УДК: 517.9

О. Лопотко, канд. фіз.-мат. наук,
Національний лісотехнічний університет України, Львів
e-mail: *Lopotko13@gmail.com*

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСІВ $K_{n,a}, K_{i,\grave{a}}$.

Одержано необхідні і достатні умови однозначного продовження парних функцій $k(x) \in K_{n,a}$, або $K_{n,a}(-a < x, a)$ з інтервалу на всю вісь.

ВСТУП. Проблема продовження додатно визначених функцій $k(x)$ з скінченного інтервалу на всю вісь розглядалася у працях М. Г. Крейна [3]. Залучаючи теорію просторів з позитивною і негативною нормами Ю. М. Березанський в [1, 2] вивчав цю проблему для функцій, $k(x)$ що пов'язані з оператором $L = i\dfrac{d}{dx}$. У даній статті, використовуючи методику [2], одержано необхідну і достатню умови однозначного продовження парних додатно визначених функцій $k(x)$, що пов'язані з оператором $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$.

ОЗНАЧЕННЯ. Функція $k(x)(-2a \le x \le 2a, a < \infty)$ належить класу $K_{n,a}$ якщо вона дійсна, неперервна, парна і породжує парне по кожній змінній додатно визначене ядро

$$K(x,y) = \frac{1}{2}\left[k(x+y) + k(x-y)\right] \; (-a < x, y < a).$$

Додатню визначеність ядра $K(x,y)(-l \le x, y \le l, l < a)$ розуміємо в сенсі умови $\langle (Ku,u)\rangle = \int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{-l}^{l} K(x,y)\overline{u(x)}u(y)dxdy \ge 0$, де $u \in L_2\left[-l,l\right]$ – парна функція, $u \to Ku = \int\limits_{-l}^{l} K(x,y)u(y)dy$.

Відомо, що функція $k(x) \in K_{n,a}$ допускає зображення

$$k(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x d\rho(\lambda), \tag{1}$$

де $d\rho(\lambda)$ – скінчена міра, яка визначається неоднозначно.

Теорема 1. Якщо парна неперервна на сегменті $[-2l, 2l]$, де $l < a$, функція $k(x) \in K_{n,a}$ інтегрована з квадратом і така, що оператор

$$(Kf)(x) = \int\limits_{-l}^{l} \frac{1}{2}[k(x+t) + k(x-t)]f(t)dt \tag{2}$$

строго додатний у просторі $L_2 = L_2[-l,l], \forall l < a$, то для однозначності міри $d\rho(\lambda)$ у зображенні (1) необхідно, щоб для будь-якого уявного z і достатньо для деякого уявного z мало місце співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left| \int\limits_{-l}^{l} \cos\sqrt{z}x\overline{w_j(x)}dx \right|^2 = \infty, \tag{3}$$

де $w_j(x)$ – власні функції оператора K: $u \to Ku = \int\limits_{-l}^{l} K(x,y)u(y)dy$, λ_j – власні значення оператора K.

Доведення. Необхідність. За функцією $k(x) \in K_{n,a}$, інтегрованою з квадратом, побудуємо ядро $K(x,y) = \dfrac{1}{2}[k(x+y) + k(x-y)](-l \le x, y \le l, l < a)$ і введемо скалярний добуток, поклавши

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{-l}^{l} K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dxdy, \; (f, g \in L_2) \tag{4}$$

Завдяки властивості інтегрування $k(x)$ з квадратом простір L_2 можна поповнити відносно скалярного добутку (4). Одержаний простір H_k можна розглядати як негативний простір відносно $H_0 = L_2$. Тепер по ланцюжку $H_k \supseteq H_0 = L_2$ можна побудувати ланцюжок

$$H_k \supseteq H_0 = L_2 \supseteq H_{+,k} \tag{5}$$

де $H_{+,k}$ будується як замикання $\Re(K)$ відносно метрики $(u,v)_{+,k} = (K^{-1}u, v)_0$, а $K > 0$ – оператор в L_2 якій визначається з рівності

$$(Kf, g)_0 = \langle f, g\rangle \; (f, g \in L_2), \tag{6}$$

Із (4) і (6) знаходимо, що

$$(Kf)(x) = \int\limits_{-l}^{l} K(x,y)f(y)dy \; (f \in L_2), \tag{7}$$

Тому із (7) і неперервності $K(x,y)$ випливає що $\Re(K) \subseteq C[-l,l]$ $(l < a)$.

