}(x,\beta)\big/\xi\right)=\left(\rho^T\beta\right)^k\rho\,, \tag{2}$$

звідки можна знайти функції $f_k^{(q)}(x,\beta)$.

Кожне з рівнянь (2) має поліноміальний розв'язок, тому розв'язок рівняння (1) зображується у вигляді

$$S_C^{(q)}(y,x,\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-q)^m(-1)^{m+1}}{m!\left(2\sigma_\varepsilon^2\right)^m}\sum_{k=0}^{2m+1}C_{2m+1}^k\left(-1\right)^k y^k f_{2m+1-k}^{(q)}(x,\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}u_m(y,x;\beta,q) \tag{3}$$

за умови, що $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\mathbf{E}\left(\|u_m\|\big/y,\xi\right)<\infty$ майже напевно.

З (2) знаходимо $\mathbf{E}\left(f_k^{(q)}(x,\beta)\big/\xi\right)=\sum\limits_{m_1+m_2+m_3=k}\beta_0^{m_1}\beta_1^{m_2}\beta_2^{m_3}\xi^{m_2+2m_3}\rho$.

Відомо, що розв'язком рівняння $\mathbf{E}\left(t_j(\xi+\delta)\big/\xi\right)=\xi^j$, $j\ge 0$, є функція $t_j(x)=\sigma_\delta^j H_j\left(\frac{x}{\sigma_\delta}\right)$, $j\ge 0$, де $H_j(z)=\left(-1\right)^j\exp\left(\frac{z^2}{2}\right)\left(\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right)^{(j)}$, $j\ge 0$, – многочлени Ерміта [4, с. 169]. Тоді вектор-функція

$$f_k^{(q)}(x,\beta)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{m_1+m_2+m_3=k}\beta_0^{m_1}\beta_1^{m_2}\beta_2^{m_3}\sigma_\delta^{m_2+2m_3}H_{m_2+2m_3}\left(\frac{x}{\sigma_\delta}\right)\\ \sum\limits_{m_1+m_2+m_3=k}\beta_0^{m_1}\beta_1^{m_2}\beta_2^{m_3}\sigma_\delta^{m_2+2m_3+1}H_{m_2+2m_3+1}\left(\frac{x}{\sigma_\delta}\right)\\ \sum\limits_{m_1+m_2+m_3=k}\beta_0^{m_1}\beta_1^{m_2}\beta_2^{m_3}\sigma_\delta^{m_2+2m_3+2}H_{m_2+2m_3+2}\left(\frac{x}{\sigma_\delta}\right)\end{pmatrix}$$

складається з многочленів степеня $2k$, $2k+1$ та $2k+2$ відповідно. Диференціюванням $\mathbf{E}\left(y^{n-1}\big/\xi\right)$ за ξ знаходимо $\mathbf{E}\left(y^n\big/\xi\right)$. Методом математичної індукції можна довести, що це поліном степеня $2n$ відносно ξ. Зауважимо також, що степеневий ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}v_m$ має ненульовий радіус збіжності, якщо для деякої сталої $C>0$. виконується умова $\left|v_m\right|\le C^m\cdot m!$

Для того, щоб оцінити σ_ε^2, запишемо ще одну оціночну функцію:

$$S_C^{(\varphi)}\left(y,x,\beta\right)=y^2-yu(x,\beta)-\sigma_\varepsilon^2 w(x,\beta).$$

Тут функції $u(x,\beta)$, $w(x,\beta)$ задовольняють наступні рівняння деконволюції:

$$\mathbf{E}\left(u(x,\beta)/\xi\right)=\rho^T\beta,\ \ \mathbf{E}\left(w(x,\beta)/\xi\right)=1.$$

Розв'язавши ці рівняння в класі поліноміальних функцій, отримаємо $u(x,\beta)=\beta_0+\beta_1x+\beta_2\left(x^2-\sigma_\delta^2\right)$, $w(x,\beta)=1$.

