Corollary 1. Let f be a polynomial from the polynomial ring $K[x_1,...,x_n]$. If the ideal of $K[x_1,...,x_n]$ generated by the partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ coincides with $K[x_1,...,x_n]$, then the annihilator $Ann_{W_n(K)}(f)$, can be generated by *n* generators.

Corollary 2. If a polynomial $f \in K[x_1,...,x_n]$ is a slice for a derivation $D \in W_n(K)$, then $Ann_{W_n(K)}(f)$ can be generated by *n* elements.

Corollary 3. Let $f \in K[x_1,...,x_n]$ be such a polynomial that at least one of the partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1,...,n$ is a nonzero constant. Then $Ann_{W_n(K)}(f)$ is a free submodule of $W_n(K)$ of rank $n-1$.

REFERENCES

1. Petravchuk A. P., Iena O. G. On closed rational functions in several variables, Algebra and Discrete Mathematics. – 2007, – no. 2., P. 115–124..
2. Lysenko S. V., Petravchuk A. P., Stepukh V. V., Centralizers of elements in Lie algebras of derivations, Book of abstracts of the International Algebraic Conference dedicated to 100tr anniversary of L.A.Kaluzhnin July 7–12, 2014 Taras Shevchenko National University of Kyiv 2014, – p. 59.
3. Makedonskiy Ie. O., Petravchuk A. P., Stepukh V. V. On centralizers of elements in the Lie algebra W2(K); Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. 14, – 2013, с. 24–30.
4. Jordan D. A. On the ideals of a Lie algebra of derivations. J. London Math. Soc. (2), 33, (1986), no.1, p. 33--39.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.15

Степух В., асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

АНУЛЯТОРНІ ПІДАЛГЕБРИ В АЛГЕБРАХ ЛІ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ

Нехай K алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль і $K(x_1, \ldots, x_n)$ - поле раціональних функцій від n змінних. Множина Ann(S) всіх K-диференціювань $K(x_1, \ldots, x_n)$, яка анулює підмножину $S \subseteq K(x_1, \ldots, x_n)$ є підалгеброю алгебри Лі $W_n(K)$. Структура підалгебри Ann(S) пов'язана з централізаторами елементів в $W_n(K)$. Дано характеризацію підалгебри Ann(S), вказано систему твірних для підалгебри Ann(S) в алгебрі Лі всіх K-диференціювань кільця многочленів $K[x_1,\ldots, x_n]$.

Степух В., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

АННУЛЯТОРНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ В АЛГЕБРАХ ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ

Пусть K алгебраически замкнутое поле характеристики нуль і $K(x_1, \ldots, x_n)$ поле рациональных функций от n переменнных. Множество Ann(S) всех K-дифференцирований $K(x_1, \ldots, x_n)$, аннулирующих подмножество $S \subseteq K(x_1, \ldots, x_n)$ является подалгеброй алгебры Ли $W_n(K)$. Структура подалгебры Ann(S) связана с централизаторами элементов в $W_n(K)$. Дано характеризацию подалгебры Ann(S), указано систему образующих для подалгебры Ann(S) в алгебре Ли всех K-диференцирований кольца многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$.

УДК 517.9

А. Русіна, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *rusina.alina@gmail.com*

НАБЛИЖЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ФОРМІ ОБЕРНЕНОГО ЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗІ ШВИДКО КОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається задача знаходження оптимального керування в формі оберненого зв'язку (синтезу) в лінійно-квадратичної задачі, яка складається з параболічної системи зі швидко коливними коефіцієнтами та напіввизначеного цільового функціоналу. Знайдено точну формулу синтезу та за допомогою переходу до усереднених параметрів обґрунтовано його наближену форму.

