УДК 519.21

О. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук, Т. Шовкопляс, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *from_Tatyana@ukr.net*

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ВИПЕРЕДЖЕННЯМ

Отримано умови єдиності узагальненого розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу з випередженням.

ВСТУП. Теорія існування і єдиності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь знаходиться на початковому етап свого розвитку. Цій проблематиці присвячено багато праць різних авторів. Для стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу з невипадковою початковою умовою фундаментальне дослідження було виконано Б. Л. Розовським в [4]. Для задач з початковою умовою, залежною від вінеровського процесу, ситуація складніша, оскільки потребує розширеного стохастичного інтегрування. У даній статті задача про єдиність розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь зводиться до аналогічного питання для диференціальних рівнянь з частинними похідними, при цьому вдається виділити клас процесів, для яких розв'язок єдиний. Ця обставина відповідає специфіці параболічних рівнянь з частинними похідними і спрощує пошук розв'язку. Інший підхід запропоновано в [6].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ, ПРИПУЩЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ. Нехай $t\in[0,T]$, $T<\infty$; λ – міра Лебега на відрізку $[0,T]$; $I_{[a,b]}(\,\cdot\,)$ – індикатор відрізка; нехай $x\in R^d$, $|\cdot|$ – норма вектора з R^d. Через G позначимо обмежену область (відкриту зв'язну множину в R^d) з кусково-гладкою межею [2], ∂G – межу області G, λ_d – міру Лебега на G. Нехай: $G_T=\{(x,t): x\in G, t\in(0,T)\}$, $\partial G_T=\{(x,t): x\in\partial G, t\in[0,T]\}$.

Надалі в цій статті по парам однакових індексів здійснюється підсумовування в межах від 1 до d. Позначимо, $u_{x_i}=du/dx_i$, $\overline{i=1,\dots,d}$, $u_s=du/ds$, $u_x=(u_{x_1},\dots,u_{x_d})$. Всі похідні розглядаються в узагальненому сенсі [3].

Через $(\cdot,\cdot)_0$ і $(\cdot,\cdot)_{0,0}$ позначено скалярні добутки в $L^2(G)$ і в $L^2(G_T)$ відповідно: $\|f\|_0=(f,f)_0^{1/2}$, $\|f\|_{0,0}=(f,f)_{0,0}^{1/2}$.

$W_1^2(G)$ – простір Соболєва функцій $f\in L^2(G)$, які мають похідну $f_x\in L^2(G)$; $(f,g)_1=(f,g)_0+\left(f_{x_k},g_{x_k}\right)_0$, $\|f\|_1=(f,f)_1^{1/2}$ – скалярний добуток і норма елементів в $W_1^2(G)$; $W_{1,0}^2(G_T)$ – простір Соболєва функцій $f\in L^2(G_T)$ з похідними $f_x\in L^2(G_T)$ і скалярним добутком

$$(f,g)_{1,0}=(f,g)_{0,0}+\left(f_{x_k},g_{x_k}\right)_{0,0};\ \overset{\circ}{W}{}_{1,0}^2(G_T)=W_{1,0}^2(G_T)\cap\left\{f: f|_{\partial G_T}=0\right\}.$$

$W_{1,1}^2(G_T)$ – простір Соболєва функцій $f\in L^2(G_T)$, що мають похідні $f_x\in L^2(G_T)$ та $f_s\in L^2(G_T)$, а скалярний добуток в $W_{1,1}^2(G_T)$: $(f,g)_{1,1}=(f_s,g_s)_{0,0}+(f,g)_{1,0}$; $\overset{\circ}{W}{}_{1,1}^2(G_T)=W_{1,1}^2(G_T)\cap\left\{f: f|_{\partial G_T}=0\right\}$.

Через $\overset{\circ}{V}$ позначимо банахів простір, який складається з таких елементів $\overset{\circ}{W}{}_{1,0}^2(G_T)$, що мають скінченну норму

$$\|f\|_{\overset{\circ}{V}}=\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\|f(\,\cdot,t)\|_0+\left(\int_{G_T}|f_x(x,s)|^2\,dxds\right)^{1/2}.$$

Нехай $(\Omega,\Im,P)$ – канонічний ймовірностний простір; $\mathrm{w}(t)$, $t\in[0,T]$ – вінерівський процес, заданий на ньому. Це означає, що $\Omega=C_0([0,T])$, $\Im=\overline{B}^P(\Omega)$, P – вінерівська міра на $\Im$, а $W(t,\omega)=\omega(t)$; $\mathrm{E}\xi$ – математичне сподівання величини ξ за мірою P; D_s – стохастична похідна [7]; $\|F\|_2=\left(\mathrm{E}|F|^2\right)^{1/2}$.