При доведенні наступних теорем будуть використовуватися математичні сподівання

$$\mathbf{E}_\theta y^2=\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(y^2\big/\xi\right)=\mathbf{E}\left(\mathbf{D}_\theta\left(y/\xi\right)+\left(\mathbf{E}_\theta\left(y/\xi\right)\right)^2\right)=\varphi_0+\mathbf{E}\left(\rho^T b\right)^2.$$

$$\mathbf{E}_\theta yu(x,\beta)=\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(yu(x,\beta)/x,\xi\right)=\mathbf{E}u(x,\beta)\mathbf{E}_\theta\left(y/\xi\right)=\mathbf{E}\left(\rho^T b\right)\mathbf{E}\left(u(x,\beta)/\xi\right)=\mathbf{E}\rho^T b\rho^T\beta.$$

Виправлена *T(q)*-вірогідна оцінка $\widehat{\theta}_n(q)=\left(\widehat{\beta}_n^T;\widehat{\varphi}_n\right)^T$ визначається як вимірний розв'язок векторного рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}\left(S_C^{(q)}(y_i,x_i,\beta);S_C^{(\varphi)}\left(y_i,x_i,\beta\right)\right)^T=0,\ \left(\beta^T;\sigma_\varepsilon^2\right)^T\in\Theta. \tag{4}$$

Якщо рівняння (4) не має розв'язку, то покладаємо $\widehat{\theta}_n(q) = 0$.

Означення 3.1. *Для послідовності випадкових величин* $\{U_n : n \ge 1\}$ *послідовність тверджень* $A_n(U_n)$ *виконується зрештою, якщо існує така випадкова подія* Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$, *що* $\forall \omega \in \Omega_0\ \exists N = N(\omega)\ \forall n \ge N :\ A_n\left(U_n(\omega)\right)$ *виконується.*

Позначимо для зручності

$\left(h_1(x,\beta); h_2(x,\beta); h_3(x,\beta)\right)^T = h(x,\beta) = f_0^{(1)}(x,\beta) = \left(1; x; x^2 - \sigma_\delta^2\right)$ – розв'язок рівняння (2) при $k = 0$;

$$\left(z_1(x,\beta), z_2(x,\beta), z_3(x,\beta)\right)^T = z(x,\beta) = f_1^{(1)}(x,\beta) = \left(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 (x^2 - \sigma_\delta^2); \beta_0 x + \beta_1 (x^2 - \sigma_\delta^2) + \beta_2 (x^3 - 3\sigma_\delta^2 x);\right.$$

$$\left.\beta_0\left(x^2 - \sigma_\delta^2\right) + \beta_1\left(x^3 - 3\sigma_\delta^2 x\right) + \beta_2\left(x^4 - 6\sigma_\delta^2 x^2 + 3\sigma_\delta^4\right)\right)^T$$ – розв'язок рівняння (2) при $k = 1$;

ймовірнісний простір $L^2\left(\Omega; P\right) = \left\{u - \textit{випадкова величина на } \Omega : \mathrm{E}u^2 < \infty\right\}$;

оціночні функції

$$\left(S_1(y_i, x_i, s, q_n); S_2(y_i, x_i, s, q_n)\right)^T = S_C(y_i, x_i, s, q_n) := S_C^{(q_n)}(y_i, x_i, s),\ S_C^{(1)}(y, x, s) = yh(x,\beta) - z(x,\beta),$$

$$Q_C(y, x, s, q_n) := \left(S_C^{(q_n)}\left(y, x, s\right); S_C^{(\varphi)}\left(y, x, s\right)\right)^T,\ S_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_C\left(y_i, x_i, s, 1\right),$$

$$\Phi_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S_C(y_i, x_i, s, q_n) - S_C(y_i, x_i, s, 1); 0\right)^T. \quad (5)$$

Неперервна диференційованість функцій на Θ означає, що функції визначені в деякому околі Θ і неперервно в цьому околі диференційовані.