ВСТУП. Важливою задачею в теорії оптимального керування нескінченновимірними еволюційними системами є побудова оптимального керування в формі оберненого зв'язку (синтезу) [1], [4]. Для широкого класу задач як з розподіленим [1], так і з зосередженим керуванням [5] вдається знайти замкнену форму оптимального синтезу, параметри якої виражаються через власні функції та числа відповідного диференціального оператора. При цьому якщо коефіцієнти оператора є швидко осцилюючими [2], то виникає задача обґрунтування наближеного усередненого синтезу [5]. У даній статті така задача розв'язана для параболічної лінійної системи з зосередженим керуванням в правій частині та квадратичним критерієм якості. На основі знайденої формули точного синтезу обґрунтовано форму наближеного усередненого оптимального керування в формі оберненого зв'язку.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Нехай $\Omega \subset R^p, p \geq 1$, – обмежена область, $\varepsilon \in (0,1)$ – малий параметр, $T > 0$. В циліндрі $Q_T = (0,T) \times \Omega$ для вектор-функцій $y = y(t,x)$, $u = u(t)$ розглядається задача

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = A\Delta^{\varepsilon} y + By + C^{\varepsilon}(x)u, \\ y(t,x) = 0,\ x \in \partial\Omega, \\ y(0,x) = y_0^{\varepsilon}(x), \\ u \in U = \left(L^2[0,T]\right)^n, \end{cases} \tag{1}$$

$$J(y,u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\int_{\Omega} y_i(T,x) q(x)\,dx \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int_0^T u_i^2(t)\,dt \to \inf. \tag{2}$$

Тут A, B – сталі $n\times n$ матриці, $C^{\varepsilon}(x)$ – $n\times n$ матриця, елементи якої належать $L^2(\Omega)$, $y_0^{\varepsilon}\in\left(L^2(\Omega)\right)^n$, $q\in L^2(\Omega)$, $\alpha_i>0,\ \gamma_i>0,\ i=\overline{1,n}$, $\Delta^{\varepsilon}=div(\alpha^{\varepsilon}(x)\nabla)$, $\alpha^{\varepsilon}(x)=\alpha(\frac{x}{\varepsilon})$, $\alpha(x)=\left(\left(\alpha_{ij}(x)\right)\right)_{i,j=1}^{p}$ – вимірна, симетрична, періодична матриця, що задовольняє умови еліптичності та обмеженості: $\exists v_1>0, v_2>0\ \forall x,\ \xi\in R^p$

$$v_1\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{p}\alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le v_2\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2. \tag{3}$$

У статті при певних умовах на A і B знайдено формулу оптимального керування в формі оберненого зв'язку

$$u^{\varepsilon}=u^{\varepsilon}\left(t,y^{\varepsilon}\right), \tag{4}$$

де параметри функції u^{ε} залежать від швидко коливних коефіцієнтів. Основним результатом статті є обґрунтування того факту, що вектор-функція $u=u_N^0(t,y)$, яка одержується з (4) заміною швидко коливних параметрів на усереднені, а нескінчених сум на скінчені, реалізує наближений оптимальний синтез, тобто якщо y – розв'язок (1) з керуванням $u=u_N^0(t,y)$, то $\forall\ \delta>0\ \ \exists N_0\ge1,\ \exists\ \overline{\varepsilon}>0$ такі, що $\forall N\ge N_0\ \forall\varepsilon\in(0,\overline{\varepsilon})$ $\left|J\left(y^{\varepsilon},u^{\varepsilon}\right)-J(y,u)\right|<\delta.$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ. Будемо розглядати гільбертові простори вектор-функцій $H=\left(L^2(\Omega)\right)^n$, $V=\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$ з відповідними скалярними добутками і нормами $(y,z)_H=\sum_{i=1}^{n}(y_i,z_i)_{L^2(\Omega)}$, $(y,z)_V=\sum_{i=1}^{n}(y_i,z_i)_{H_0^1(\Omega)}$, $\|y\|_H^2=(y,y)_H$, $\|y\|_V^2=(y,y)_V$.