Через $\overset{\circ}{SV}$ позначимо банахів простір, який складається з таких елементів $L^2\left([0,T]\times\Omega;\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)\right)$, що мають скінченну норму: $\|f\|_{\overset{\circ}{SV}}=\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left(\mathrm{E}\|f(\,\cdot,t,\cdot\,)\|_0^2\right)^{1/2}+\left(\mathrm{E}\int_{G_T}|f_x(x,s,\omega)|^2\,dxds\right)^{1/2}$, А через $\varepsilon(h)$ – стохастичну експоненту: $\varepsilon(h)=\exp\left\{\int_0^T h(s)\,d\,w(s)-\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}\right\}$, $\quad h\in C^\infty([0,T])$.

© Ільченко О., Шовкопляс Т., 2015

Під $\int_0^t u(s)\,dw(s),\ 0\le t\le T$, будемо розуміти невизначений розширений стохастичний інтеграл Скорохода [5, 7]; $Dom\,\delta$ – область визначення інтегралу Скорохода.

Нехай $a_{ij}(x,t)$, $b_{ij}(x,t)$, $(x,t)\in G_T,\ i,j=\overline{1,d}$; $\varphi(x,\omega)$, $(x,\omega)\in G\times\Omega$ – задані функції. Надалі, з метою спрощення записів, аргументи функцій можуть опускатися, якщо це не призводить до неоднозначності, наприклад, $a_{ij}\equiv a_{ij}(x,t)$, $b_i\equiv b_i(x,t)$, $\varphi\equiv\varphi(x)\equiv\varphi(x,\omega)$, $u\equiv u(t)\equiv u(x,t)\equiv u(x,t,\omega)$, $u_{x_i}\equiv u_{x_i}(x,t,\omega)$, $i,j=\overline{1,d}$, і т. п.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ. Розглянемо рівняння

$$u(x,t)=\varphi(x)+\int_0^t\left(a_{ij}u_{x_i}\right)_{x_j}ds+\int_0^t b_iu_{x_i}\,dw(s). \tag{1}$$

Означення. Узагальненим розв'язком першої крайової задачі для рівняння (1) в циліндрі G_T з умовами

$$u\big|_{t=0}=\varphi,\ u\big|_{\partial G_T}=0,$$

називається такий елемент $u\in\overset{\circ}{SV}$, що для всіх $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ співвідношення

$$\left(u(t),\eta\right)_0=(\varphi,\eta)_0-\int_0^t\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0ds+\int_0^t\left(b_iu_{x_i},\eta\right)_0dw(s) \tag{2}$$

виконується $(\lambda\times P)$ – майже напевно на $[0,T]\times\Omega$.

Знайдемо умови єдності розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1).

Припущення. Сформулюємо припущення, які будуть використані у подальшому.

A) $\left|a_{ij}(x,t)\right|+\left|b_i(x,t)\right|\le K<\infty,(x,t)\in G_T$;

B) $\nu|\xi|^2\le a_{ij}(x,t)\xi_i\,\xi_j,\ \xi\in R^d,\ \nu>0,(x,t)\in G_T$;

C) $\varphi\in L^2(G\times\Omega)$;

D) Процес $\left\{\mathrm{I}_{[0,t]}(s)\left(b_iu_{x_i}(s),\eta\right)_0,\ 0\le s\le T\right\}\in Dom\,\delta$ для всіх $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ майже всіх $t\in[0,T]$.

Зауваження. Якщо виконуються умови A), B), C), D), то співвідношення (2) визначено коректно. Дійсно, $\left(u(t),\eta\right)_0$ існує в силу теореми Фубіні, оскільки $u\in\overset{\circ}{SV}$, а $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$. Аналогічно щодо $(\varphi,\eta)_0$. Потраєкторний інтеграл визначений, оскільки для довільного $t\in[0,T]$ P – майже напевно

$$\int_0^T\left|\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0\right|ds\le\sqrt{T}\left(\int_0^T\left|\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0\right|^2ds\right)^{1/2}\le\sqrt{T}\left(\int_0^T\left|\sum_{i,j=1}^d K\left\|u_{x_i}\right\|_0\left\|\eta_{x_j}\right\|_0\right|^2ds\right)^{1/2}\le$$

$$\le\sqrt{T}K\,d^2\left(\int_0^T\|\eta\|_1^2\sum_{i=1}^d\left\|u_{x_i}\right\|_0^2ds\right)^{1/2}\le\sqrt{T}K\,d^2\|\eta\|_1\left(\int_{G_T}|u_x|^2\,dxds\right)^{1/2}<\infty.$$

Стохастичний інтеграл в (2) визначений силу згідно умови D).