У подальшому використовується наступна лема (цитуємо [2, с. 161]:

Лема 3.2. Розглянемо борелеву за сукупністю змінних функцію $q\left(\beta, W, \Delta, Y\right)$. *Розглядається оціночне рівняння* $S_n(\beta) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q\left(\beta, W_i, \Delta_i, Y_i\right) = 0,\ \beta \in \Theta$. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $q\left(\cdot, W, \Delta, Y\right) \in C^1\left(\Theta\right)$ *м.н.; при всіх* $\beta \in \Theta$ $\mathbf{E}\left\|q(\beta, W, \Delta, Y)\right\| < \infty$ *відносно міри* P;

2) Функція $S_\infty := \mathbf{E}_b q\left(\beta, W, \Delta, Y\right)$ *неперервна за* b *на* Θ;

3) $\mathbf{E}_b\left\|\dfrac{\partial q(\beta, W, \Delta, Y)}{\partial \beta^T}\right\| < \infty$;

4) $V := \dfrac{\partial S_\infty(\beta, b)}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta = b}$ *– невироджена матриця.* (6)

5) $S_\infty(\beta, b) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\beta = b$.

Нехай випадкові функції $\Phi_n\left(\beta\right) = \Phi_n\left(\beta, \omega\right)$, $n \ge 1$, *задовольняють умови:*

6) Для всіх $\beta \in \Theta$: $\Phi_n(\beta) \to 0$ *з ймовірністю 1 при* $n \to \infty$, $\Phi_n\left(\cdot\right) \in C^1\left(\Theta\right)$ *м. н.;*

7) $\sup_{n \ge 1}\sup_{\beta \in \Theta}\left\|\dfrac{\partial \Phi_n\left(\beta\right)}{\partial \beta^T}\right\| < \infty$ *м. н.*

Тоді мають місце наступні твердження

а) з імовірністю 1, починаючи з деякого випадкового номера $n = n\left(\omega\right)$, *існує зрештою розв'язок оціночного рівняння* $S_n\left(\beta\right) + \Phi_n\left(\beta\right) = 0,\ \beta \in \Theta$; *існує також послідовність* $\left\{\widehat{\beta}_n\right\}$, *що задовольняє означення 1;*

б) оцінка вектора параметрів $\widehat{\beta}_n$ *є строго консистентною (тобто для кожної такої послідовності* $P\left\{\widehat{\beta}_n \to b, n \to \infty\right\} = 1$*).*

Мають місце наступні твердження.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються наступні умови.*

1. Показник q *залежить від обсягу вибірки,* $q = q_n$, *причому* $0 < q_n \le 1$, $n \ge 1$, *та* $q_n \to 1$ *при* $n \to \infty$.

2. Параметрична множина Θ *є компактною в* R^4, *а істинне значення* $\theta = \left(b_0; b_1; b_2; \varphi_0\right)^T$ *параметра* $s = \left(\beta^T; \sigma_\varepsilon^2\right)^T$ *є внутрішньою точкою* Θ.

3. Існує таке $K > 0$, *що* $\left|\xi\right| \le K$ *майже напевно, де* K *– невідома стала; розподіл* ξ *не зосереджений у трьох чи менше точках.*

Тоді рівняння (4) має зрештою розв'язок.

Визначимо оцінку $\widehat{\theta}_n(q_n)$ як розв'язок рівняння (4), якщо існує такий розв'язок; інакше покладемо $\widehat{\theta}_n(q_n)=0$.

Теорема 3.4. *За умов теореми 3.3 оцінка $\widehat{\theta}_n(q_n)$ є строго консистентною, тобто $\widehat{\theta}_n(q_n)\to\theta$ з імовірністю 1 при $n\to\infty$, де θ є істинним значенням s.*

Зауваження 1. Аналогічні теореми з тими самими припущеннями справедливі і у випадку моделі $\eta=\beta_0+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2+...+\beta_k\xi^k$, але тоді має виконуватися умова про те, що розподіл ξ не зосереджений в *(k+1)* чи менше точках.