Через $\|x\|$ і (x,y) будемо позначати евклідову норму і скалярний добуток в R^n, а $\|A\|=\sqrt{\left(\sum a_{ij}^2\right)_{i,j=1}^{n}}$ – норму матриці. Будемо вважати, що матриця $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ симетрична і для деякого $\beta>0$

$$A\ge\beta E. \tag{5}$$

Тоді оператор $A^{\varepsilon}=-A\Delta^{\varepsilon}\in L\left(V,V^*\right)$ і задовольняє оцінки

$$\left(A^{\varepsilon}y,y\right)_V\ge\beta\,v_1\|y\|_V^2,\ \forall y\in V, \tag{6}$$

$$\left\|A^{\varepsilon}y\right\|_{V^*}\le2v_2\|A\|\|y\|,\forall y\in V. \tag{7}$$

Це означає [4, с. 120], що задача оптимального керування (1), (2) має єдиний розв'язок $\left\{\overline{y}^{\varepsilon},\overline{u}^{\varepsilon}\right\}\in W(0,T)\times U$, де $W(0,T)=\left\{y\in L^2(0,T;V)\,|\,\frac{dy}{dt}\in L^2(0,T;V^*)\right\}$.

Крім того, для розв'язку задачі (1) $y^{\varepsilon}\in W(0,T)$ при кожному фіксованому керуванні $u\in U$ справедлива оцінка для м.в. $t\in[0,T]$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|_H^2+\beta v_1\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|_V^2\le\|B\|\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|_H^2+C(\varepsilon)\|u(t)\|\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|_H, \tag{8}$$

де $C(\varepsilon)=\left(\int_{\Omega}\left\|C^{\varepsilon}(x)\right\|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Для знаходження оптимального процесу $\left\{\overline{y}^{\varepsilon},\overline{u}^{\varepsilon}\right\}$ скористаємось схемою з [5].

Нехай $\{X_j^{\varepsilon}(x)\}$, $\{\lambda_j^{\varepsilon}\}$ – власні функції та числа оператора Δ^{ε}, $0<\lambda_1^{\varepsilon}\le\lambda_2^{\varepsilon}\le\cdots,\ \lambda_j^{\varepsilon}\to\infty,\ j\to\infty.$

Шукаємо розв'язок у вигляді $y^{\varepsilon}(t,x)=\sum_{j=1}^{\infty}y_j^{\varepsilon}(t)X_j^{\varepsilon}(x)$. Тоді відносно вектор-функцій $y_j^{\varepsilon}(t)$ маємо задачу

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}y_j^{\varepsilon}(t)=-\lambda_j^{\varepsilon}Ay_j^{\varepsilon}(t)+By_j^{\varepsilon}(t)+C_j^{\varepsilon}u(t),\\ y_j^{\varepsilon}(0)=y_{0j}^{\varepsilon},\end{cases} \tag{9}$$

$$J=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}q_j^{\varepsilon}\left(y_j^{\varepsilon}\right)_i(T)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^T u_i^2(t)dt\to\inf, \tag{10}$$

де $C^{\varepsilon}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}C_j^{\varepsilon}X_j^{\varepsilon}(x)$, $y_0^{\varepsilon}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}y_{0j}^{\varepsilon}X_j^{\varepsilon}(x)$, $q(x)=\sum_{j=1}^{\infty}q_j^{\varepsilon}X_j^{\varepsilon}(x)$.

Припущення 1. Матриці A і B комутують.

Тоді після домноження рівняння (9) зліва на $q_j^\varepsilon e^{\lambda_j^\varepsilon A(t-T)}$ відносно вектор-функції $a^\varepsilon(t)=\sum_{j=1}^{\infty} q_j^\varepsilon e^{\lambda_j^\varepsilon A(t-T)} y_j^\varepsilon(t)$ маємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} a^\varepsilon(t) = Ba^\varepsilon(t) + G^\varepsilon(t)u(t), \\ a^\varepsilon(0) = a_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{11}$$

$$J\left(a^\varepsilon, u\right) = \left(Na^\varepsilon(T), a^\varepsilon(T)\right) + \int_0^T \left(Mu(t), u(t)\right)dt \to \inf, \tag{12}$$

де $G^\varepsilon(t)=\sum_{j=1}^{\infty} q_j^\varepsilon e^{\lambda_j^\varepsilon A(t-T)} C_j^\varepsilon$, $a_0^\varepsilon=\sum_{j=1}^{\infty} q_j^\varepsilon e^{-\lambda_j^\varepsilon AT} y_{0j}^\varepsilon$, N – діагональна матриця, елементами якої є α_i, M – діагональна матриця, елементами якої є γ_i.