Основний результат. Нехай $u(x,t,\omega)$ – розв'язок першої крайової задачі. Розглянемо $u^h(x,t)=\mathrm{E}\varepsilon(h)u(x,t)$. Зазначимо, що $u^h(x,t)$ існує майже для всіх $(x,t)\in G_T$. Згідно визначення узагальненої похідної, можна писати $u^h_{x_i}(x,t)$, оскільки з $\int_G\left(u^h\zeta_{x_i}+\left(u_{x_i}\right)^h\zeta\right)dx=0$. Отже, $\left(u^{x_i}\right)^h=\left(u^h\right)_{x_i}=u^h_{x_i}$.

Лема. Нехай виконуються умови A), B), C), D). Якщо u – узагальнений розв'язок першої крайової задачі для рівняння (1), то $\varphi^h\in L^2(G)$, $u^h\in\overset{\circ}{V}$ і

$$\int_{G_T}\left(u^h\zeta_{x_i}+\left(u_{x_i}\right)^h\zeta\right)\left\{a_{ij}u^h_{x_i}\Phi_{x_j}-hb_iu_{x_i}\Phi-u^h\Phi_s\right\}dxds=\int_G\varphi^h(x)\Phi(x,0)dx \tag{3}$$

для всіх $\Phi\in\overset{\circ}{W}{}_{1,1}^2(G)$ таких, що $\Phi\big|_{t=T}=0$.

Доведення. Покажемо, що $\varphi^h\in L^2(G)$. Це випливає з оцінки

$$\left\|\mathrm{E}\varepsilon(h)\varphi\right\|_0^2\le\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\mathrm{E}\|\varphi\|_0^2\le e^{\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\|\varphi\|^2_{L^2(G\times\Omega)}.$$

Тепер доведемо, що $u^h\in\overset{\circ}{V}$. Дійсно, майже при всіх $t\in[0,T]$ маємо

$$\left\|u^h(t)\right\|_0^2=\int_G\left(\mathrm{E}\varepsilon(h)u(x,t)\right)^2dx\le\int_G\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\mathrm{E}\left(u(x,t)\right)^2dx=\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\mathrm{E}\left\|u(t)\right\|_0^2=e^{\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\mathrm{E}\left\|u(t)\right\|_0^2\le e^{\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\mathrm{E}\|u\|_{\overset{\circ}{SV}}.$$

Отже, $u^h \in \overset{\circ}{V}$. Для того, щоб довести (3), покажемо спочатку, що для всіх $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ функція u^h майже для всіх $t \in [0, T]$ задовольняє співвідношенню

$$\left(u^h(t),\eta\right)_0 = \left(\varphi^h,\eta\right)_0 + \int_0^t \left\{ -\left(a_{ij}u^h_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0 + \left(b_i u^h_{x_i},\eta\right)_0 h(s) \right\} ds . \tag{4}$$

Формально (4) можна отримати з (2), якщо обидві частини рівності (2) помножити на $\varepsilon(h)$, взяти математичне сподівання і поміняти порядок інтегрування. Обгрунтуємо такий підхід.

Почнемо з лівої частини. Справедлива оцінка

$$\mathrm{E}\int_G \left|\varepsilon(h)u(t)\eta\right|dx \le \left(\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\right)^{1/2}\left(\mathrm{E}\left(\int_G \left|u(t)\eta\right|dx\right)^2\right)^{1/2} \le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\left(\mathrm{E}\|u(t)\|_0^2\|\eta\|_0^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\|\eta\|_1\left(\mathrm{E}\|u(t)\|_0^2\right)^{1/2} \le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\|\eta\|_1\|u\|_{S\overset{\circ}{V}} .$$

З теореми Тонеллі [1] випливає: $\mathrm{E}\,\varepsilon(h)\left(u^h(t),\,\eta\right)_0 = \left(u^h(t),\,\eta\right)_0$.

Аналогічно, $\mathrm{E}\int_G \left|\varepsilon(h)\,\varphi\,\eta\right|dx \le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\|\eta\|_1\left(\mathrm{E}\|\varphi\|_0^2\right)^{1/2}$ і за теоремою Тонеллі $\mathrm{E}\varepsilon(h)(\varphi,\eta)_0 = \left(\varphi^h,\eta\right)_0$.