Доведення теорем 3.3 і 3.4. Перевіримо умови леми 3.2, де в якості параметрів $\beta,\ b$ та функції $q(\beta,W,\Delta,Y)$ візьмемо $s=\left(\beta^T;\sigma_\varepsilon^2\right)^T$, $\theta=\left(b^T;\varphi_0\right)^T$ та $q(s,y,x)=\left(\left(yh(x,\beta)-z(x,\beta)\right)^T;y^2-yu(x,\beta)-\sigma_\varepsilon^2\right)^T$ відповідно. Маємо оціночне рівняння (4), в якому $q=q_n\to 1$ при $n\to\infty$. Поділимо це рівняння на n і запишемо його у вигляді $S_n(s)+\Phi_n(s)=0,\ s\in\Theta,$ де відповідні оціночні функції задаються формулами (5). Тоді маємо $q(\cdot,y,x)\in C^1\left(\Theta\right)$ майже напевно та, крім того, для всіх $s\in\Theta$ виконуються нерівності

$$\mathbf{E}_\theta\left\|q(s,y,x)\right\|\le\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_\theta\left|yh_1(x,\beta)\right|/x,\xi\right)+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left|z_1(x,\beta)\right|/\xi\right)+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_\theta\left|yh_2(x,\beta)\right|/\xi\right)+\mathbf{E}\left(\left|z_2(x,\beta)\right|/\xi\right)+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_\theta\left|yh_3(x,\beta)\right|/\xi\right)+$$
$$+\mathbf{E}\left(\left|z_3(x,\beta)\right|/\xi\right)+\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(y^2/\xi\right)+\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(\left|yu(x,\beta)\right|/\xi\right)+\sigma_\varepsilon^2<\infty.$$

Ці нерівності випливають з умов 2, 3 теореми 3.3. Отже умова 1 леми 3.2 виконується.

Далі, гранична оціночна функція

$$S_\infty(s,\theta):=\mathbf{E}_b q(s,y,x)=\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(yh_1(x,\beta)-z_1(x,\beta);yh_2(x,\beta)-z_2(x,\beta);yh_3(x,\beta)-z_3(x,\beta);y^2-yu(x,\beta)-\sigma_\varepsilon^2\right)^T/\xi=$$
$$=\left((b-\beta)^T\mathbf{E}\rho;(b-\beta)^T\mathbf{E}\xi\rho;(b-\beta)^T\mathbf{E}\xi^2\rho;\varphi_0-\sigma_\varepsilon^2+\mathbf{E}b^T\rho(b-\beta)^T\rho\right)^T$$

неперервна за s на Θ, тому умова 2 леми 3.2 також виконується.

Крім того, маємо $\mathbf{E}_\theta\sup_{s\in\Theta}\left\|\dfrac{\partial q(s,y,x)}{\partial s^T}\right\|=\sum\limits_{i=0,1,2}\sum\limits_{j=1,2,3}\mathbf{E}_b\sup_{s\in\Theta}\left(\left|\dfrac{\partial}{\partial\beta_i}\left(yh_j(x,\beta)-z_j(x,\beta)\right)\right|+\left|y\dfrac{\partial u(x,\beta)}{\partial\beta_i}\right|\right)<\infty.$

Тут використано умови 2, 3 теореми 3.3, які забезпечують скінченність кожного доданка. Отже умова 3 леми 3.2 також виконується.

Далі, згідно умови (6) маємо

$$V^*:=-V=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{E}\xi & \mathbf{E}\xi^2 & 0\\ \mathbf{E}\xi & \mathbf{E}\xi^2 & \mathbf{E}\xi^3 & 0\\ \mathbf{E}\xi^2 & \mathbf{E}\xi^3 & \mathbf{E}\xi^4 & 0\\ b^T\mathbf{E}\rho & b^T\mathbf{E}\xi\rho & b^T\mathbf{E}\xi^2\rho & 1\end{pmatrix}.$$

Згідно умови 3 теореми 3.3 маємо $\mathbf{D}\xi>0$. Крім того, розподіл ξ не зосереджений в трьох чи менше точках, а отже визначник Грама для елементів $1,\xi,\xi^2$ з простору $L^2\left(\Omega;P\right)$ є додатним. Звідси, використовуючи критерій Сильвестра, отримуємо, що матриця V^* додатно визначена, а отже матриця V від'ємно визначена, тому умова 4 леми 3.2 виконується.