Оскільки матриці N і M є додатньо визначеними, то задача (11), (12) допускає оптимальне керування в формі оберненого зв'язку. Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна, одержуємо програмну форму цього керування

$$u^\varepsilon(t) = -M^{-1}\left(G^\varepsilon(t)\right)^* e^{-B^*(t-T)} N\left(E + D_T^\varepsilon\right)^{-1} e^{BT} a_0^\varepsilon, \tag{13}$$

де для $t\in[0,T]$ $D_t^\varepsilon = \int_0^t e^{B(t-s)} G^\varepsilon(s) M^{-1} (G^\varepsilon(s))^* e^{B^*(t-s)} ds$.

Тоді враховуючи формулу розв'язку (11)

$$a^\varepsilon(t) = e^{Bt} a_0^\varepsilon + \int_0^t e^{B(t-s)} G^\varepsilon(s) u^\varepsilon(s) ds, \tag{14}$$

з (13), (14) одержуємо шуканий синтез $u^\varepsilon(t) = S^\varepsilon(t) a^\varepsilon(t)$, де

$$S^\varepsilon(t) = -M^{-1}(G^\varepsilon(t))^* e^{-B^*(t-T)} N\left(E + D_T^\varepsilon\right)^{-1} e^{BT} \left(e^{Bt} - D_t^\varepsilon e^{B^*(T-t)} N\left(E + D_T^\varepsilon\right)^{-1} e^{BT} \right)^{-1}. \tag{15}$$

Таким чином, доведено наступний результат

Лема 1. *Нехай виконуються умови (3), (5) та припущення 1. Тоді задача (1)–(2) має єдиний розв'язок* $\{\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\}$, *який може бути поданий в формі оберненого зв'язку*

$$\bar{u}^\varepsilon(t) = u^\varepsilon\left(t, y^\varepsilon\right) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j^\varepsilon S^\varepsilon(t)\, e^{\lambda_j^\varepsilon A(t-T)} \sum_{i=1}^{n} e_i \left(y^\varepsilon(t), e_i \bar{X}_j^\varepsilon \right)_H, \tag{16}$$

де $\bar{X}_j^\varepsilon$ – n - мірний вектор, кожна координата якого дорівнює X_j^ε, e_i - i - тий орт в R^n.

Використаємо формулу (16) для побудови наближеного синтезу.

Нехай стала матриця α_0 є усередненою для $\alpha^\varepsilon(x)$ [2]. Поряд з оператором Δ^ε розглянемо усереднений $\Delta^0 = div(\alpha^0 \nabla)$. Нехай $\{X_j^0(x)\}$, $\{\lambda_j^0\}$ – розв'язки відповідної спектральної задачі.

Припущення 2. Спектр усередненого оператора Δ^0 є простим.

Тоді мають місце збіжності $\forall j \ge 1$, $\lambda_j^\varepsilon \to \lambda_j^0$, $X_j^\varepsilon \to X_j^0$ в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай виконані умови

$$\alpha^\varepsilon(x) \xrightarrow{G} \alpha^0(x),$$
$$y_0^\varepsilon \to y_0,\ C_{kl}^\varepsilon \to C_{kl}^0 \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{17}$$

де C_{kl}^ε – елементи матриці $C^\varepsilon(x)$.

Покладемо

$$u_N^0\left(t, y_N^\varepsilon\right) = \sum_{j=1}^{N} q_j^0 S_N^0(t) e^{\lambda_j^0 A(t-T)} \sum_{i=1}^{n} e_i \left(y_N^\varepsilon(t), e_i \bar{X}_j^0 \right)_H, \tag{18}$$

де $S_N^0(t)$ визначається формулою (15) з заміною матриці $G^\varepsilon(t)$ на $G_N^0(t) = \sum_{j=1}^{N} q_j^0 e^{\lambda_j^0 A(t-T)} C_j^0$, $\bar{X}_j^0$ – n - мірний вектор, кожна координата якого дорівнює X_j^0, $y_N^\varepsilon \in W(0,T)$ – розв'язок задачі (1) з керуванням (18).