Далі

$$\mathrm{E}\int\left|\varepsilon(h)\left(a_{ij}u_{x_j},\eta_{x_j}\right)\right|ds \le \left(\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\right)^{1/2}\left(\mathrm{E}\left(\int_0^T\left|\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0\right|ds\right)^2\right)^{1/2} \le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\left(\mathrm{E}T\int_0^T\left|\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0\right|ds\right)^{1/2} \le$$

$$\le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\left(\mathrm{E}T\left(K\,d\|\eta\|_1\right)^2\int_{G_T}|u_x|^2\,dxds\right)^{1/2} \le \sqrt{T}K\,d\|\eta\|_1\,e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\left(\int_{G_T}|u_x|^2\,dxds\right)^{1/2} \le \sqrt{T}Kd\|\eta\|_1\,e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\|u\|_{S\overset{\circ}{V}} .$$

Отже, маємо

$$\mathrm{E}\,\varepsilon(h)\int_0^t\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0 ds = \int_0^t\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0 ds .$$

Нарешті, залишається показати, що

$$\mathrm{E}\,\varepsilon(h)\int_0^t\left(b_i u_{x_i},\eta\right)_0 dw(s) = \int_0^t h(s)\left(b_i u^h_{x_i},\eta\right)_0 ds . \tag{5}$$

Для цього зауважимо, що $D_s\,\varepsilon(h) = \varepsilon(s)h(s)$ і за означенням інтегралу Скорохода [7] має місце рівність:

$$\mathrm{E}\,\varepsilon(h)\int_0^t\left(b_i u_{x_i},\eta\right)_0 dw(s) = \mathrm{E}\int_0^t\varepsilon(s)h(s)\left(b_i u^h_{x_i},\eta\right)_0 ds .$$

Враховуючи те, що функція h обмежена на $[0,T]$, аналогічно попередньому, будемо мати

$$\mathrm{E}\int_0^t\left|\varepsilon(h)h(s)\left(b_i u_{x_i},\eta\right)_0\right|ds \le \sqrt{T}K_1 d\|\eta\|_1\,e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\|u\|_{S\overset{\circ}{V}} ,$$ для деякої сталої $K_1 < \infty$.

За теоремою Тонеллі отримаємо (5). Співвідношення (4) доведено.

Покажемо, як з (4) отримати (3). Нехай $\left\{\psi^k(x)\right\}_{k=1}^\infty$ – фундаментальна система в $\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ така, що $\left(\psi^k,\psi^l\right)_0 = \delta_{kl}$.

Тоді, для $\eta = \psi^k,\ k = \overline{1,M},\ M < \infty,$ і майже для всіх $t \in [0,T]$ маємо

$$\left(u^h(t),\,\psi^k\right)_0 - \left(\varphi^h,\,\psi^k\right)_0 = \int_0^t\left\{-\left(a_{ij}u^h_{x_i},\,\psi^k_{x_j}\right)_0 + \left(hb_i u^h_{x_i},\,\psi^k\right)_0\right\}ds, \tag{6}$$

Нехай $f \in C^\infty([0,T])$ така, що $f(T) = 0$. Оскільки права частина (6) і f абсолютно неперервні функції, то для них справедлива формула інтегрування частинами [1]:

$$\int_0^T f(s)\left\{-\left(a_{ij}u^h_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 + \left(hb_i u^h_{x_i},\psi^k\right)\right\}ds = -\int_0^T f_t(t)\int_0^t\left\{-\left(a_{ij}u^h_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 + \left(hb_i u^h_{x_i},\psi^k\right)\right\}dsdt =$$

$$= -\int_0^T f_t(t)\left\{\left(u^h(t),\psi^k\right)_0 - \left(\varphi^h,\psi^k\right)_0\right\}dt =$$

$$= -\int_0^T f_t(t)\left(u^h(t),\psi^k\right)_0 dt + \left(\varphi^h,\psi^k\right)_0\left(f(T)-f(0)\right) = -\int_0^T f_t(t)\left(u^h(t),\psi^k\right)_0 dt - \left(\varphi^h,\psi^k\right)_0 f(0) . \tag{7}$$

Нехай функція $g^k \in C^\infty([0,T]),\ k=\overline{1,M},$ такі, що $g^k(T)=0$. Розглянемо (7) для $f=g^k$. Просумуємо (7) по k від 1 до $g^k \in C^\infty([0,T]),\ k=\overline{1,M},$. Позначимо $\Phi^M(x,t)=\sum_{k=1}^{M}\psi^k(x)g^k(t)$. Отримуємо

$$\int_{G_T}\left\{a_{ij}u^h_{x_i}\Phi^M_{x_j}-hb_iu^h_{x_i}\Phi^M-u^h\Phi^M_s\right\}dxds=\int_G\varphi^h(x)\Phi^M(x,0)dx. \qquad (8)$$

Функції $\Phi^M(x,t)$ складають щільну множину серед елементів $\overset{\circ}{W}{}^2_{1,1}(G_T)$, які дорівнюють нулю при $s=T$. Умови теореми забезпечують можливість граничного переходу в (8) по послідовностям $\left\{\Phi^M\right\}_{M=1}^{\infty}$. В результаті отримуємо (3). Лему доведено.