Зауважимо, що згідно з теоремою 1.1 [3, гл.I] простір $H_{+,k}$ співпадає з $\mathfrak{D}(D)$, де $D = \sqrt{I^{-1}}$, тобто $H_{+,k} = \Re(\sqrt{I})$. Оскільки $I = K$, то маємо

$$H_{+,k} = \Re(\sqrt{K}) \tag{8}$$

$$\overbrace{H_k \supseteq \underbrace{\overbrace{H_0 = L_2 \supseteq H_{+,k}}^{D}}_{I}}^{I^{-1}}$$
$$\underbrace{\phantom{H_k \supseteq H_0 = L_2 \supseteq H_{+,k}}}_{I}$$

Лема. Позначимо $w_1(x), w_2(x), \ldots$ повний набір ортонормованих власних функцій із L_2 ядра $K(x,y)$ які відповідають власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots (\lambda_j > 0; j = 1,2,\ldots)$. Функція $u \in L_2$ належить $H_{+,k}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\|u\|_{+,k}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left|(u,u_j)_0\right|^2 < \infty \tag{9}$$

Доведення. Необхідність. Згідно з (8) $u \in H_{+,k}$ тоді і тільки тоді, коли $u = \sqrt{K} f$, де $f \in L_2$ причому, згідно [3, гл.I, формула (1.13)] $\|u\|_{+,k}^2 = \|Du\|_0^2 = \|f\|_0^2$. Оскільки $f = \sqrt{K^{-1}} u$, то $(f,w_j)_0 = \dfrac{(u,w_j)_0}{\sqrt{\lambda_j}}$ і $\|u\|_+^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_j} \left|(u,w_j)_0\right|^2$. Звідки випливає твердження леми.

Введемо тепер у просторі H_k оператор $Cu = -\dfrac{d^2u}{dx^2}$ $(u \in \mathfrak{D}(C) = C_0^{\infty}[-l,l]\ (l < \alpha))$. Знайдемо для нього спряжений оператор C*. Нехай I оператор $H_k \to H_{+,k}$ тоді

$$C^* = I^{-1}[-(I\alpha)'']. \tag{10}$$

причому, $\mathfrak{D}(C^*)$ складається із тих і тільки тих $\alpha \in H_k$, для яких $I\alpha \in C^2[-l,l]$ і $(I\alpha)'' \in H_{+,k}$.

Дійсно, нехай $\alpha \in H_k$ таке що $\langle -u'', \alpha \rangle = \langle u, \beta \rangle$ $(u \in C_0^{\infty}[-l,l])$ при деякому $\beta = C^*\alpha$. Тоді $(-u'', I\alpha)_0 = (u, I\beta)_0$, причому $I\beta \in H_{+,k} \subseteq C[-l,l]$. Якщо врахувати зауваження на с. 498 [3], то одержимо $-I\alpha \in C^2[-l,l]$ і $(-I\alpha)'' = I\beta$, тобто $\beta = C^* = I^{-1}(-I\alpha)''$..

Розмірковуючи у зворотньому сенсі маємо: що $C^* = I^{-1}(-I\alpha)'' = \beta$ якщо $\alpha \in H_k$. Тоді $I\beta = (-I\alpha)''$ і $I\alpha \in C^2[-l,l]$. Отже $(-u'', I\alpha)_0 = (u, I\beta)_0$ і $\langle -u'', \alpha \rangle = \langle u, \beta \rangle$, якщо $(-I\alpha) \in H_k$ і $u \in C_0^{\infty}[-l,l]$.

Тепер позначимо $\overline{C}$ замикання оператора C в H_k. Розглянемо підпростір $\Re(\overline{C} - zE)$ простору H_k і ортогональне доповнення N_z до нього, тобто дефектний підпростір. Із (10) випливає наступний факт: індекси дефектного оператора C мають вид (0,0) або (1,1). В останньому випадку дефектний підпростір N_z складається із скалярних кратних векторів $I^{-1}\cos\sqrt{z}x \in H_k$. Дійсно, у оператора C дефектні числа рівні, завдяки дійсності його відносно інволюції 0. Якщо $\overline{C}$ не самоспряжений, то N_z співпадає з підпростором розв'язків рівняння $C^*\varphi = \bar{z}\varphi$. Відповідно з (10) для $x \in [-l,l] - (I\varphi)'' = \bar{z} I\varphi$, тобто $(I\varphi)_1 = a\cos\sqrt{z}x$; $(I\varphi)_2 = a\dfrac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}$ $\grave{a} - \tilde{n}\hat{e}\grave{a}\ddot{e}\ddot{y}\eth$, або $\varphi_1 = aI^{-1}\cos\sqrt{z}x$; $\varphi_2 = aI^{-1}\dfrac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}$. Але $\varphi_2 \overline{\in} H_k$ так як H_k розглядається на парних функціях. Таким чином індекси дефекта оператора $C \in (0,0)$ або (1,1) і $\overline{C}$ є самоспряженим якщо $\cos\sqrt{z}x \in H_{+,k}$ для будь-якого уявного z. А це означає, згідно з лемою, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left| \int_{-l}^{l} \cos\sqrt{z}x \cdot \overline{w_j(x)} dx \right|^z = \infty ,$$

де $\overline{w_j(x)}$ – власні функції оператора K, λ_j – власні значення оператора K.