Якщо $s=\theta$, то $S_\infty\left(\theta,\theta\right)=0$. Отже для перевірки умови 5 леми 3.2 припустимо, що існує таке $s\ne\theta$, що $S_\infty\left(s,\theta\right)=0.$ Позначимо $f\left(s\right)=S_\infty\left(s,\theta\right)$, $g(t)=\left(f(t\theta+(1-t)s),\theta-s\right).$ Тоді за припущенням $g(0)=g(1)=0,$ а отже за теоремою Ролля існує таке $\tau\in(0,1)$, що $g'(\tau)=0$ і виконується рівність

$$\left(\theta-s\right)^T\left(\frac{\partial S_\infty(s,\theta)}{\partial s^T}\Big|_{s=\overline{s}}\right)\left(\theta-s\right)=0,\qquad(7)$$

де $\overline{s}\in\left(\theta;s\right).$ Аналогічно, як і при перевірці умови 4 леми 3.2, отримаємо, що матриця $\left(\dfrac{\partial S_\infty(s,\theta)}{\partial s^T}\Big|_{s=\overline{s}}\right)$ від'ємно визначена для всіх $\theta\in\Theta.$ Це приводить до суперечності з рівністю (7). Таким чином, рівняння $S_\infty(s,\theta)=0$ має єдиний розв'язок на множині Θ. Крім того, $S_\infty(s,\theta)=0$ тоді і тільки тоді, коли $s=\theta$.

Перевіримо умову 6 леми 3.2. Щоб обґрунтувати збіжність

$$\sup_{s\in\Theta}\left\|\Phi_n(s)\right\|\xrightarrow{P1}0,$$

оцінимо значення $\left\|\Phi_n(s)\right\|.$ Нагадаємо, що $\Phi_n(s)$ задається формулою (5). Маємо

$$\left\|\Phi_n(s)\right\|\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left\|S_C(y_i,x_i,s,q_n)-S_C(y_i,x_i,s,1)\right\|\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^2\sup_{q_n\le\gamma_n\le1,s\in\Theta}\left|\frac{\partial S_k(y_i,x_i,s,\gamma_n)}{\partial q}\right|\cdot\left|q_n-1\right|.$$

Нехай n_0 – такий номер, що при всіх $n \ge n_0$ виконується нерівність $q_n \ge 1-\tilde{\delta}$, де число $\tilde{\delta} \in (0;\,1)$ вибирається з умови, що для кожного $k = 1, 2$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}_\theta \sup_{1-\tilde{\delta}\le\gamma\le 1, s\in\Theta} \left| \frac{\partial S_k(y_i, x_i, s, \gamma)}{\partial q} \right| < \infty. \tag{8}$$

Нехай зафіксовано число $\tilde{\delta} > 0$. Щоб обґрунтувати нерівність (8), оцінимо $x \le |x| \le |\xi| + |\delta|$, $|\beta_0| \le C_0$, $|\beta_1| \le C_1$, $|\beta_2| \le C_2$, скориставшись для цього зображенням (3) і умовою 3 теореми 3.3. З посиленого закону великих чисел та умови 1 теореми 3.3 випливає збіжність послідовності

$$|q_n - 1| \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} \sup_{q_n \le \gamma_n \le 1, s\in\Theta} \left| \frac{\partial S_k(y_i, x_i, s, \gamma_n)}{\partial q} \right| \to 0,\ n \to \infty.$$

Тому умова 6 леми 3.2 виконується.