Теорема. Припустимо, що виконуються умови A), B), C), D). Тоді перша крайова задача для рівняння (1) не може мати двох узагальнених розв'язків.

Доведення. Припустимо, що u_1 і u_2 – два узагальнених розв'язки першої крайової задачі для (1) з $\overset{\circ}{SV}$. Тоді u_1^h і u_2^h – розв'язки задачі (3) з $\overset{\circ}{V}$. Але, як встановлено в [2], задача (3) не може мати двох різних розв'язків з $\overset{\circ}{V}$. Це означає, що для $h\in C^\infty([0,T])$ має місце умова $E\varepsilon(h)\left(u_1(x,s,\cdot)-u_2(x,s,\cdot)\right)=0$ на множині G_T^h повної $(\lambda_d\times\lambda)$ – міри циліндра G_T. Розглянемо множину $h\in C^\infty([0,T])$ всюди щільну в $L^2([0,T])$. Наприклад, це можуть бути многочлени з раціональними коефіцієнтами. Тоді $\left\{\varepsilon(h_i)\right\}_{i=1}^{\infty}$ утворює тотальну множину в $L^2(\Omega)$. Позначимо $\tilde{G}_T=\cap_{i=1}^{\infty}G_T^{h_i}$. Множина $\tilde{G}_T\subseteq G_T$ має повну $(\lambda_d\times\lambda)$ – міру циліндра G_T. Для всіх $h\in\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ будемо мати: $E\varepsilon(h)(u_1-u_2)\big|_{\tilde{G}_T}=0$.

З цього безпосередньо випливає, що $u_1-u_2=0$ за мірою $\lambda_d\times\lambda\times P$. Отже, u_1 і u_2 не відрізняються як елементи $\overset{\circ}{SV}$. Теорему доведено.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Богачев В. И.. Основы теории меры. Том 1, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. // Институт компъютерных исследований. – Москва-Ижевск, 2006. – 584с.
2. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
3. Никольский С. М.. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480с.
4. Розовский Б. Л.. Эволюционные стохастические системы. – М.: Наука, 1983. – 208 с.
5. Скороход А. В.. Об одном обобщении стохастического интеграла. // Теория вероятностей и применение, № 2, вып. 20, 1975. – С. 223–237.
6. Mohammed S.-E. A., Zhang T.. The substitution theorem for semilinear stochastic partial differential equations // Journal of Functional Analysis, 253:1, 2007. – P. 122–157.
7. Nualart D.. The Malliavin calculus and related topics, Springer, 1995. – 266 p.

Стаття надійшла до редколегії 05.11.14

Ильченко А., канд. физ.-мат. наук, Шовкопляс Т., канд. физ.-мат. наук,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРЕЖЕНИЕМ

Получены условия единственности обобщенного решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с опережением.

Ilchenko O., PhD, Shovkoplyas T., PhD,
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF ANTICIPATING PARTIAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

Conditions for the uniqueness of the generalized solution of anticipating partial stochastic differential equations of parabolic type are obtained.

УДК 512.5

N. Golovashchuk, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
e-mail: golovash@gmail.com

INVARIANT SUBALGEBRA OF UNIVERSAL ENVELOPING ALGEBRA FOR ORTHOGONAL MATRIX LIE ALGEBRA

The structure and properties of invariant Gelfand-Zetlin subalgebra of universal enveloping algebra for the orthogonal complex Lie algebra. This algebra is considered as subalgebra of polynomials on groups of variables, depending on two indices that are invariant with respect to the action of the Weyl group. The Gelfand-Zetlin algebra is realized as some finite extension of the algebra of symmetric polynomials on groups of variables.

INTRODUCTION. The aim of this paper is to study the structure of the invariant subalgebra of the universal embedding algebra of complex orthogonal matrix Lie algebra O_n. We use Gelfand-Zetlin formal construction for orthogonal Lie algebras [1–3, 6]. We construct the orthogonal operator algebra associated with Gelfand-Zetlin formulae. The orthogonal Lie algebra

© Golovashchuk N., 2015