Тоді, згідно з теоремою 3.7 [3, с.659] маємо зображення (1), де міра $d\rho(\lambda)$ визначається однозначно.

Достатність. Нехай маємо $f(x) \in K_{n,a}$ яка інтегрована з квадратом і задовольняє (2), (3) при деякому уявному z. Доведемо, що вона має зображення (1), де $d\rho(\lambda)$ – скінчена міра, яка визначається однозначно. Дійсно, так як $f(x) \in K_{n,a}$ і інтегрована з квадратом, то вона має зображення (1). Із умов (2), (3), при деякому уявному $z = \xi$, слідує що $(C-\xi z)(\mathfrak{D}(C))$ щільне у $H_{+,k}$, а значить і в H_k. Це означає що $\overline{C}$ самоспряжене в H_k. Тому одержимо, згідно з теоремою 3.1 [3, с.651], має місце зображення (1), де міра $d\rho(\lambda)$ визначається однозначно.

Теорему 1 доведено.

Означення. Функція $k(x)(-2a<x<2a, a<\infty)$ належить класу $K_{i,a}$ якщо вона дійсна, неперервна, парна, $k(0)=0$ і породжує непарне по кожній змінній додатно визначене ядро

$$K(x,y)=\frac{1}{2}[k(x+y)-k(x-y)]\ (-a<x,y<a).$$

Додатню визначеність ядра $K(x,y)(-l\le x,y\le l.l<a)$ розуміємо як $(Ku,u)=\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l}K(x,y)\overline{u(x)}u(y)dxdy\ge 0$, для непарної $u\in L_2[-l,l]$, де $Ku=\int_{-l}^{l}K(x,y)u(y)dy$.

Відомо, що функція $k(x)\in K_{i,a}$ допускає зображення

$$k(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}x}{\lambda}d\rho(\lambda) \tag{11}$$

де $d\rho(\lambda)$ – скінчена міра, яка визначається неоднозначно.

Аналогічно довести теоремі 1 доводиться наступне твердження.

Теорема 2. Якщо парна неперервна на сегменті $[-2l,2l](\forall l<a)$ функція $k(x)\in K_{i,a}$ інтегрована з квадратом і така, що оператор

$$(Kf)(x)=\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}[k(x+t)+k(x-t)]f(t)dt \tag{12}$$

строго додатний у просторі $L_2=L_2[-l,l],(\forall l<a)$, то для однозначності міри $d\rho(\lambda)$ у зображенні (11) необхідно, щоб для будь-якого уявного z і достатньо для деякого уявного z мало місце співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\left|\int_{-l}^{l}\frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}\overline{w_j(x)}dx\right|^2=\infty, \tag{13}$$

де $w_j(x)$ – власні функції оператора K, λ_j - власні значення оператора K.

ВИСНОВКИ. Одержані необхідні і достатні умови однозначного продовження парних функцій $k(x)(-a<x<a)$ з інтервалу на усю площину $(R^1\times R^1)$ для яких ядро $K(x,y)=\frac{1}{2}[k(x+y)\pm k(x-y)]$. додатно визначено.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Березанский Ю. М.* О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов. УМЖ. – 1959. – 11 с.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. -К: Наукова думка, 1965. – 800 с.
3. *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения. // Докл. АН СССР. – 1946. – 53, №1. –С. 3–6.

Стаття надійшла до редколегії 21.01.15

Лопотко О. В., канд. физ.-мат. наук
Национальный лесотехнический университет Украины, Львов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $K_{\div,a}, K_{i\div,\grave{a}}$.

Получены необходимые о достаточные условия для однозначного продолжения четных функций $k(x)\in K_{\div,a}$ или $K_{i\div,a}(-a<x,a)$ с интервала на всю ось.

Lopotko O. V., PhD
National Forestry and Wood-Technology University of Ukraine, Lviv

THE INTEGRAL REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS OF THE CLASSES $K_{e,a}, K_{une,\grave{a}}$.

The necessary and sufficient conditions for simple continuation of even functions $k(x)\in K_{e,a}$, $K_{une,a}(-a<x,a)$ from the interval on the whole axis are obtained.