Перевіримо виконання умови 7 леми 3.2. Нехай n_0 – такий номер, що при всіх $n \ge n_0$ виконується $q_n \ge 1-\tilde{\delta}$, де число $\tilde{\delta}$ вибрано вище (при перевірці умови 6 леми 3.2). Маємо

$$\sup_{n\ge 1} \sup_{s\in\Theta} \left\| \frac{\partial \Phi_n(s)}{\partial s^T} \right\| \le \sup_{n\ge n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial s^T} \left(S_C(y_i, x_i, s, q) - S_C(y_i, x_i, s, 1) \right) \right\| + \sup_{n< n_0} \sup_{\beta\in\Theta} \left\| \frac{\partial \Phi_n(s)}{\partial s^T} \right\|.$$

Доданок $\sup_{n<n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{s\in\Theta} \left\| \frac{\partial}{\partial s^T} \left(S_C(y_i, x_i, s, q_n) - S_C(y_i, x_i, s, 1) \right) \right\|$ скінчений майже напевно.

З умови 3 теореми 3.3 випливає скінченність математичного сподівання

$$\mathbf{E} \sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial s^T} \left(S_C(y_i, x_i, s, q) - S_C(y_i, x_i, s, 1) \right) \right\|.$$

Із збіжності за посиленим законом великих чисел маємо $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial s^T} \left(S_C(y_i, x_i, s, q) - S_C(y_i, x_i, s, 1) \right) \right\| \to \mathbf{E} \sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial s^T} \left(S_C(y_i, x_i, s, q) - S_C(y_i, x_i, s, 1) \right) \right\|$, $n \to \infty$, звідки випливає обмеженість майже напевно послідовності

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial s^T} \left(S_C(y_i, x_i, s, q) - S_C(y_i, x_i, s, 1) \right) \right\| : n \ge 1 \right\}.$$

Таким чином, усі умови леми 3.2 виконуються, а отже теореми 3.3, 3.4 доведено.

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови теореми 3.3 та додатково виконується умова:* $M_n \to +\infty$, $n \to \infty$, *де* M_n, $n \ge 1$, *– невипадкова послідовність; функції* $u_m(y, x; \beta, q)$ *задані рівністю (3). Тоді векторне рівняння*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{m=0}^{M_n} \begin{pmatrix} u_m(y_i, x_i; \beta, q) \\ y_i^2 - \left(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 (x_i^2 - \sigma_\delta^2) \right) y_i - \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = 0$$

зрештою має розв'язок.

Доведення цієї теореми здійснюється аналогічно доведенню теореми 3.3.

4. Висновки

Вивчено квадратичну модель регресії з нормально розподіленою похибкою вимірювання за умови, що дисперсія σ_δ^2 похибки вимірювання відома, а дисперсія похибки у відгуку невідома. При оцінюванні невідомого параметра побудовано виправлену *T(q)*-вірогідну оцінку. Отримано достатні умови її строгої консистентності.

Список використаних джерел

1. Савченко А.В. Виправлення T(q)-вірогідної оцінки в показниковій структурній моделі з похибками вимірювання // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2012. – Вип. 86. – С. 172 – 181.
2. Усольцева О.С. Консистентна оцінка в моделі тривалості життя з цензурованими спостереженнями за наявності похибок вимірювання // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2010. – Вип. 82. – С. 156 – 162.
3. Cheng C.-L., Schneeweiss H. Polynomial regression with errors in the variables // J. Royal Statist. Soc. B. – 1998. – 60. – P. 189 – 199.
4. Cheng C.-L., Van Ness J. W. Statistical regression with measurement error. – London: Arnold Publishers, 1999. – 262 p.
5. Ferrari D., Yang Y. Maximum L_q –likelihood estimation // Ann. Statist. – 2010. – 38, № 2. – P. 753 – 783.
6. Kolev N. Maximum T(q)-likelihood estimation: a new method and its application in risk management // Actuarial Science & Finance: Proc. 6th Conference (Samos, Greece, June 3 – 6, 2010). – Samos, 2010. – P. 22.
7. Kukush A., Markovsky I., Van Huffel S. Consistent adjusted least squares estimator for errors-in-variables model AXB=C // Metrika. – 2003. – 57, № 3. – P. 253 – 285.
8. Kukush A., Schneeweiss H. Comparing different estimators in a non-linear measurement error model. I // Mathematical Methods of Statist. – 2005. – 14, № 1. – P. 53 – 79.
9. Schneeweiss H., Kukush A. Comparing the efficiency of structural and functional methods in measurement error models // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2009. – Вип. 80. – P. 119 – 129.