Основним результатом статті є наступна теорема

Теорема 1. *Нехай виконані умови (3), (5), (17) та припущення 1, 2. Тоді формула (18) є наближеним оптимальним керуванням в формі оберненого зв'язку для задачі (1), (2), тобто* $\forall \eta > 0\ \forall\, \delta > 0\ \ \exists \bar{N} \ge 1,\ \exists\, \bar{\varepsilon} \in (0,1)$ *такі, що* $\forall N \ge \bar{N}\ \ \forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$

$$\int_0^T \left\| \overline{u}^{\varepsilon}(t) - u_N^0\left(t, y_N^{\varepsilon}\right) \right\| dt < \eta, \tag{19}$$

$$\max_{t\in[\delta,T]} \left\| \overline{y}^{\varepsilon}(t) - y_N^{\varepsilon}(t) \right\|_H < \eta, \tag{20}$$

$$\left| J\left(\overline{y}^{\varepsilon}, \overline{u}^{\varepsilon}\right) - J\left(y_N^{\varepsilon}, u_N^0[t, y_N^{\varepsilon}]\right) \right| < \eta. \tag{21}$$

Доведення. Для зручності надалі будемо позначати: $[z, X] = \sum_{i=1}^{n} e_i \left(z, e_i \overline{X}\right)_H$ для $z \in H,\ X \in L^2(\Omega)$, $K_j^{\varepsilon}(t) = q_j^{\varepsilon} S^{\varepsilon}(t) e^{\lambda_j^{\varepsilon} A(t-T)}$ для $j \geq 1,\ \varepsilon \geq 0$.

Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = A\Delta^{\varepsilon} z + Bz + C^{\varepsilon}(x) u^0(t, z), (t, x) \in Q_T, \\ z(t, x) = 0, x \in \partial\Omega, \\ z(0, x) = y_0^{\varepsilon}(x), \end{cases} \tag{22}$$

де $u^0(t, z) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j^0(t) \left[z, X_j^0\right]$.

Задача (22) має єдиний розв'язок $z^{\varepsilon}(t, x)$ в класі $W(0, T)$ [7], для якого справедлива оцінка (8) з $u(t) = u^0(t, z^{\varepsilon})$.

Згідно (17) $\exists \sigma > 0$ $C(\varepsilon) = \left(\int_{\Omega} \left\| C^{\varepsilon}(x) \right\|^2 dx \right)^{1/2} \leq \sigma$, $\max_{t\in[0,T]} \left\| K_j^0(t) \right\| \leq \sigma$, $\left\| y_0^{\varepsilon} \right\|_H \leq \sigma$.

З (8) та з рівності Парсеваля, одержуємо оцінку $\forall t \in [0, T]$

$$\| z^{\varepsilon}(t) \|_H^2 + 2\beta \nu_1 \int_0^t \| z^{\varepsilon}(s) \|_V^2\, ds \leq \sigma^2 + 2\|B\| \int_0^t \| z^{\varepsilon}(s) \|_H^2\, ds + 2\sigma^2 \int_0^t \| z^{\varepsilon}(s) \|_H^2\, ds. \tag{23}$$

Застосовуючи нерівність Гронуола, з (23) одержуємо $\forall t \in [0, T]$

$$\| z^{\varepsilon}(t) \|_H^2 \leq \sigma^2 e^{2\left(\|B\| + \sigma^2\right)T}, \tag{24}$$

$$\left\| u^0(t, z^{\varepsilon}) \right\|^2 \leq \sigma^2 \| z^{\varepsilon}(t) \|_H^2 \leq \sigma^4 e^{2\left(\|B\| + \sigma^2\right)T}, \tag{25}$$

З (23)–(25) одержуємо, що $\left\{z^{\varepsilon}\right\}$ – обмежена в $W(0, T)$.