Надійшла до редколегії 19.02.14

А. Савченко, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ИСПРАВЛЕННАЯ T(q)-ПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА В КВАДРАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ С ОШИБКАМИ ИЗМЕРЕНИЯ

Изучается квадратичная структурная модель регрессии с ошибками измерения. Дисперсия ошибок в отклике предполагается неизвестной. Построена исправленная T(q)-правдоподобная оценка для коэффициентов регрессии. Получено достаточное условие строгой состоятельности оценки для случая, когда параметр q зависит от объема выборки и стремится к 1 при неограниченном возрастании объема выборки.

A. Savchenko, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

CORRECTED *T(q)*-LIKELIHOOD ESTIMATOR IN QUADRATIC STRUCTURAL MEASUREMENT ERROR REGRESSION MODEL

A quadratic structural measurement error regression model is studied. Variance of error in output is assumed to be unknown. The corrected T(q)-likelihood estimator is constructed. For the case as the sample size tends to infinity and parameter q depends on the sample size and tends to 1, a sufficient condition of strong consistency for the estimator is given.

УДК 539.595

В. Губська, канд. фіз.-мат. наук
НТУУ "КПІ", Київ,
О. Лимарченко, д-р техн. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
І. Кудзіновська, канд. техн. наук
Національний авіаційний університет (НАУ), Київ

СИЛОВА ВЗАЄМОДІЯ РЕЗЕРВУАРУ У ФОРМІ УСІЧЕНОГО КОНУСА І РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ПРИ ЇХ СУМІСНОМУ РУСІ

Розглянуто задачу силової взаємодії, що виникає в системі резервуар-рідина при збудженні руху системи періодичною силою в зоні частот до резонансу, в малому околі резонансу, а також більших за резонансну. Поведінка системи розглядається в рамках нелінійної моделі на тривалому проміжку часу.

1. Вступ

Розглянемо задачу про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса і рідини з вільною поверхнею при їх сумісному русі. Поведінка системи розглядається в рамках нелінійної моделі на тривалому проміжку часу. При дослідженні виходу такої системи на усталений режим коливань в рамках багатомодової нелінійної моделі, важливим виявився вплив силової взаємодії резервуару і рідини на розвиток коливальних процесів. Експериментальні дослідження останніх років [3, 5] показали, що при збудженні коливань за основним тоном обов'язково відбувається збудження вищих гармонік спектру зі своїми власними частотами, які можуть бути не кратними частоті збудження системи. Зокрема для випадку резервуару прямокутної форми показано, що в реальних системах вихід на усталений режим коливань вільної поверхні не проявляється в чистому вигляді [3]. В [2] розглянуто задачу виходу системи конічний резервуар – рідина з вільною поверхнею на усталений режим в залежності від відношення маси резервуара до маси рідини і було показано, що в чистому вигляді вихід на усталений режим коливань в класичному сенсі не спостерігається взагалі і тільки частину режимів, які відрізняються повторами циклів коливань при суттєвій модуляції амплітуд, можна умовно вважати усталеними. Важливим виявився також прояв силової взаємодії, що виникає в системі резервуар-рідина при збудженні руху системи періодичною силою при дослідженні виходу системи на усталений режим коливань.

2. Метод дослідження

Розглядається резервуар у формі усіченого конуса. Нехай τ – область, яку займає рідина; S_0 і S – вільна поверхня рідини в її збуреному і незбуреному русі; Σ і Σ_0 – границі контакту рідини зі стінками резервуару у збуреному та незбуреному стані ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\xi(x,y,z,t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини. Поступальний рух резервуара описується вектором переміщень $\vec{\varepsilon}$. Припускається, що рідина ідеальна, однорідна, нестислива і в початковий момент часу вихрові рухи відсутні. В цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенціалом швидкостей. Резервуар є абсолютно твердим тілом з абсолютно жорсткими стінками.

Постановка задачі [1]:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ на } S; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S. \tag{4}$$