Оскільки вкладення $V \subset H$ є компактним, то за лемою про компактність [7] існує функція $z = z(t, x) \in W(0, T)$ така, що принаймні по послідовності

$$z^{\varepsilon} \to z \text{ в } L^2(0, T; H),$$

$$z^{\varepsilon}(t, x) \to z(t, x) \text{ м.с. в } Q_T, \tag{26}$$

$$z^{\varepsilon}(t) \to z(t) \text{ в } H \text{ для м.в. } t \in [0, T].$$

Тому

$$u^0(t, z^{\varepsilon}) \to u^0(t, z) \text{ в } L^2(0, T; H). \tag{27}$$

Далі, оскільки оператор $A^{\varepsilon} = -A\Delta^{\varepsilon}$, задовольняє (6), (7), то з [2] по деякій підпослідовності $A^{\varepsilon} \xrightarrow{G} \overline{A}$, де $\overline{A} \in L(V, V^*)$ задовольняє (6). Розглянемо для $\forall u_0 \in V$ елемент $\bar{f} = \overline{A} u_0 \in V^*$ і нехай u_{ε} розв'язок рівняння $A^{\varepsilon} u = \bar{f}$. Тоді $u_{\varepsilon} \to u_0$ слабо в V. З іншого боку, $\forall i = \overline{1, n}$ $-\Delta^{\varepsilon}\left(Au_{\varepsilon}\right)_i = \overline{f_i}$, що в силу (17) означає, що $-A\Delta^0 u_0 = \bar{f}$. Таким чином $\overline{A} = A^0 = -A\Delta^0$ і в силу єдиності G-границі по всій послідовності

$$A^{\varepsilon} \xrightarrow{G} A^0 = -A\Delta^0. \tag{28}$$

Тоді з (27), (28) та результатів про G-збіжність параболічних операторів [3, 6] маємо, що z – розв'язок задачі (22) при $\varepsilon = 0$, тобто задачі (22) з оператором $-A\Delta^0$ та початковими даними y_0, причому $\forall \delta > 0$

$$z^{\varepsilon} \to z \text{ в } C([\delta, T]; H). \tag{29}$$

З (27), (29) одержуємо $J\left(z^{\varepsilon}, u^0[t, z^{\varepsilon}]\right) \to J\left(z, u^0[t, z]\right)$ при $\varepsilon \to 0$.

Нарешті, оскільки задача оптимального керування (1), (2) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок [4], для якого аналогічно попередньому можна одержати формулу синтеза (16) при $\varepsilon = 0$, то $\left\{z, u^0(t, z)\right\}$ – оптимальний процесс в (1), (2) при $\varepsilon = 0$.

Далі зауважимо, що оскільки

$$\left\| G_N^0(t) - G^0(t) \right\| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \left| q_j^0 \right| \left\| C_j^0 \right\| e^{\lambda_j^0 \|A\| (t-T)} \leq e^{\lambda_{N+1}^0 \|A\| (t-T)} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \left| q_j^0 \right| \right)^{1/2} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \left\| C_j^0 \right\| \right)^{1/2} \to 0,\ N \to \infty,$$

$$\text{то } \forall t \in [0,T] \ \left\| S_N^0(t) - S^0(t) \right\| \to 0, \ N \to \infty .$$

Тоді аналогічно [5] можна показати, що $\forall \eta > 0$ виконуються співвідношення (19)–(21) з заміною $\bar{y}^\varepsilon$ на z^ε, $\bar{u}^\varepsilon$ на $u^0(t, z^\varepsilon)$.

Залишилось показати, що $\{\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\} \to \{z, u^0(t,z)\}$ в сенсі (19) – (21). Оскільки $\forall t \in [0,T]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\left\| G^\varepsilon(t) \right\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \left| q_j^\varepsilon \right| \left\| C_j^\varepsilon \right\| e^{\lambda_j^\varepsilon \|A\|(t-T)} \le \|q\| \sigma$ і, оскільки, в силу невід'ємної визначеності D_T^ε виконується нерівність $\left\| \left(E + D_T^\varepsilon \right)^{-1} \right\| \le 1$, то з формули (13) випливає

$$\forall t \in [0,T] \ \left\| \bar{u}^\varepsilon(t) \right\| \le \left\| M^{-1} \right\| \|q\|^2 \sigma^2 \|N\| e^{\|B\| T} := C . \tag{30}$$

Тоді з оцінки (8), застосованої до допустимого процесу $\{\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\}$, маємо, що $\bar{y}^\varepsilon$ обмежена в $W(0,T)$.

Отже, для деякого $y \in W(0,T)$ $\bar{y}^\varepsilon \to y$ в сенсі (26).

Оскільки, $G^\varepsilon(T) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j^\varepsilon C_j^\varepsilon = \left(\left(\left(q, C_{kl}^\varepsilon \right)_{L^2(\Omega)} \right) \right)_{k,l=1}^n \to G^0(T), \varepsilon \to 0$, то $\forall t \in [0,T]$ маємо $G^\varepsilon(t) \to G^0(t), \varepsilon \to 0$.

Звідси, враховуючи збіжність $a_0^\varepsilon \to a_0, \varepsilon \to 0$, з формули (13), оцінки (30) і теореми Лебега виводимо, що

$$\bar{u}^\varepsilon \to u \text{ в } \left(L^2(0,T) \right)^n . \tag{31}$$

Тоді, знову користуючись G-збіжністю параболічних операторів [3, 6], одержуємо, що y – розв'язок (1) при $\varepsilon = 0$ з керуванням $u(t)$ і при цьому $\forall \delta > 0$

$$y^\varepsilon \to y \text{ в } C([\delta, T]; H). \tag{32}$$

З (31), (32) одержуємо

$$J\left(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon \right) \to J(y,u) \text{ при } \varepsilon \to 0 . \tag{33}$$

Нарешті, застосовуючи до задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$ процедуру (9)–(12), з урахуванням єдиності розв'язку [4] одержуємо для оптимального керування цієї задачі формулу (13) з матрицею $G^0(t)$ і початковим вектором a_0. Отже, $u(t)$ – оптимальне керування в (1), (2) при $\varepsilon = 0$. На підставі єдиності розв'язку задачі (1) при фіксованому керуванні звідси маємо, що $\{y, u\}$ – оптимальний процес в (1), (2) при $\varepsilon = 0$. Отже, $\{y, u\} = \{z, u^0(t,z)\}$ і згідно (31)–(33) теорема доведена.

ВИСНОВКИ. В роботі розглянута задача оптимального керування на розв'язках параболічної системи зі швидко коливними коефіцієнтами. При певних умовах на матричні коефіцієнти системи, знайдено явну формулу оптимального керування в формі оберненого зв'язку (синтезу). На основі одержаної формули, шляхом переходу до усереднених параметрів, запропоновано та обґрунтовано формулу оптимального наближеного синтезу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Егоров А. И. Оптимальное управление линейными системами. – К., 1988.
2. Жиков В. В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М., 1993.
3. Жиков В. В., Козлов С.М., Олейник О.А. О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат.наук. – 1981. – т. 36, №11. – С. 11–55.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М., 1972.
5. Kapustyan O. V., Kapustian O. A., Sukretna A. V. Approximate bounded synthesis for distributed systems. – Lambert Academic Publishing, 2013.
6. Kapustyan O. V., Kapustian O. A., Shklyar T. B. Global attractor of a parabolic inclusion with nonautonomous main part // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 187, № 4. – P. 458–470.
7. Sell G. R., You Y. Dynamics of Evolutionary Equations. – Applied Mathematical Sciences, Vol 141, Springer Verlag, New York, 2002.

Стаття надійшла до редколегії 27.11.14

Русина А., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ФОРМЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С БЫСТРО КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе рассматривается задача нахождения оптимального управления в форме обратной связи (синтеза) для линейно-квадратичной задачи, состоящей из параболической системы с быстро колеблющимися коэффициентами и полуопределенного целевого функционала. Найдено точную формулу синтеза и с помощью перехода к усредненным параметрам обосновано его приближенную форму.

Rusina A., PhD Graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

APPROXIMATE OPTIMAL CONTROL IN FEEDBACK FORM FOR A PARABOLIC SYSTEMS WITH RAPIDLY FLUCTUATING COEFFICIENTS

In this paper, the optimal control in feedback form (synthesis) is found for linear-quadratic problem that consists of semi defined performance criterion and a parabolic system with rapidly fluctuating coefficients. The exact formula for the synthesis was found and its approximate form that lies in substitution of quickly-oscillating parameters with average and all infinite sums with finite was justified.